



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA Y EXPERIMENTACIÓN DE
ONDAS SOLITARIAS EN AGUA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
FÍSICO

PRESENTA:
JOSÉ ALBERTO MORALES ESCALANTE

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PANAYIOTIS PANAYOTAROS
DRA. MARÍA DEL CARMEN JORGE Y JORGE



2008

Dedicatorias

A la Universidad Nacional Autónoma de México, que a lo largo de mi vida ha sido un segundo hogar.

A mis profesores de Física del Colegio México, Manuel Carrillo Ricalde y Bernardo Tarango Frutos, por las clases que me hicieron decidir mi vocación profesional. Gracias también al profesor de Biología Isaías Rocha, por sus clases y consejos a todos los estudiantes.

A mis amigos y compañeros, a quienes el destino me ha presentado en su eterno juego de tejido y desentredado de nuestras líneas de universo. Gracias por compartir conmigo las risas, cafés, reuniones y pláticas que han aligerado las clases, tareas y exámenes también compartidos. Gracias por su amistad.

Por sobre todo, gracias a mis padres, María del Carmen Patricia Escalante López y Aureliano Morales Vargas, y a mis abuelos, Josefina López Ruiz y Silvestre Escalante Inda. Gracias por su infinito amor, por su ejemplo de entrega y dedicación a sus labores, por la guía, la ayuda y el apoyo constante que me han dado durante toda mi vida. Gracias por inculcarme el amor a la verdad en sus distintas formas. Esta tesis es también suya.

Agradecimientos

A mis directores de tesis, el Dr. Panayiotis Panayotaros y la Dra. María del Carmen Jorge y Jorge, investigadores del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS-UNAM. Gracias por la atención y el tiempo que han dedicado a enseñarme y formarme como estudiante, por el apoyo que me han dado durante el desarrollo de mi trabajo, por los consejos para mejorarlo que he recibido de ustedes. Gracias por las múltiples revisiones y correcciones a esta tesis. Gracias por ser mis tutores.

A mi jurado de tesis, el Dr. Antonmaria Minzoni, la Dra. Catalina Stern, el Dr. Julio Herrera y el Dr. Jorge Fujioka, por su disposición y ayuda al leer mi trabajo de tesis, por sus observaciones, sugerencias y correcciones a él.

Quiero agradecer a los investigadores del Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos del Instituto de Ingeniería de la UNAM, el Dr. Rodolfo Silva Casarín y el Dr. Edgar Mendoza Baldwin, por la ayuda prestada al permitirnos usar el Laboratorio de Oleaje del II-UNAM para la labor experimental de esta tesis.

Quiero agradecer también a mi gran amigo Darío Meléndez, quien pasó del arte a la ingeniería en cuestión de minutos y sin cuya ayuda me habría sido imposible hacer las tomas de videos móviles con las ondas de los experimentos de interacción.

A la Facultad de Ciencias de la UNAM, por haber recibido de ella mi formación profesional, por los excelentes profesores de los que tuve la oportunidad de aprender, por haberme permitido seguir mi vocación científica.

Así era el Maestro. No sólo sabía leer en el gran libro de la naturaleza, sino también en el modo en que los monjes leían los libros de la escritura y pensaban a través de ellos . . . Además, su explicación me pareció al final tan obvia que la pena por no haberla descubierto yo mismo quedó borrada por el orgullo de compartirla ahora con él, hasta el punto de que casi me felicité por mi agudeza. Tal es la fuerza de la verdad que, como la bondad, se difunde por sí misma . . .

El Nombre de la Rosa, Umberto Eco.

Índice general

1. Fluidos con superficie libre	1
1.1. Elementos de Hidrodinámica	1
1.1.1. Descripción del Movimiento de un Fluido	1
1.1.2. Ecuaciones de Conservación	2
1.1.3. El Fluido Ideal	3
1.1.4. Flujo Potencial	4
1.2. Ecuaciones Básicas de Ondas en Agua	4
1.3. Variables de Superficie y el Operador Dirichlet-Neumann	5
1.3.1. El Operador Dirichlet-Neumann	6
1.3.2. Ecuaciones Básicas en términos de η y Φ	6
2. Ondas en agua como sistema hamiltoniano	9
2.1. Introducción al formalismo Hamiltoniano de Sistemas Continuos	9
2.1.1. Ecuaciones de Hamilton en sistemas de dimensión finita	9
2.1.2. Ecuaciones de Hamilton en Sistemas Continuos	10
2.2. El problema de ondas en agua en forma hamiltoniana	12
2.2.1. La Energía del Fluido y el Hamiltoniano asociado al sistema	13
3. El Operador Dirichlet-Neumann	15
3.1. Propiedades Básicas	15
3.2. Expansión de $G(\eta)$ en potencias de η	15
3.2.1. Deducción de las fórmulas para los términos $G_j(\eta)$	16
3.2.2. Los primeros términos de la serie de $G(\eta)$	19
4. Teoría de ondas largas y solitones	23
4.1. Ecuaciones de ondas en agua en variables adimensionales	24
4.1.1. Expansión del operador Dirichlet-Neumann	24
4.1.2. Las Ecuaciones de Hamilton	26
4.2. Aproximación del Hamiltoniano y el Sistema Boussinesq	28
4.3. La Ecuación KdV y el Sistema Boussinesq	31
4.4. Ondas Solitarias y Solitones KdV	34
4.4.1. Solución KdV de tipo onda solitaria	34
4.4.2. Solución KdV de dos solitones	36
4.4.3. La interacción de dos solitones en la Ecuación KdV	41
5. Experimentación en ondas solitarias en agua	47
5.1. Antecedentes Experimentales	47
5.1.1. Generación de ondas solitarias con un pistón	47
5.1.2. Interacción de ondas solitarias en agua	49

5.2. Canal de Olas II-UNAM	52
5.2.1. Generación de Oleaje	52
5.2.2. Instrumentos de Medición: Sensores Resistivos	54
5.2.3. Adquisición de Datos	55
5.3. Experimentos de cruce de dos ondas solitarias	55
5.3.1. Planeación y Desarrollo Experimental	55
5.3.2. Análisis de Datos y Resultados	60
6. Conclusiones	87

Capítulo 1

Flujo potencial con superficie libre

1.1. Elementos de Hidrodinámica

1.1.1. Descripción del Movimiento de un Fluido: Formalismo Matemático

Desde el punto de vista de la Teoría de los Medios Continuos, un fluido se puede describir matemáticamente como un subconjunto de puntos de \mathbb{R}^d ($d \in \{2, 3\}$) que se están moviendo. Para hacer esto preciso, sea U_0 un subconjunto de \mathbb{R}^d . Cada punto $\mathcal{X} \in U_0$ representa a una partícula “idealizada”, de manera que el fluido está constituido por la colección de puntos de U_0 . También se puede identificar a cada punto \mathcal{X} por su posición al tiempo inicial $t_0 = 0$, $X = X(\mathcal{X})$. Bajo esta identificación, la trayectoria de cada partícula $X \in U(0)$ en un intervalo de tiempo $[0, T]$ se describe por una curva $\mathbf{r}(X, \cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, que cumple $\mathbf{r}(X, 0) = X$. Entonces, $\mathbf{r}(X, t)$ es la posición de la partícula X a un tiempo t , y hemos supuesto que la partícula está en $\mathbf{r} = X$ al tiempo $t = 0$. El conjunto de las posiciones de todas las partículas a un tiempo $t \in [0, T]$ se denota por $U(t)$. Supondremos que $\mathbf{r}(X, t)$ es una función suave en ambas variables X, t , y que para cada $t \in [0, T]$ la función $\mathbf{r}(\cdot, t) : U(0) \rightarrow U(t)$ es un difeomorfismo liso.

La velocidad de la partícula X al tiempo t está dada por la derivada $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(X, t)$, y se le suele llamar *velocidad lagrangiana*. A su vez, se define a la *velocidad euleriana* en un punto \mathbf{R} del fluido, al tiempo t , como: $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = \left. \frac{d}{dt}\mathbf{r}(X, t) \right|_{\mathbf{r}(X, t) = \mathbf{R}}$; es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{R}, t)$ es la velocidad de la partícula que pasa por \mathbf{R} en el instante t . Esta partícula X satisface $\mathbf{R} = \mathbf{r}(X, t)$ y es única, ya que $\mathbf{r}(\cdot, t)$ es un difeomorfismo.

Para describir una propiedad física cuyo valor en cada partícula se mantiene constante durante toda la evolución del fluido, y cuyos valores al tiempo inicial están dados por una función $f : U(0) \rightarrow \mathbb{R}$, se define a la familia de funciones $f(\cdot, t) : U(t) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(\mathbf{R}, t) = f(X, 0)$, donde $\mathbf{R} = \mathbf{r}(X, t)$.

La formulación anterior se puede usar para describir diferentes tipos de medios. La teoría de cada medio es la ley de evolución que determina $\mathbf{r}(X, t)$ dadas ciertas condiciones iniciales, como $\mathbf{r}(X, 0)$, y $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(X, 0)$. A nosotros nos interesa un modelo para los fluidos. Para ello, nos será de utilidad el Teorema de Transporte de Reynolds. Denotamos por dV a un elemento de volumen diferencial. Se tiene que:

Proposición 1 *Sea una familia de funciones $f(\mathbf{R}, t)$, $\mathbf{R} = \mathbf{r}(X, t)$, de acuerdo a las definiciones anteriores. Sea $V(0)$ un subdominio liso de $U(0)$, y $V(t) = \mathbf{r}(V(0), t)$. Entonces se cumple que*

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right) dV. \quad (1.1)$$

En términos intuitivos, el teorema dice que el cambio de la integral se debe tanto al cambio en el valor del integrando como a la variación en la forma de la región. La relación 1.1 se debe a que

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} f(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.2)$$

donde dS es un elemento de superficie diferencial sobre $\partial V(t)$ (inducido por dV) y $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario exterior sobre $\partial V(t)$ ($\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es la componente normal de la velocidad en la frontera). Aplicando el Teorema de la Divergencia, se obtiene (1.1).

1.1.2. Ecuaciones de Conservación

Una manera de derivar ecuaciones que describan la evolución de los fluidos es mediante el Teorema de Reynolds, aplicándolo a postulados que representan leyes de conservación (o balance) de propiedades físicas.

Conservación de la Masa

Postulamos que, si seguimos la evolución de una región del fluido, el valor de su masa es el mismo en todo tiempo. Con la notación anterior, sea una función positiva $\rho : U(0) \rightarrow \mathbf{R}^+$ y lisa, que se interpretará como la *densidad* del fluido ρ . La masa del fluido en cada $V(0) \subset U(0)$ será $\int_{V(0)} \rho(X) dV$. La conservación de masa postula que

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{R}, t) dV = 0$$

donde $(\mathbf{R}, t) = \mathbf{r}(X, t)$, $V(t) = \mathbf{r}(V(0), t)$. Haciendo uso de (1.1), esto es equivalente a

$$\int_{V(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) dV = 0$$

La región de integración $V(t)$ es arbitraria puesto que $V(0)$ es arbitraria y $r(\cdot, t)$ es un difeomorfismo. Por lo tanto, en toda posición $\mathbf{r} \in U(t)$, a todo tiempo $t \in [0, T]$, se debe cumplir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.3)$$

A la relación anterior se le conoce como la *ecuación de continuidad*. Si se desarrolla el segundo sumando, y se toma en cuenta que $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, por la regla de la cadena la fórmula anterior puede escribirse como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (1.4)$$

Conservación del Momento

Postulamos también la ley de conservación (o balance) del momento, con base en la ley de Newton de la Mecánica; de acuerdo a ella, la tasa de cambio del momento de un conjunto de partículas es igual a la fuerza externa total. El *momento* en la región $V(t)$ se define como $\int_{V(t)} \rho(\mathbf{R}, t) \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) dV$ y tiene d componentes ($d \in \{2, 3\}$). Se supone también que las fuerzas aplicadas a $V(t)$ se dividen en dos tipos: fuerzas volumétricas y fuerzas de superficie. Las *fuerzas volumétricas* (o de cuerpo) actúan sobre todas las partes del elemento de fluido considerado; un ejemplo de ellas es la fuerza gravitacional. Por otra parte, las *fuerzas de superficie* (o de tracción), que permiten modelar las interacciones de corto alcance entre partículas del fluido sin entrar en detalles microscópicos, suponiendo que actúan en la superficie del elemento de fluido considerado. Además, también se hará la hipótesis (lineal) de que la fuerza de superficie de una región $V(t)$ tiene la forma $\sigma \hat{\mathbf{n}}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario exterior sobre $\partial V(t)$, y $\sigma = \sigma(\mathbf{R}, t)$, el *tensor de esfuerzos de Cauchy*, es una matriz $d \times d$ definida sobre $U(t)$. Bajo las suposiciones mencionadas, el postulado de balance de momento se escribe como

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \sigma \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{f} : U(t) \rightarrow \mathbb{R}^d$ representa la densidad de fuerza volumétrica total por unidad de masa y $\sigma : U(t) \rightarrow \mathbf{M}^d$ es el tensor de Cauchy (\mathbf{M}^d es el conjunto de las matrices $d \times d$ reales).

Dado el postulado de balance de momento, la descripción matemática de diferentes tipos de materiales depende de la forma del tensor de esfuerzos que se elija.

1.1.3. El Fluido Ideal

El modelo del fluido ideal hace las siguientes hipótesis:

- La densidad $\rho(X, 0) = \rho$ es constante en $U(0)$.
- El tensor de esfuerzos tiene la forma $\sigma(\mathbf{R}, t) = -p(\mathbf{R}, t)\mathbb{I}$, $\forall \mathbf{R} \in U(t)$, $t \in [0, T]$; \mathbb{I} es la matriz identidad $d \times d$. La familia de funciones $p(\cdot, t) : U(t) \rightarrow \mathbb{R}$ representa a la *presión* en el fluido.

De la hipótesis de incompresibilidad, utilizando (1.4), se puede deducir que el campo de velocidades es no divergente, de modo que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en todo } U(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.6)$$

A su vez, bajo la hipótesis hecha sobre el tensor de esfuerzos, aplicando el Teorema de Reynolds a la ley de conservación del momento se obtiene la *ecuación de Euler*

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f} \quad (1.7)$$

La *frontera* del fluido a un tiempo t está dada por el conjunto $\partial U(t)$; ésta se divide en frontera rígida y superficie libre. La *frontera rígida* de un fluido se puede pensar como una pared rígida sobre la que las partículas sólo se pueden mover tangencialmente; matemáticamente, es el máximo subconjunto ∂U_R de $\partial U(0)$ que satisface $\mathbf{r}(\partial U_R, t) = \partial U_R$, $\forall t \in [0, T]$, permaneciendo inmóvil. La velocidad de las partículas sobre la frontera rígida satisface, por la definición de \mathbf{r} (ver [2]), para todo tiempo $t \in [0, T]$, la condición

$$\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } \partial U_R \quad (1.8)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal unitario sobre ∂U_R , de modo que \mathbf{u} es tangencial a la superficie.

Por otra parte, la *superficie libre* del fluido está dada por el conjunto $\partial U(t)_L = \partial U(t) \setminus \mathbf{r}(\partial U_R, t)$; es decir, la parte de la frontera que puede moverse. Dicha superficie se puede describir a través de una función implícita. Sea Γ una función definida en una vecindad de $\partial U(t)_L \times [0, T] \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, tal que $\partial U(0)_L$ coincide con el conjunto de puntos que satisface $\Gamma(X, 0) = 0$. Entonces, por la definición de \mathbf{r} , las partículas en la superficie $\partial U(t)_L$ permanecen en la superficie y Γ debe satisfacer

$$\frac{d}{dt} \Gamma(\mathbf{r}(X, t), t) = 0, \quad \forall X \in \partial U(0)_L, t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

El problema de valor inicial para el fluido ideal consiste en encontrar $U(t)$, y \mathbf{u} en $U(t)$, $t \in [0, T]$, dadas las condiciones iniciales para la superficie libre $\partial U(0)_L$ y la velocidad $\mathbf{u}(X, 0) = \mathbf{u}_0(X)$, $X \in U(0)$ (satisfiriendo el campo de velocidades en $U(0)$ la condición $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$), a partir de la ecuación de Euler (1.7) y la condición (1.6) de no divergencia para \mathbf{u} .

1.1.4. Flujo Potencial

Un flujo potencial es aquél en que el campo de velocidades satisface en cualquier tiempo $t \in [0, T]$ la condición

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi. \quad (1.10)$$

La relación anterior indica que el flujo es irrotacional. De hecho, el Teorema de Kelvin (véase [3]) afirma que si inicialmente $\nabla \times \mathbf{u}(X, 0) = 0$ en toda posición X del dominio $U(0)$, entonces en todo tiempo $t \in [0, T]$ posterior se cumple $\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{R}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{R} \in U(t)$, y por lo tanto se satisface (1.10). La función $\varphi(\mathbf{R}, t)$ se llama *potencial hidrodinámico* o también *potencial de flujo*.

Al añadir a la condición (1.6) de no-divergencia la relación (1.10), se deduce que el potencial de flujo satisface la Ecuación de Laplace:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi \quad \text{en } U(t).$$

En el caso de un flujo potencial, la condición (1.8) para la frontera rígida toma la forma de una condición de Neumann sobre φ :

$$0 = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{\mathbf{n}}} \quad \text{en } \partial U_R. \quad (1.11)$$

De forma que, en el caso particular en que el dominio D del fluido es fijo (toda su frontera ∂D es rígida), para encontrar el flujo potencial correspondiente basta con resolver la Ecuación de Laplace para φ en D , con la condición de Neumann (1.11) sobre ∂D . En este caso, la solución a φ no depende del tiempo, teniéndose una solución estacionaria $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ para el campo de velocidades en D (se puede checar que la \mathbf{u} correspondiente satisface la ecuación de Euler estática). Si el dominio no es fijo, como en el caso de las ondas sobre la superficie del agua, el potencial φ en general dependerá del tiempo.

La ecuación de Euler se puede simplificar para un flujo potencial en el que la densidad ρ es constante y la densidad de fuerza volumétrica por unidad de masa es un campo conservativo ($\mathbf{f} = -\nabla\mathcal{U}$); si se integra, se obtiene la *ecuación de Bernoulli*

$$\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 + \mathcal{U} + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (1.12)$$

El modelo básico de flujo potencial de superficie libre fue usado por varios autores en el S. XIX, como Poisson, Airy, Rayleigh, Stokes, Boussinesq, Korteweg y de Vries; al respecto se puede consultar [4].

1.2. Ecuaciones Básicas de Ondas sobre la Superficie Libre

Nos interesan los flujos potenciales con superficie libre, sobre la que se dan las ondas en agua. A partir de ahora, supondremos que nuestro fluido es bidimensional ($d = 2$); es decir, el flujo es simétrico sobre una dirección espacial horizontal, por lo que no se requiere considerar tal dirección. Para indicar la posición de cualquier punto en \mathbb{R}^2 se darán sus coordenadas cartesianas: $\mathbf{r} = (x, y)$. De este modo, si $(x(t), y(t))$ es la posición de un punto en la superficie libre, la relación (1.9) que indica que siempre permanece en la superficie libre toma la expresión

$$0 = \frac{d}{dt}\Gamma(x(t), y(t), t) = \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\Gamma}{\partial y}\dot{y} \quad \text{en } \Gamma(x, y) = 0 \quad (1.13)$$

La velocidad de las partículas del fluido es $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (\dot{x}, \dot{y})$, siendo lagrangiana o euleriana de acuerdo a las mismas consideraciones de la Sección 1.1.1.

Supondremos también que la forma de la superficie libre está dada por la gráfica de la función $\eta(x, t) \quad \forall t$, que llamaremos *forma funcional de la superficie libre* o bien *elevación de la superficie*; ésta indica la elevación

de la superficie libre respecto al nivel del agua en reposo sobre la posición horizontal x a un tiempo t . Se tomará el nivel en reposo del agua como $y = 0$. Entonces, la función implícita Γ que describe a la superficie libre del fluido satisface la relación

$$0 = \Gamma(x, y, t) = y - \eta(x, t) \quad (1.14)$$

A su vez, la frontera rígida, que indicará la posición vertical de los puntos en el fondo del agua, estará dada por una función $-h(x)$. De forma que el dominio ocupado por el fluido, que a partir de ahora llamaremos D (y que naturalmente varía en el tiempo), se describe matemáticamente como

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in [-h(x), \eta(x, t)] \}. \quad (1.15)$$

Al usar en la ecuación (1.13) la forma funcional de la superficie libre, recordando que se tiene un flujo potencial, dicha relación toma la forma

$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0 \quad \text{en } y = \eta(x, t)$$

En ocasiones nos referiremos a esta relación como la *condición cinemática* sobre la superficie libre, ya que es una condición de movimiento para los puntos sobre la superficie libre.

Por otra parte, para el caso de ondas en agua sobre la superficie libre en un flujo potencial, supondremos que la única fuerza volumétrica que actúa sobre el fluido es la de atracción gravitacional de la Tierra, descrita por el campo constante $\mathbf{f} = -g\hat{\mathbf{e}}_z = -\nabla(gz)$. Por otra parte, supondremos que la presión en la superficie libre es constante: $p_0 = 0$, de modo que la ecuación de Bernoulli 1.12 en la superficie libre toma la forma

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0 \quad \text{en } y = \eta(x, t)$$

Ésta es la *condición dinámica* sobre la superficie libre.

En conclusión, el problema de las ondas sobre la superficie libre de un flujo potencial ideal está planteado matemáticamente por las siguientes ecuaciones:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{en } D \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } y = -h(x) \quad (1.17)$$

$$\eta_t + \eta_x \varphi_x - \varphi_y = 0 \quad \text{en } y = \eta(x, t) \quad (1.18)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta = 0 \quad \text{en } y = \eta(x, t). \quad (1.19)$$

El problema arriba planteado constituirá nuestro modelo de ondas de agua. Nos referiremos a las condiciones cinemática (1.18) y (1.19) sobre la superficie libre como las *Ecuaciones Básicas* de ondas en agua.

1.3. Ecuaciones Básicas en términos de las Variables de Superficie y el Operador Dirichlet-Neumann

Nos interesa resolver el problema de valor inicial para las ondas en agua: dados $\eta(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$, y $\varphi(x, y, 0)$ para $x \in \mathbb{R}$, $-h(x) \leq y \leq \eta(x, 0)$, queremos encontrar $\eta(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ y $\varphi(x, y, t)$ para $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-h(x), \eta(x, t)]$, $t \geq 0$ que satisfagan (1.16)-(1.19). Respecto a este problema, debe notarse que, en cada tiempo t , el dominio D está definido por la forma funcional de la superficie libre $\eta(x, t)$. De este modo, si a un tiempo t están dados tanto $\eta(x, t)$ como φ sobre $\eta(x, t)$, el potencial φ en todo el dominio D al tiempo t queda determinado unívocamente al resolverse la Ecuación de Laplace para φ en D tomando como condición de Dirichlet el potencial en la superficie libre y como condición de Neumann la relación (1.17).

¹ Es también importante notar que las ecuaciones (1.18) y (1.19) para η_t y φ_t a un tiempo t involucran sólo a η , η_x , φ y $\nabla\varphi$ sobre la superficie, que a su vez está determinado por η y φ en la superficie libre al tiempo t , de acuerdo a la observación anterior. Por lo tanto, se puede esperar que la evolución del sistema esté determinada únicamente por la evolución de $\eta(x, t)$ y $\varphi(x, \eta(x, t), t)$. En esta sección introduciremos al Operador Dirichlet-Neumann, y lo usaremos para expresar a las Ecuaciones Básicas de ondas en agua (1.18) y (1.19) como ecuaciones de evolución de la forma funcional de la superficie libre $\eta(x, t)$ y el potencial evaluado sobre ella, $\Phi(x, t) = \varphi(x, \eta(x, t), t)$, dos funciones de una sola variable espacial x a las que nos referiremos como *variables de superficie*.

1.3.1. El Operador Dirichlet-Neumann

Definimos matemáticamente al Operador Dirichlet-Neumann de la siguiente forma:

Definición 1 (Operador Dirichlet-Neumann $G(\eta)$) Sea el dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, -h(x) \leq y \leq \eta(x)\}$, cuya frontera $\partial D = (\partial D)_1 \cup (\partial D)_2$ es la unión de la superficie $(\partial D)_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = \eta(x)\}$ y el fondo $(\partial D)_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y = -h(x)\}$. Sea $\hat{\mathbf{n}}$ la normal unitaria exterior definida en ∂D . Sea $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ la solución a

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0 \quad \text{en } D \\ \varphi &= \Phi \quad \text{en } (\partial D)_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} &= 0 \quad \text{en } (\partial D)_2 \end{aligned}$$

Entonces el Operador Dirichlet-Neumann $G(\eta)$ se define como

$$G(\eta)\Phi = (1 + \eta_x^2)^{1/2} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right|_{y=\eta(x)} \quad (1.20)$$

De esta forma, el operador Dirichlet-Neumann transforma la condición de Dirichlet sobre $(\partial D)_1$ en una función relacionada con la derivada normal sobre dicha frontera. Cabe mencionar que en la definición se ha supuesto que $(\partial D)_1$, $(\partial D)_2$ son lo suficientemente diferenciables como para que $\hat{\mathbf{n}}$ esté definida en la frontera, que η , Φ son tales que φ existe y es única, y que $\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{n}}}$ existe en todo ∂D . Los aspectos sobre la existencia rigurosa de la solución φ se siguen de la teoría básica de la Ecuación de Laplace y no serán tratados aquí (véase [5]).

Aunque se ha definido el operador $G(\eta)$, no se ha dado una fórmula explícita para él. En el Capítulo 3 se desarrollará una teoría que nos dará la fórmula explícita de aproximaciones a $G(\eta)$, para funciones η suficientemente cerca de $\eta \equiv 0$

1.3.2. Ecuaciones Básicas en términos de η y Φ

A continuación demostraremos la siguiente proposición:

Proposición 2 Las Ecuaciones Básicas (1.18)-(1.19) son equivalentes a las siguientes ecuaciones de evolución para η y Φ :

$$\eta_t = G(\eta)\Phi \quad (1.21)$$

$$\Phi_t = -\frac{1}{2(1 + \eta_x^2)} [\Phi_x^2 - (G(\eta)\Phi)^2 + 2\eta_x \Phi_x G(\eta)\Phi] - g\eta \quad (1.22)$$

¹La influencia inmediata del estado de la superficie libre sobre todo el dominio D en nuestro modelo debe entenderse como una consecuencia de la hipótesis de incompresibilidad.

Demostración.

Consideremos primero la condición cinemática (1.18). Si despejamos η_t de (1.18), dicha relación toma la forma

$$\eta_t = \varphi_y - \eta_x \varphi_x = \vec{n} \cdot \nabla \varphi \quad \text{en } y = \eta \quad (1.23)$$

$$\text{con } \vec{n} = (-\eta_x, 1) = \nabla \Gamma \quad (1.24)$$

Dado que \vec{n} es el gradiente de la función $\Gamma(x, y, t)$, este vector es una normal exterior a la superficie libre. El vector normal exterior unitario \hat{n} correspondiente es

$$\hat{n} = \frac{(-\eta_x, 1)}{\|\vec{n}\|}$$

donde $\|\vec{n}\| = (\eta_x^2 + 1)^{1/2}$ (1.25)

De las relaciones anteriores se obtiene la igualdad deseada, ya que

$$\begin{aligned} \eta_t &= \varphi_y - \eta_x \varphi_x \\ &= \|\vec{n}\| \hat{n} \cdot \nabla \varphi \\ &= (\eta_x^2 + 1)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \\ &= G(\eta) \Phi \end{aligned} \quad (1.26)$$

En cuanto a la Condición Dinámica (1.19), para expresarla en términos de las variables de superficie debemos transformar sus términos de acuerdo a la regla de la cadena, pasando así de la función potencial sobre todo el dominio, φ , al potencial valuado en la superficie libre, Φ . Para empezar, recordemos que Φ depende de φ de la siguiente manera:

$$\Phi(x, t) = \varphi(x, y, t)|_{y=\eta(x, t)} \quad (1.27)$$

Por lo tanto, las derivadas parciales de Φ satisfacen (en nuestro desarrollo sobreentenderemos que las parciales de φ están evaluadas sobre la superficie libre):

$$\Phi_x = \varphi_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \varphi_x + \varphi_y \eta_x \quad (1.28)$$

$$\Phi_t = \varphi_t + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_t + \varphi_y \eta_t \quad (1.29)$$

Ahora expresaremos a φ_y en términos de las variables de superficie. Considérense las siguientes igualdades:

$$\varphi_y(1 + \eta_x^2) = \varphi_y(1 + \eta_x^2) + \eta_x \varphi_x - \eta_x \varphi_x = (\varphi_y - \eta_x \varphi_x) + \eta_x(\varphi_y \eta_x + \varphi_x) \quad (1.30)$$

Al primer sumando del renglón inferior lo reconocemos como $G(\eta)$, por (1.26); en el segundo aparece Φ_x , de acuerdo a (1.28). De este modo

$$\varphi_y(1 + \eta_x^2) = G(\eta) + \eta_x \Phi_x \quad (1.31)$$

Las relaciones obtenidas son suficientes para reexpresar la Condición Dinámica (1.19) en términos de η y Φ . Aplicando (1.31) y (1.21) en (1.29):

$$\varphi_t = \Phi_t - \varphi_y \eta_t = \Phi_t - \frac{G(\eta)\Phi + \eta_x \Phi_x}{1 + \eta_x^2} G(\eta)\Phi \quad (1.32)$$

Sustituyamos la ecuación anterior en la Condición Dinámica (1.19):

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta \\
&= \Phi_t - \frac{G(\eta)\Phi + \eta_x\Phi_x}{1 + \eta_x^2}G(\eta)\Phi + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + g\eta \\
&= \Phi_t + \frac{1}{2(1 + \eta_x^2)} [(1 + \eta_x^2)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - 2(G(\eta)\Phi + \eta_x\Phi_x)G(\eta)\Phi] + g\eta
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Para eliminar el término $(\nabla\varphi)^2$, usaremos la siguiente relación, recordando (1.26) para $G(\eta)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_x^2 &= \\
&= (\varphi_x + \eta_x\varphi_y)^2 \\
&= \varphi_x^2 + 2\eta_x\varphi_x\varphi_y + (\eta_x\varphi_y)^2 \\
&= \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + (\eta_x\varphi_x)^2 + (\eta_x\varphi_y)^2 - (\varphi_y^2 + (\eta_x\varphi_x)^2 - 2\eta_x\varphi_x\varphi_y) \\
&= (1 + \eta_x^2)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - (\varphi_y - \eta_x\varphi_x)^2 \\
&= (1 + \eta_x^2)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - (G(\eta)\Phi)^2
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Sustituyendo en (1.33) la relación obtenida, se deduce la segunda igualdad buscada:

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi_t + \frac{(1 + \eta_x^2)(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) - (G(\eta)\Phi)^2 - (G(\eta)\Phi)^2 + 2\eta_x\Phi_xG(\eta)\Phi}{2(1 + \eta_x^2)} + g\eta \\
\therefore 0 &= \Phi_t + \frac{1}{2(1 + \eta_x^2)} [\Phi_x^2 - (G(\eta)\Phi)^2 + 2\eta_x\Phi_xG(\eta)\Phi] + g\eta
\end{aligned}$$

■

La reformulación de las Ecuaciones Básicas en términos de η y Φ aparece por primera vez en el trabajo de Zakharov [11], del que se hablará en el siguiente capítulo; nosotros desarrollamos los cálculos indicados por Craig y Sulem en [12].

Capítulo 2

El problema de ondas en agua como un sistema hamiltoniano

En este capítulo veremos que las ecuaciones de ondas en agua son un sistema Hamiltoniano. La estructura hamiltoniana, definida más adelante, es de gran utilidad por diversas razones; en este trabajo se utilizará principalmente para simplificar, en combinación con el material del Capítulo 3 del Operador Dirichlet-Neumann, el sistema de ecuaciones (1.16)-(1.19) de nuestro modelo de ondas en agua sobre un flujo potencial ideal.

2.1. Introducción al formalismo Hamiltoniano de Sistemas Continuos

2.1.1. Ecuaciones de Hamilton en sistemas de dimensión finita

A continuación definimos formalmente las Ecuaciones Canónicas de Hamilton para un sistema que puede ser descrito por un número finito de variables de estado.

Definición 2 (Ecuaciones Canónicas de Hamilton) *Supongamos que los estados de un cierto sistema se pueden describir mediante la coordenada generalizada $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y el momento generalizado $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in \mathbb{R}^n$; estas variables serán llamadas variables canónicas generalizadas. Sea $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, y sean $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right)^T$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)^T$. Si la evolución del sistema está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.2)$$

se dice entonces que el sistema anterior es hamiltoniano. Las ecuaciones de este sistema se conocen como Ecuaciones Canónicas de Hamilton; a la función H se le llama el Hamiltoniano del sistema.

Varias ecuaciones de la Física tienen una estructura hamiltoniana; es decir, pueden ser escritas en la forma (2.1)-(2.2).

Ejemplo 1 *La 2ª Ley de Newton para una partícula de masa m bajo un potencial $V(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dependiente del tiempo: $m\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla V(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.*

Desarrollo. Este sistema es equivalente al sistema de primer orden para una partícula de masa m bajo un potencial $V(\mathbf{x}, t)$ dependiente del tiempo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{v} \\ m\dot{\mathbf{v}} &= -\nabla V(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

Definiendo $\mathbf{q} = \mathbf{x}$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, vemos que el sistema original tiene una estructura hamiltoniana; en este caso, el hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + V(\mathbf{q}, t).$$

■

En la física teórica es muy común modelar un determinado sistema físico especificando las variables físicas a tomar como variables canónicas \mathbf{q} y \mathbf{p} , definiendo después un hamiltoniano H , y finalmente postulando que las ecuaciones de evolución son las del sistema (2.1)-(2.2). En otros casos, como en el ejemplo mostrado, las ecuaciones dinámicas se determinan por otros argumentos, y es de interés saber si el sistema tiene una estructura hamiltoniana. Como comentario, mencionamos que existen definiciones más generales de un sistema hamiltoniano, que permiten definirlos en variedades y no sólo en el espacio euclidiano; un ejemplo de esto es el caso del cuerpo rígido (véase [6]).

La utilidad de esta estructura es que tiene varias implicaciones sobre el sistema, dando muchas herramientas para su estudio. Por ejemplo, una consecuencia básica de que un sistema tenga estructura hamiltoniana, bajo cierta hipótesis, es la siguiente:

Proposición 3 (Independencia del tiempo del Hamiltoniano) *Sea un sistema hamiltoniano tal que $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$; es decir, H no depende explícitamente del tiempo. Si $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ es una solución del sistema (2.1)-(2.2), entonces $\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = 0 \quad \forall t$.*

Demostración. Usando las Ecuaciones Canónicas (2.1)-(2.2), vemos que:

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = 0 \quad (2.3)$$

■

En el caso donde H se interpreta como la energía del sistema, el resultado anterior muestra la *Conservación de la Energía* en el caso en que el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo.

2.1.2. Ecuaciones de Hamilton en Sistemas Continuos

La noción de Ecuaciones de Hamilton se puede extender a ecuaciones diferenciales parciales de evolución de sistemas continuos; estos sistemas tienen infinitos grados de libertad y típicamente su estado se describe mediante funciones. La herramienta matemática requerida para la formulación de las ecuaciones de Hamilton es el cálculo en espacios de funciones; de hecho, el espacio de funciones se puede interpretar como un espacio vectorial de dimensión infinita. En esta sección se desarrollará solamente la teoría elemental requerida para nuestro trabajo.

Definición 3 (Funcional) *Sea X un espacio vectorial. Un funcional f en X es una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

Los ejemplos básicos de espacios vectoriales X que nos interesan son conjuntos de funciones reales definidos en un dominio D , con las operaciones habituales de adición de funciones y de multiplicación de una función por una constante. A este tipo de espacios X les llamaremos *espacios lineales de funciones*. Veamos algunos ejemplos de funcionales en espacios lineales de funciones.

Ejemplo 2 Sea $X = C^1([-1, 1])$, el espacio de las funciones reales de primera derivada continua en el intervalo $[-1, 1]$. Definimos F_1, F_2 como

$$F_1(u) = \int_{-1}^1 u^2(x) dx$$

$$F_2(u) = \int_{-1}^1 u'(x) dx$$

Como cualquier función $u \in X$ es continua y su derivada también, las integrales de arriba se pueden efectuar y así F_1 y F_2 son funcionales bien definidos en X .

El espacio X sobre el que se define un funcional puede ser también el producto cartesiano de dos espacios: $X = X_1 \times X_2$, con X_1, X_2 espacios lineales de funciones definidas en D_1, D_2 , respectivamente. De esta forma, el concepto de funcional nos permite definir el Hamiltoniano $H : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{q} \in X_1$, $\mathbf{p} \in X_2$ como un funcional en el caso en que las variables canónicas son funciones sobre cierto dominio, comúnmente denominadas *campos*.

Para definir una noción de gradiente de H respecto a \mathbf{q} y \mathbf{p} como en la Definición 2 de las Ecuaciones de Hamilton en sistemas finitos, recordemos que para una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable vale la igualdad

$$f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} + o(\Delta \mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Se quiere generalizar (2.4) para encontrar así una derivada de funcionales. Dado un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, busquemos $A_u : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional *lineal* que satisfaga

$$F(u + \epsilon v) = F(u) + \epsilon A_u(v) + o(\epsilon) \quad \forall v \in X.$$

En general, A_u dependerá de u ; es decir, en cada elemento u del espacio X el funcional lineal A_u puede ser distinto. Este funcional es la *derivada direccional* o *derivada de Gateaux*, y es definido formalmente a continuación.

Definición 4 (Derivada Direccional) Una derivada direccional formal de un funcional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal $A_u : X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfice

$$A_u(v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(u + \epsilon v) - F(u)}{\epsilon} \quad \forall v \in X. \quad (2.5)$$

En el caso en que A_u es único, usaremos la notación $[F'(u)]v = A_u(v)$.

Mostramos un ejemplo de cómo calcular la derivada direccional.

Ejemplo 3 Sea $F = \int_{-1}^1 u^2(x) dx$, con $u \in X = C_1([-1, 1], \mathbb{R})$, por lo que $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional. Dado que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-1}^1 (u + \epsilon v)^2 dx - \int_{-1}^1 u^2 dx}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{-1}^1 (2\epsilon uv + (\epsilon v)^2) dx}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 (2uv dx + O(\epsilon)) \\ &= \int_{-1}^1 2uv dx \end{aligned}$$

entonces $[F'(u)]v = \int_{-1}^1 2uv dx$.

Finalmente definiremos la *derivada variacional* (también llamada *derivada funcional*) buscada a partir de la derivada direccional.

Definición 5 (Derivada Variacional) Sean un espacio lineal X de funciones $u : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $g : X \rightarrow X$. Sea F un funcional en X de la forma $F(u) = \int_D (g(u))(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Una derivada variacional formal de F es una función $\frac{\delta F}{\delta u}(u) : X \rightarrow X$ que satisface

$$\int_D \left[\frac{\delta F}{\delta u} \right] v d\mathbf{x} = [F'(u)]v \quad \forall u, v \in X. \quad (2.6)$$

La notación usada en (2.6) presupone que la derivada variacional es única.

Las versiones rigurosas de las definiciones para las derivadas direccional y variacional usan conceptos de análisis funcional que no serán utilizados en este trabajo. De cualquier forma, nuestras definiciones formales corresponden al uso común de los conceptos de las derivadas direccional y variacional en la Física Teórica (véase [6]); es así que la teoría desarrollada hasta el momento en esta sección nos permite extender formalmente la noción de una estructura hamiltoniana a sistemas con infinitos grados de libertad. El Hamiltoniano de un sistema será un funcional de la forma:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int_D \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

con $(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)) \in X \times X$, X un espacio lineal de funciones de $D \times [0, T]$ a \mathbb{R} , con $D \subseteq \mathbb{R}^d$, y la *densidad hamiltoniana* $\mathcal{H} : X \times X \rightarrow X$. Si se fija alguna de las variables canónicas, por ejemplo \mathbf{p} , se tiene que $\mathcal{H}|_{X \times \{\mathbf{p}\}} : X \rightarrow X$ y $H|_{X \times \{\mathbf{p}\}} : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se definen entonces las derivadas variacionales del Hamiltoniano a continuación.

Definición 6 (Derivadas Variacionales del Hamiltoniano) Definimos a $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{q}}$ como la derivada variacional de $H|_{X \times \{\mathbf{p}\}}$ respecto a la variable \mathbf{q} . A su vez, se define a $\frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}}$ como la derivada variacional de $H|_{\{\mathbf{q}\} \times X}$ respecto a \mathbf{p} .

Las ecuaciones de Hamilton en un medio continuo son:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \mathbf{q}} \quad (2.9)$$

La definición es análoga para el caso en que el hamiltoniano $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ depende del tiempo. Se quieren encontrar las soluciones $(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}, t))$ del sistema (2.8)-(2.9). Las funciones $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$ son las derivadas parciales comunes y son elementos de X .

2.2. Formulación Hamiltoniana del problema de ondas en agua

Zakharov mostró por primera vez en [11] que las Ecuaciones Básicas para las ondas en agua podían reformularse como un sistema hamiltoniano en términos de las variables de superficie η y Φ , obteniendo las ecuaciones (1.21) y (1.22) a partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton. Concretamente, demostró la siguiente proposición:

Proposición 4 Las ecuaciones (1.21) y (1.22) para η_t y Φ_t son equivalentes al sistema hamiltoniano

$$\eta_t = \frac{\delta H}{\delta \Phi} \quad (2.10)$$

$$\Phi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta} \quad (2.11)$$

con el hamiltoniano H

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi G(\eta) \Phi + g\eta^2) dx. \quad (2.12)$$

La demostración puede ser consultada en [11]. Lo que será mostrado a continuación es que el Hamiltoniano propuesto por Zakharov corresponde, salvo por el factor constante ρ , a la energía cinética y potencial (gravitacional) del fluido (restandole la energía del fluido en reposo, una constante que no afecta a las ecuaciones de Hamilton).

2.2.1. La Energía del Fluido y el Hamiltoniano asociado al sistema

Definimos como E a la suma de las energías cinética K y potencial gravitacional U del fluido en el dominio D , que a partir de ahora supondremos que tiene profundidad constante:

$$E = K + U = \int_D \rho \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{r})|^2}{2} dV + \int_D \rho g y dV \quad (2.13)$$

Sabemos de la Sección 1.3.2 que las variables relevantes para describir la evolución del sistema son las variables de superficie libre. Se transformará entonces al Hamiltoniano de forma que quede en términos de η y Φ . Sean

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \eta(x, t)\} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad (2.15)$$

Consideremos primero la energía potencial total U :

$$U = \rho \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{-h}^{\eta(x,t)} g y dy dx = \rho \int_{\Gamma_0} \left(\frac{g y^2}{2} \Big|_{-h}^{\eta(x,t)} \right) dx,$$

por lo que

$$U = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} g \eta^2(x, t) dx - C_h, \quad \text{con} \quad (2.16)$$

$$C_h = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} g h^2 dx$$

de modo que C_h es constante. Ahora consideremos la energía cinética K :

$$K = \int_D \rho \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} dV = \frac{\rho}{2} \left[\int_D \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV + \int_D \varphi \nabla \cdot (\nabla \varphi) dV \right], \quad (2.17)$$

donde la segunda integral es cero, ya que $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = 0$, de forma que

$$K = \frac{\rho}{2} \int_D \nabla \cdot (\varphi \nabla \varphi) \, dV = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} [\varphi \nabla \varphi \cdot \hat{n}]_{\Gamma} \, dS = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} \Phi (\nabla \varphi \cdot \hat{n})|_{y=\eta} \, dS$$

Dado que las áreas de los elementos de superficie de Γ y Γ_0 se relacionan en la forma: $dS = \|\nabla \Gamma\| \, dS_0$, con $dS_0 = dx$, y recordando la definición del operador $G(\eta)$, se tiene que

$$K = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_0} \Phi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \Big|_{y=\eta} \|\nabla \Gamma\| \right) dx = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} \Phi G(\eta) \Phi \, dx \quad (2.18)$$

Por lo que la energía E está dada por la fórmula

$$E = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} (\Phi G(\eta) \Phi + g\eta^2) \, dx - C_h \quad (2.19)$$

De lo desarrollado hasta ahora vemos que la energía del fluido en reposo ($\eta = 0$, $K = 0$) es $E_o = -C_h$. Se observa también que el hamiltoniano H (2.12) propuesto por Zakharov es la diferencia de energía del fluido respecto al estado de reposo, dividida por un factor ρ correspondiente al valor constante de la densidad, es decir:

$$H = \frac{E - E_o}{\rho} = \frac{E + C_h}{\rho} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} (g\eta^2 + \Phi G(\eta) \Phi) \, dx$$

Por ser H un funcional, tiene asociada una densidad Hamiltoniana \mathcal{H} , quedando definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H} \, dx, \text{ con} \\ \mathcal{H}(\eta, \Phi) &= \frac{1}{2} (g\eta^2 + \Phi G(\eta) \Phi) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Vale la pena enfatizar que, al haber podido escribir la energía E del fluido en términos de las variables de superficie, y al estar definido el hamiltoniano H (2.12) de Zakharov con base en E , siendo posible derivar de H las ecuaciones de evolución del sistema a partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton (2.8)-(2.9) en sistemas continuos, queda una vez más de manifiesto que el comportamiento del sistema depende de las variables de superficie η y Φ . Cabe mencionar también que la región sobre la que se integra en E ahora es el dominio horizontal fijo Γ_0 .

Capítulo 3

El Operador Dirichlet-Neumann

3.1. Propiedades Básicas

Estudiemos algunas de las propiedades básicas del operador Dirichlet-Neumann $G(\eta)$ definido en el Capítulo 1. Recordemos que

$$G(\eta)\Phi = G(\eta) \left\{ \varphi|_{y=\eta(x,t)} \right\} = (1 + \eta_x^2)^{1/2} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} \Big|_{y=\eta(x,t)}$$

Para empezar, $G(\eta)$ es un operador no local; esto es, si bien opera sobre una función Φ definida sólo sobre Γ (la frontera libre del dominio D), la función que “entrega”, específicamente la derivada normal en Γ , necesita conocer el valor de φ en todo el dominio D ocupado por el fluido. Para obtener φ , se debe resolver la ecuación de Laplace para φ en todo D , cuya solución está determinada por la condición de frontera Φ sobre la frontera Γ definida por η . En conclusión, si bien basta con Φ para determinar el resultado de $G(\eta)\Phi$, con η fija, se requiere hacer un cálculo en todo el dominio D ; éste es el carácter no local de $G(\eta)$.

Observemos también que $G(\eta)$ es lineal en Φ . Esto se sigue de que la solución φ en el dominio D es lineal en Φ , y que las operaciones de tomar derivadas direccionales y evaluar en Γ son también lineales. Por otra parte, la dependencia de $G(\eta)$ en η en general no es lineal.

Por último, una propiedad de $G(\eta)$ muy importante es que, para una función η de valor absoluto suficientemente pequeño, $G(\eta)$ tiene una expansión en serie de potencias de η , lo cual será de gran utilidad al estudiar ondas de poca altura. Por su gran importancia, trataremos por separado esta propiedad en la siguiente sección.

3.2. Expansión de $G(\eta)$ en potencias de η

Para un dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, -h \leq y \leq \eta(x)\}$, Coifman y Meyer mostraron en [15] que para $\eta \in C^\infty$ existe una constante $c = O(h)$ tal que el operador $G(\eta)$ es una función analítica de η en la región $\|\eta\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\eta(x)| < c$, lo que significa que, para $\|\eta\|_\infty < c$, $G(\eta)$ se puede escribir como una serie convergente de operadores lineales $G_j(\eta)$

$$G(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\eta) \tag{3.1}$$

donde los $G_j(\eta)$ son homogéneos de grado j en η . El resultado puede ser generalizado para el caso de profundidad variable.

3.2.1. Deducción de las fórmulas para los términos $G_j(\eta)$

Para el caso de profundidad constante h , los términos G_j se pueden calcular explícitamente por una fórmula de recurrencia establecida por Craig y Sulem en [12]; extensiones al caso de profundidad variable están en [15].

Sean las funciones $\varphi_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}$

$$\varphi_p(x, y) = e^{ipx} \cosh(p(y+h)), \quad p \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Se puede comprobar que $\nabla^2 \varphi_p = 0$, $\forall p \in \mathbb{R}$. Además, se cumple que

$$\left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right|_{y=-h} = \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right|_{y=-h} = pe^{ipx} \sinh(p(y+h)) \Big|_{y=-h} = 0. \quad (3.3)$$

Sean las funciones $\Phi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$

$$\Phi_p(x) = \varphi_p(x, y) \Big|_{y=\eta(x)} = \varphi_p(x, \eta(x)) = e^{ipx} \cosh(p(\eta+h)) \quad (3.4)$$

Dichas funciones Φ_p son la evaluación de las funciones φ_p en la frontera libre, siendo estas últimas funciones armónicas que satisfacen la condición de frontera en el fondo. De la definición de $G(\eta)$, se debe cumplir que

$$G(\eta)\Phi_p = (1 + \eta_x^2)^{1/2} \left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right|_{y=\eta} = (\partial_y \varphi_p - \eta_x \partial_x \varphi_p) \Big|_{y=\eta},$$

es decir

$$G(\eta) \varphi_p \Big|_{y=\eta} = (\partial_y \varphi_p - \eta_x \partial_x \varphi_p) \Big|_{y=\eta}, \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

La idea es escribir ambos lados de (3.5) como una expansión en términos homogéneos de orden j en η , para igualar después términos de un mismo orden en η . Esto nos permitirá encontrar fórmulas explícitas para los $G_j(\eta)$.

Examinemos primero el miembro derecho de (3.5). Las expansiones de Taylor de $\cosh(p(\eta+h))$ y $\sinh(p(\eta+h))$ alrededor de ph son

$$\cosh(p(\eta+h)) = \sum_{\substack{j=0 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} \cosh(ph) + \sum_{\substack{j=1 \\ \text{non}}}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} \sinh(ph) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} I_j(ph) \quad (3.6)$$

$$\sinh(p(\eta+h)) = \sum_{\substack{j=0 \\ \text{par}}}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} \sinh(ph) + \sum_{\substack{j=1 \\ \text{non}}}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} \cosh(ph) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} I_{j+1}(ph) \quad (3.7)$$

con $I_j(ph)$ definido como

$$I_j(ph) = \begin{cases} \cosh(ph), & \text{si } j \text{ es par} \\ \sinh(ph), & \text{si } j \text{ es non} \end{cases} \quad (3.8)$$

De la definición de φ_p en (3.3) y de (3.6)-(3.8) tenemos que

$$\varphi_p \Big|_{y=\eta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} I_j(ph) e^{ipx} \quad (3.9)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial y} \right|_{y=\eta} = pe^{ipx} \sinh(p(\eta+h)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} I_{j+1}(ph) pe^{ipx} \quad (3.10)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_p}{\partial x} \right|_{y=\eta} = ipe^{ipx} \cosh(p(\eta+h)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(p\eta)^j}{j!} I_j(ph) ipe^{ipx} \quad (3.11)$$

Multiplicando (3.11) por η_x

$$\eta_x (\partial_x \varphi_p)_{y=\eta} = \sum_{j=0}^{\infty} i e^{ipx} p^{j+1} \eta^j \eta_x \frac{I_{j+2}}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} i e^{ipx} p^j (j \eta^{j-1} \eta_x) \frac{I_{j+1}}{j(j-1)!} \quad (3.12)$$

pues $I_j = I_{j+2}$.

Usando $(\eta^j)_x = j \eta^{j-1} \eta_x$ en (3.12), se obtiene

$$\eta_x (\partial_x \varphi_p)_{y=\eta} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^j (\eta^j)_x}{j!} I_{j+1} i e^{ipx}. \quad (3.13)$$

Entonces, de (3.10) y (3.13) el miembro derecho de (3.5) se puede expresar como una expansión en términos homogéneos de orden j en η , y también el miembro izquierdo de (3.5), de acuerdo a (3.9) y a la relación (3.1) demostrada por Coifman y Meyer en [15]. De estas dos últimas relaciones se obtiene que

$$G(\eta) \varphi_p|_{y=\eta} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^j G_n(\eta) \varphi_{pj-n} \right) \quad (3.14)$$

donde

$$\varphi_{pm} = \frac{(p\eta)^m}{m!} I_m(ph) e^{ipx}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Cada término $G_n(\eta) \varphi_{pj-n}$ es homogéneo de orden j en η . Igualando los términos del mismo orden en ambos miembros de (3.5), se obtiene que

$$\sum_{n=0}^j G_n(\eta) \varphi_{pj-n} = (\partial_y \varphi_p)_j - (\eta_x \partial_x \varphi_p)_j, \quad (3.16)$$

donde, de acuerdo a (3.10) y (3.13),

$$(\partial_y \varphi_p)_j = \frac{(p\eta)^j}{j!} I_{j+1}(ph) p e^{ipx}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (3.17)$$

$$(\eta_x \partial_x \varphi_p)_j = \frac{p^j (\eta^j)_x}{j!} I_{j+1} i e^{ipx}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

$$(\eta_x \partial_x \varphi_p)_0 = 0. \quad (3.19)$$

De (3.16) se deduce que

$$G_j(\eta) \varphi_{p0} = (\partial_y \varphi_p)_j - (\eta_x \partial_x \varphi_p)_j - \sum_{n=0}^{j-1} G_n(\eta) \varphi_{pj-n} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.15), (3.17) y (3.18) en (3.20) se obtiene

$$G_j(\eta) \cosh(ph) e^{ipx} = \frac{(p\eta)^j}{j!} I_{j+1} p e^{ipx} - \frac{p^j (\eta^j)_x}{j!} i e^{ipx} I_{j+1} - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{G_n(\eta) (p\eta)^{j-n}}{(j-n)!} I_{j-n} e^{ipx} \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Recordando que $I_0 = \cosh ph$, sea

$$Q_j(ph) = \frac{I_j(ph)}{I_0(ph)} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es par} \\ \tanh(ph), & \text{si } j \text{ es non} \end{cases} \quad (3.22)$$

Tenemos entonces de (3.21) que

$$G_j(\eta)e^{ipx} = \frac{Q_{j+1}(ph)}{j!} (\eta^j p^{j+1} e^{ipx} - i(\eta^j)_x p^j e^{ipx}) - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n} Q_{j-n}(ph)}{(j-n)!} p^{j-n} e^{ipx} \quad \forall p \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Ésta es la relación *recursiva* básica que nos da $G_j(\eta)$ en términos de $G_{j-1}(\eta), \dots, G_0(\eta)$. Además, (3.23) nos da la acción de G_j sobre cada función e^{ipx} , $p \in \mathbb{R}$. Será conveniente introducir los operadores D y $\tanh(hD)$, definidos a continuación.

Definición 7 (Operador D) Se define al operador D como:

$$D = -i \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

A partir de la definición de D se puede mostrar que

$$D^m e^{ipx} = p^m e^{ipx} \quad (3.24)$$

Definición 8 (Operador $\tanh(hD)$) El operador $\tanh(hD)$ se define formalmente por la relación

$$(\tanh(hD)) f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) \tanh(hp) e^{ipx} dp.$$

donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y \hat{f} es la transformada de Fourier de f .

De la definición de $\tanh(hD)$ se puede mostrar que dicho operador es lineal, que conmuta con D y que se cumple $\tanh(hD)e^{ipx} = \tanh(hp)e^{ipx}$, lo que se sigue de que $e^{ipx} = \int_{\mathbb{R}} \delta(k-p)e^{ikx} dk$, por lo que

$$\tanh(hD)e^{ipx} = \int_{\mathbb{R}} \tanh(hk)\delta(k-p)e^{ikx} dk = \tanh(hp)e^{ipx}. \quad (3.25)$$

Usando las definiciones y propiedades básicas de D y $\tanh(hD)$, de (3.22) y (3.23) se tiene que

$$G_j(\eta)e^{ipx} = \left(\frac{1}{j!} [\eta^j D^{j+1} \tanh(hD) - i(\eta^j)_x D^j \tanh(hD)] - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{non}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \tanh(hD) \right) e^{ipx}, \quad \text{si } j \text{ es par}; \quad (3.26)$$

$$G_j(\eta)e^{ipx} = \left(\frac{1}{j!} [\eta^j D^{j+1} - i(\eta^j)_x D^j] - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \tanh(hD) - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{non}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \right) e^{ipx}, \quad \text{si } j \text{ es non.} \quad (3.27)$$

Se puede comprobar de (3.26) y (3.27) que los operadores G_j son operadores lineales sobre las funciones e^{ipx} , $p \in \mathbb{R}$. Esto se puede mostrar a través de un argumento recursivo: de (3.26) se obtiene que $G_0 = D \tanh(hD)$, de modo que G_0 es lineal sobre las exponenciales; a su vez, de la fórmula (3.27) se ve que G_1 es una composición de operadores lineales y por lo tanto también es lineal sobre las exponenciales. Análogamente, observando las expresiones (3.26) y (3.27) se tiene que todo G_j , $j > 1$ es composición de operadores lineales y es entonces un operador lineal sobre las funciones e^{ipx} , $p \in \mathbb{R}$. Aún más: bajo el mismo

argumento recursivo, se observa que $G_j(\eta)e^{ipx} = G_j(\eta, D)e^{ipx}$, $p \in \mathbb{R}$; es decir, la acción de los operadores G_j sobre las funciones exponenciales está dada por la composición de operadores lineales que involucran a η y D .

La linealidad de los operadores G_j no se restringe a las funciones exponenciales; todo G_j , $j = 0, 1, \dots$ es un operador lineal sobre cualquier función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto se puede comprobar al expresar f en su serie de Fourier en términos de las funciones e^{ipx} , $p \in \mathbb{R}$; al aplicar G_j , se obtiene

$$G_j(\eta)f(x) = G_j(\eta) \int_{p \in \mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx} dp \quad (3.28)$$

$$= \int_{p \in \mathbb{R}} \hat{f}(p) (G_j(\eta, D)e^{ipx}) dp \quad (3.29)$$

$$= G_j(\eta, D) \int_{p \in \mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx} dp \\ = G_j(\eta, D)f(x). \quad (3.30)$$

Entonces, de la igualdad (3.30) se obtiene que todo G_j actúa sobre una función arbitraria f como un operador lineal, resultado de la composición de operadores lineales que involucran a η y D . Las fórmulas explícitas de los operadores G_j para cualquier función f son las mismas que (3.26) y (3.27) para las funciones exponenciales. En conclusión, se ha obtenido que

$$G_j(\eta, D) = \frac{1}{j!} [\eta^j D^{j+1} \tanh(hD) - i(\eta^j)_x D^j \tanh(hD)] \\ - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{non}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \tanh(hD), \quad \text{si } j \text{ es par}; \quad (3.31)$$

$$G_j(\eta, D) = \frac{1}{j!} [\eta^j D^{j+1} - i(\eta^j)_x D^j] \\ - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{par}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \tanh(hD) - \sum_{\substack{n=0 \\ \text{non}}}^{j-1} \frac{G_n(\eta)\eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n}, \quad \text{si } j \text{ es non.} \quad (3.32)$$

3.2.2. Los primeros términos de la serie de $G(\eta)$

Ya que se han encontrado las relaciones de recurrencia (3.31) y (3.32), se mostrará cómo se pueden obtener, a partir de ellas, los términos de la serie de G en η , calculando a continuación sus primeros tres términos.

Término G_j de la serie de G en η No. 1 ($j = 0$) Haciendo uso de (3.31):

$$G_0(\eta) = \frac{1}{0!} (\eta^0 D^{0+1} \tanh(hD) - i\partial_x(\eta^0) \tanh(hD) D^0),$$

entonces

$$G_0(\eta) = D \tanh(hD). \quad (3.33)$$

Término G_j de la serie de G en η No. 2 ($j = 1$) Aplicando ahora (3.32):

$$\begin{aligned}
G_1(\eta) &= \frac{1}{1!} (\eta^1 D^{1+1} - i(\eta^1)_x D^1) \\
&= \eta D^2 + (-i\eta_x)D - G_0 \eta D \tanh(hD)
\end{aligned}$$

Recordando la definición de D , utilizando el cálculo (3.33) para G_0 y de la regla del producto $D(\eta D) = \eta D^2 + (D\eta)D$ se tiene que

$$\begin{aligned}
G_1(\eta) &= D(\eta D) - D \tanh(hD) \eta \tanh(hD) D \\
&= D(\eta - \tanh(hD) \eta \tanh(hD)) D.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Término G_j de la serie de G en η No. 3 ($j = 2$) Recordando (3.31):

$$\begin{aligned}
G_2(\eta) &= \frac{1}{2} (\eta^2 (D^2 \tanh(hD) D) + (D(\eta^2))(D \tanh(hD) D)) \\
&\quad - \frac{G_0 \eta^2 D^2}{2!} - \frac{G_1 \eta^1 \tanh(hD) D^1}{(1)!} \\
&= \frac{1}{2} [(\eta^2 (D^2 \tanh(hD) D)) + (D(\eta^2))(D \tanh(hD) D) \\
&\quad - D \tanh(hD) \eta^2 D^2 - 2D(\eta - \tanh(hD) \eta \tanh(hD)) D \eta \tanh(hD) D] \\
&= \frac{1}{2} [(\eta^2 D^2)(\tanh(hD) D) + ((D(\eta^2)) D)(\tanh(hD) D) \\
&\quad - D \tanh(hD) \eta^2 D D - D(2(\eta - \tanh(hD) \eta \tanh(hD)) D \eta \tanh(hD) D)] \\
&= \frac{1}{2} [(\eta^2 D^2 + (D(\eta^2)) D) (\tanh(hD) D) - D(2\eta D \eta \tanh(hD)) D \\
&\quad - D \tanh(hD) \eta^2 D D + D(2(\tanh(hD) \eta \tanh(hD)) D \eta \tanh(hD)) D] \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{[(\eta^2 D^2 + (D(\eta^2)) D) \tanh(hD) - 2D\eta D \eta \tanh(hD)]}_A D \\
&\quad - \frac{1}{2} \underbrace{D [\tanh(hD) \eta^2 D - 2 \tanh(hD) \eta D \tanh(hD) \eta \tanh(hD)]}_B D
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Podemos simplificar el término A , haciendo uso del desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned}
\eta^2 D^2 \tanh(hD) D + (D(\eta^2)) D \tanh(hD) D - 2D\eta D \eta \tanh(hD) D &= \\
D(\eta^2 D \tanh(hD) D) - 2D\eta D \eta \tanh(hD) D &= \\
D(\eta^2 D \tanh(hD) D) - 2\eta D \eta \tanh(hD) D &= \\
-D(2\eta D(\eta \tanh(hD) D) - \eta^2 D \tanh(hD) D) &= \\
-D(2\eta(D(\eta)) \tanh(hD) D + 2\eta\eta(D(\tanh(hD) D)) - \eta^2 D \tanh(hD) D) &= \\
-D(2\eta(D(\eta)) \tanh(hD) D + 2\eta^2(D \tanh(hD) D) - \eta^2 D \tanh(hD) D) &= \\
-D((D(\eta^2)) \tanh(hD) D + \eta^2(D \tanh(hD) D)) &= \\
&= -D(D(\eta^2 \tanh(hD) D)) \\
&= -D(D\eta^2 \tanh(hD)) D.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Introduciendo (3.36) en (3.35), la expresión para G_2 es:

$$G_2(\eta) = -\frac{1}{2}D [D\eta^2 \tanh(hD) + \tanh(hD)\eta^2 D - 2 \tanh(hD)\eta D \tanh(hD)\eta \tanh(hD)] D \quad (3.37)$$

El conocer los términos de la serie de $G(\eta)$ sirve para tener expresiones explícitas de ecuaciones que aproximen a las ecuaciones básicas para ondas en agua, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4 *La aproximación lineal al problema de ondas en agua*

Desarrollo.

La aproximación lineal al problema de ondas en agua se puede obtener de considerar solamente términos de primer orden en η y Φ en las ecuaciones básicas (1.21) y (1.22). Para la condición cinemática (1.21) se tiene que:

$$\eta_t = G(\eta)\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\eta)\Phi = G_0\Phi + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} G_j(\eta)\Phi}_{O(2)}$$

Por otra parte, se ve en la condición dinámica (1.22) que:

$$\begin{aligned} \Phi_t &= -g\eta - \frac{1}{2(1+\eta_x^2)} [\Phi_x^2 - (G(\eta)\Phi)^2 + 2\eta_x\Phi_x G(\eta)\Phi] \\ &= -g\eta - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\eta_x)^{2j} [\Phi_x^2 - (G(\eta)\Phi)^2 + 2\eta_x\Phi_x G(\eta)\Phi]}_{O(2)} \end{aligned}$$

En conclusión, a primer orden, las ecuaciones básicas son aproximadas por las relaciones:

$$\eta_t = G_0\Phi = D \tanh(hD)\Phi \quad (3.38)$$

$$\Phi_t = -g\eta \quad (3.39)$$

■

Capítulo 4

Teoría de ondas largas y solitones

En este capítulo presentamos la teoría de ondas largas y algunos aspectos de la teoría sobre ondas solitarias. La teoría de ondas largas es un procedimiento de expansión de las ecuaciones de ondas de agua (1.16)-(1.19) en dos pequeños parámetros adimensionales, α y β , que nos permite obtener ecuaciones aproximadas más sencillas. Los parámetros adimensionales mencionados se definen como $\alpha = \frac{a}{h}$ y $\beta = \frac{h^2}{L^2}$, donde a es un valor característico de la amplitud de onda, h es la profundidad del agua, y L es una extensión horizontal típica L de la onda. Esta teoría fue originalmente motivada por la observación de ondas solitarias por J. Scott Russell en 1834. Éstas son ondas exponencialmente localizadas que se propagan con velocidad constante por largas distancias sin cambiar su forma. Las primeras teorías que lograron explicar la existencia de estas ondas fueron propuestas por Boussinesq, Korteweg y de Vries a fines del S. XIX. Estos autores propusieron una expansión de las ecuaciones de flujo potencial (1.16)-(1.19) en términos de los parámetros α , β ; la consideración de un régimen de α , β pequeños es consistente con las observaciones de Russell, y las hoy llamadas ecuaciones de Boussinesq y Korteweg-de Vries (KdV) corresponden a aproximaciones de primer orden en α , β de las ecuaciones (1.16)-(1.19). Además, estas ecuaciones poseen soluciones exactas localizadas de tipo onda viajera con las características de las ondas solitarias observadas por Russell.

La teoría de ondas largas que presentamos es una extensión de las ideas de Boussinesq, Korteweg y de Vries, en donde la aproximación de las ecuaciones (1.16)-(1.19) se realiza sistemáticamente. Una idea más reciente, incorporada en este trabajo, es el análisis del operador Dirichlet-Neumann. Esencialmente, la aproximación de las ecuaciones surge de aproximar el operador Dirichlet-Neumann por operadores diferenciales y de multiplicación. Aunada a la anterior, otra idea útil es aproximar el Hamiltoniano (2.12) para las ondas en agua, y obtener ecuaciones de evolución aproximadas a partir de las ecuaciones de Hamilton asociadas al Hamiltoniano aproximado (ver [13]).

Además de explicar las observaciones de ondas solitarias por Russell, las ecuaciones de Boussinesq, KdV y otros modelos de mayor orden en α y β obtenidos de la teoría de ondas largas sirven para estudiar fenómenos más generales, como la interacción de ondas solitarias a través de la teoría de solitones, y la evolución de la superficie libre a partir de condiciones iniciales arbitrarias. La razón principal del estudio de estos modelos, en términos generales, es que son más tratables teóricamente que el sistema (1.16)-(1.19) sin simplificar.

Siguiendo esta idea, el primer paso para entender teóricamente los resultados de nuestros estudios experimentales sobre la interacción de dos ondas solitarias en agua, que serán comentados en el Capítulo 5, será compararlos con la solución exacta de dos solitones de la ecuación KdV, que será presentada en este capítulo.

4.1. Ecuaciones de ondas en agua en variables adimensionales

El primer paso en la teoría de ondas largas es escribir las ecuaciones de ondas en agua (en este caso las ecuaciones de Hamilton (2.10)-(2.11)) en forma adimensional. Definimos los parámetros adimensionales

$$\mu = \frac{h}{L}, \quad \beta = \mu^2, \quad \alpha = \frac{a}{h} \quad (4.1)$$

donde h es la profundidad del agua, L es la escala horizontal típica, a es un valor característico de la amplitud de las ondas, $c_o = \sqrt{gh}$ y $T = \frac{L}{c_o}$. Se verá más adelante que c_o es la velocidad de las ondas lineales en el límite de ondas largas $\beta \rightarrow 0$, siendo entonces T un tiempo característico en la propagación de ondas largas. Se definen así a las variables adimensionales x^* , y^* , t^* , η^* , Φ^* , y al operador P como

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad t^* = \frac{t}{T}, \quad (4.2)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{a} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\eta}{h} \right), \quad \Phi^* = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\Phi}{c_o L} \right), \quad P = -i \frac{\partial}{\partial x^*} \quad (4.3)$$

4.1.1. Expansión del operador Dirichlet-Neumann

Empezamos con la expansión del operador Dirichlet-Neumann en términos de los parámetros α , μ , β . Del Capítulo 3 tenemos que

$$G(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\eta, D),$$

con

$$G_0 = D \tanh(hD), \quad (4.4)$$

$$G_j(\eta, D) = \frac{1}{j!} \left[\eta^j D^{j+1} \widehat{Q}_{j+1}(hD) - i(\eta^j)_x D^j \widehat{Q}_{j+1}(hD) \right] - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{G_n(\eta, D) \eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \widehat{Q}_{j-n}(hD), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{donde} \quad (4.5)$$

$$\widehat{Q}_j(hD) = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es par} \\ \tanh(hD), & \text{si } j \text{ es non.} \end{cases} \quad (4.6)$$

De (4.5) y la regla del producto tenemos que

$$G_j(\eta, D) = \frac{1}{j!} D (\eta^j D^j) (\widehat{Q}_{j+1}(hD)) - \sum_{n=0}^{j-1} \frac{G_n(\eta, D) \eta^{j-n}}{(j-n)!} D^{j-n} \widehat{Q}_{j-n}(hD), \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Hemos usado la notación $G_j(\eta, D) = G_j(\eta)$, que hace explícita la aparición del operador D en G_j . Introduciendo las variables adimensionales de (4.3) en (4.4), (4.5) obtenemos

$$G_0(\alpha\eta^*, \mu P) = L^{-1} P \tanh(\mu P), \quad (4.8)$$

$$G_j(\alpha\eta^*, \mu P) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{j!} \mu P \left((\alpha\eta^*)^j (\mu P)^j \right) \left(\widehat{Q}_{j+1}(\mu P) \right) \right] \\ - \sum_{n=0}^{j-1} G_n(\alpha\eta^*, \mu P) \frac{(\alpha\eta^*)^{j-n} (\mu P)^{j-n} \widehat{Q}_{j-n}(\mu P)}{(j-n)!}, j = 1, 2, \dots, \quad \text{donde} \quad (4.9)$$

$$\widehat{Q}_j(\mu P) = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es par,} \\ \tanh(\mu P), & \text{si } j \text{ es non.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Vemos que ambos parámetros α , μ aparecen en los términos G_j .

Sea \mathcal{G} definido por

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\alpha\eta^*, \mu P) = \frac{h}{\beta} G(\eta, D). \quad (4.11)$$

Entonces, de (4.8) y (4.9) obtenemos

$$\mathcal{G}_0 = \frac{h}{\beta} G_0 = \frac{h}{\beta} D \tanh(hD) = \frac{1}{\beta} \mu P \tanh(\mu P), \quad (4.12)$$

$$\mathcal{G}_j(\alpha\eta^*, \mu P) = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{j!} \mu P \left((\alpha\eta^*)^j (\mu P)^j \right) \left(\widehat{Q}_{j+1}(\mu P) \right) \right] \\ - \sum_{n=0}^{j-1} \mathcal{G}_n(\alpha\eta^*, \mu P) \frac{(\alpha\eta^*)^{j-n} (\mu P)^{j-n} \widehat{Q}_{j-n}(\mu P)}{(j-n)!}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

De este modo, se observa en (4.12), (4.13) que los operadores \mathcal{G}_j son homogéneos de orden j en $\alpha\eta^*$.

Por otra parte, el operador $\tanh(\mu P)$ que aparece en la definición (4.10) de $Q_j(\mu P)$, j non, puede expandirse en términos de β . Primero hacemos notar que

$$\tanh(z) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{2i} z^{2i-1} = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{\infty} T_{2i} z^{2i} = z - \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots \quad (4.14)$$

$$\text{donde } T_{2n} = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}, \quad B_{2n} = 2\pi \oint_{|z| < 2\pi} \frac{z}{e^z - 1} \frac{dz}{z^{n+1}}. \quad (4.15)$$

B_{2n} es conocido como el $2n$ -ésimo número de Bernoulli. Entonces

$$\begin{aligned} \tanh(\mu P) &= \mu P - \frac{1}{3} (\mu P)^3 + \frac{2}{15} (\mu P)^5 + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} T_{2i} (\mu P)^{2i-1} = \frac{1}{\mu P} \sum_{i=1}^{\infty} T_{2i} (\mu P)^{2i} \\ &= \frac{1}{\mu P} \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} (\mu P)^{2(i+1)} \\ &= \frac{1}{\mu P} \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^{i+1} P^{2(i+1)} \\ &= \frac{\beta}{\mu P} \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^i P^{2(i+1)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

De hecho, la expansión en serie del operador \mathcal{G} en términos de α y μ es en realidad una expansión en términos de α y β ; a partir de las expresiones (4.12) y (4.13) puede mostrarse que cada operador $\mathcal{G}_{2j+\delta}$ ($\delta \in \{0, 1\}$) se puede expresar como una expansión en términos de α y β , en la que el término de menor orden en β es de $O(\beta^j)$.

4.1.2. Las Ecuaciones de Hamilton

Introduciremos ahora las variables adimensionales en el Hamiltoniano (2.12) y las ecuaciones de Hamilton. En la fórmula (2.20) del Capítulo 3 vimos que la densidad hamiltoniana \mathcal{H} es

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} (g\eta^2 + \Phi G(\eta)\Phi) \\ &= \frac{1}{2} \left[(ga^2) \eta^{*2} + (c_o L \alpha)^2 \Phi^* \left(\frac{\beta}{h} \mathcal{G} \right) \Phi^* \right].\end{aligned}\quad (4.17)$$

Notemos que

$$\frac{(c_o \alpha L)^2 \beta}{h} = \frac{c_o^2}{h} \left(\frac{a}{h} \right)^2 L^2 \frac{h^2}{L^2} = \frac{c_o^2 a^2}{h} = c_o^2 \alpha a = gh \alpha a = ga^2$$

Definimos así a la densidad hamiltoniana adimensional \mathcal{H}^* como

$$\mathcal{H}^* = \frac{\mathcal{H}}{\alpha c_o^2 a} = \frac{1}{2} \left[\eta^{*2} + \Phi^* \mathcal{G} \Phi^* \right] \quad (4.18)$$

A partir de la relación (2.12) para el Hamiltoniano

$$H = \int_{\Gamma_0} \mathcal{H} dx = \int_{\Gamma_0^*} (\alpha c_o^2 a) \mathcal{H}^* L dx^*,$$

con $\Gamma_0^* = \{(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2 : y^* = 0\} = \mathbb{R}$, queda definido el Hamiltoniano adimensional H^* como

$$H^* = \frac{H}{L(\alpha c_o^2 a)} = \int_{\Gamma_0^*} \mathcal{H}^* dx^* = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0^*} \left[\eta^{*2} + \Phi^* \mathcal{G} \Phi^* \right] dx^* \quad (4.19)$$

Obtendremos las ecuaciones de Hamilton en forma adimensional. Por definición, las derivadas variacionales del Hamiltoniano H satisfacen

$$\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta H}{\delta \eta} \right] f_1 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\eta + \epsilon f_1) - H(\eta)}{\epsilon} \quad (4.20)$$

$$\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta H}{\delta \Phi} \right] f_2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\Phi + \epsilon f_2) - H(\Phi)}{\epsilon} \quad (4.21)$$

Primero consideremos (4.21). La función f_2 tiene las dimensiones de Φ , de modo que $f_2 = \alpha c_o L f_2^*$. Para el miembro izquierdo se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta H}{\delta \Phi} \right] f_2 dx &= \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H}{\delta \Phi} \right] \alpha c_o L f_2^* L dx^* \\ &= \alpha c_o L^2 \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H}{\delta \eta} \right] f_2^* dx^*\end{aligned}\quad (4.22)$$

Adimensionalizando el miembro derecho de (4.21), se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\Phi + \epsilon f_2) - H(\Phi)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L\alpha c_o^2 a (H^*(\Phi + \epsilon f_2) - H^*(\Phi))}{\epsilon} \\
&= L\alpha c_o^2 a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H^*(\Phi^* + \epsilon f_2^*) - H^*(\Phi^*)}{\epsilon} \\
&= L\alpha c_o^2 a \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H^*}{\delta \Phi^*} \right] f_2^* dx^*
\end{aligned} \tag{4.23}$$

La segunda igualdad se da porque en realidad únicamente se está derivando respecto al parámetro ϵ , usándose las mismas funciones Φ , f_2 , sólo que adimensionalizadas. De la igualdad entre (4.22) y (4.23) se deduce que

$$\frac{\delta H}{\delta \Phi} = \frac{L\alpha c_o^2 a \delta H^*}{\alpha c_o L^2 \delta \Phi^*} = \frac{a c_o}{L} \frac{\delta H^*}{\delta \Phi^*} \tag{4.24}$$

Adimensionalizando la parcial η_t se tiene que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial(a\eta^*)}{\partial(Lt^*/c_o)} = \frac{a c_o}{L} \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} \tag{4.25}$$

En vista de (4.24) y (4.25), la adimensionalización de la primera ecuación de Hamilton (2.10) nos da

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = \frac{\delta H^*}{\delta \Phi^*} \tag{4.26}$$

Consideremos ahora (4.20). La función f_1 tiene las dimensiones de η , por lo que $f_1 = a f_1^*$. El miembro izquierdo puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_0} \left[\frac{\delta H}{\delta \eta} \right] f_1 dx &= \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H}{\delta \eta} \right] a f_1^* L dx^* \\
&= aL \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H}{\delta \eta} \right] f_1^* dx^*
\end{aligned} \tag{4.27}$$

La adimensionalización del miembro derecho de (4.20) nos da

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\eta + \epsilon f_1) - H(\eta)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L\alpha c_o^2 a (H(\eta + \epsilon f_1) - H(\eta))}{\epsilon} \\
&= L\alpha c_o^2 a \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{H(\eta^* + \epsilon f_1^*) - H(\eta^*)}{\epsilon} \\
&= L\alpha c_o^2 a \int_{\Gamma_0^*} \left[\frac{\delta H^*}{\delta \eta^*} \right] f_1^* dx^*
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Comparando (4.27) y (4.28) tenemos que

$$\frac{\delta H}{\delta \eta} = \frac{L\alpha c_o^2 a \delta H^*}{aL \delta \eta^*} = \alpha c_o^2 \frac{\delta H^*}{\delta \eta^*} \tag{4.29}$$

Por otra parte, al adimensionalizar la parcial Φ_t se obtiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \alpha c_o L \Phi^*}{\partial Lt^*/c_o} = \alpha c_o^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} \tag{4.30}$$

De acuerdo a (4.29) y (4.30), la segunda ecuación de Hamilton (2.11) queda como

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial t^*} = - \frac{\delta H^*}{\delta \eta^*} \tag{4.31}$$

4.2. Aproximación del Hamiltoniano y el Sistema Boussinesq

En la Sección 4.1.1 estudiamos la expansión en serie del operador \mathcal{G} . Dado que el Hamiltoniano H^* depende de \mathcal{G} en la forma dada por (4.19), vemos que a su vez H^* tiene una expansión en términos de α y β . Así que pueden obtenerse aproximaciones de las ecuaciones de ondas en agua mediante las ecuaciones canónicas correspondientes a un Hamiltoniano aproximado (truncando su expansión). Este procedimiento fue aplicado en [13], sin adimensionalizar variables, para obtener los sistemas de ecuaciones de varios modelos de ondas largas en agua, como la Ecuación de Onda, el Modelo de Aguas Someras (Shallow Water Theory), Ondas Dispersivas y el Sistema de Boussinesq, por mencionar algunos. En nuestro trabajo se siguió un procedimiento análogo, pero se decidió trabajar con variables adimensionales, puesto que en el proceso de adimensionalización se obtienen parámetros que indican los aspectos físicos de importancia en el fenómeno estudiado. Como se mostró en la Sección 4.1, los parámetros físicos relacionados con las ondas en la superficie libre son α y β . Es conocido que el parámetro α está asociado a los efectos de amplitud (no lineales) en la propagación de las ondas, tales como el rompimiento de olas, y que el parámetro β está relacionado con los fenómenos de dispersión en la propagación de ondas lineales. Una amplia discusión al respecto puede ser encontrada en [8].

A continuación se obtienen, bajo el procedimiento mencionado, las ecuaciones de evolución para ondas en agua asociadas a un Hamiltoniano H^* aproximado hasta términos de primer orden en α y β ; entonces la aproximación tendrá un error de orden 2 en α y β , al omitirse los términos con α^2 , β^2 , $\alpha\beta$ y de orden superior. Para designar a todos estos términos usaremos la notación $O(2)$. De este modo, nuestra aproximación del Hamiltoniano es de orden $O(1)$, pues considera los términos de α , β y de orden 0.

Puesto que se aproximará al Hamiltoniano a orden 1 en α , sólo se deben considerar los términos \mathcal{G}_0 y \mathcal{G}_1 , debiendo truncarlos también hasta un orden 1 en β . Para \mathcal{G}_0 , tenemos de (4.16) que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \frac{\mu P \tanh(\mu P)}{\beta} = \frac{\mu P}{\beta} \left[\frac{\beta}{\mu P} \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^i P^{2(i+1)} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} T_{2(i+1)} \beta^i P^{2(i+1)} = T_2 P^2 + T_4 \beta P^4 + O(2) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} &= \left(i \frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 - \frac{1}{3} \beta \left(i \frac{\partial}{\partial x^*} \right)^4 + O(2) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para el término \mathcal{G}_1 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1 &= \frac{h}{\beta} G_1 = \frac{h}{\beta} D (\eta - \tanh(hD)\eta \tanh(hD)) D \\
&= \left(\frac{1}{h\beta} \right) hD (a\eta^* - \tanh(hD)a\eta^* \tanh(hD)) hD \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \mu P (\eta^* - \tanh(\mu P)\eta^* \tanh(\mu P)) \mu P \\
&= \alpha P (\eta^* - \tanh(\mu P)\eta^* \tanh(\mu P)) P \\
&= \alpha P \left(\eta^* - \left[\mu P + \sum_{i=2}^{\infty} T_{2i}(\mu P)^{2i-1} \right] \eta^* \left[\mu P + \sum_{i=2}^{\infty} T_{2i}(\mu P)^{2i-1} \right] \right) P \\
&= \alpha P (\eta^* - \mu P \eta^* \mu P + O(2)) P = \alpha P \eta^* P - \underbrace{\alpha \beta P^2 \eta^* P^2 + O(2)}_{O(2)} \\
&= -\alpha \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\eta^* \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

De (4.33) y (4.34) se observa que

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} &= -\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial x^*} \right) - \alpha \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\eta^* \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 + \alpha \eta^* \right] \frac{\partial}{\partial x^*} \right) + O(2)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Entonces se tiene para H^* , en vista de (4.19) y (4.35), que

$$\begin{aligned}
H^* &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta^{*2} + \Phi^* \mathcal{G}_1^* \Phi^* \right] dx^* \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta^{*2} - \Phi^* \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 + \alpha \eta^* \right] \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right) \right] dx^* + O(2)
\end{aligned}$$

Integrando por partes, tenemos que

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\eta^{*2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 + \alpha \eta^* \right] \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right) dx^* \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[\Phi^* \left(\left[1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^2 + \alpha \eta^* \right] \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^*} \right) \right] \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + O(2) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta^{*2} + \Phi_{x^*}^{*2} + \frac{\beta}{3} \Phi_{x^*}^* \frac{\partial^3 \Phi^*}{\partial x^{*3}} + \alpha \eta^* \Phi_{x^*}^{*2} \right] dx^* + O(2) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[\eta^{*2} + \Phi_{x^*}^{*2} - \frac{\beta}{3} \left(\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^{*2}} \right)^2 + \alpha \eta^* \Phi_{x^*}^{*2} \right] dx^* + O(2)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Calculemos las derivadas variacionales del Hamiltoniano usando (4.36). Para empezar

$$\begin{aligned} H^*(\eta^*, \Phi^* + \delta\Phi^*) - H^*(\eta^*, \Phi^*) &= \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[2\Phi_{x^*}^* (\delta\Phi^*)_{x^*} - 2\frac{\beta}{3} \Phi_{x^* x^*}^* (\delta\Phi^*)_{x^* x^*} + 2\alpha\eta^* \Phi_{x^*}^* (\delta\Phi^*)_{x^*} \right] dx^* &+ O((\delta\Phi)^2) + O(2) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Integrando por partes para que aparezca $\delta\Phi$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta H^*}{\delta\Phi^*} &= -\Phi_{x^* x^*}^* - \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial x^4} - \alpha (\eta^* \Phi_{x^*}^*)_{x^*} + O(2) \\ &= - \left[\{(1 + \alpha\eta^*) \Phi_{x^*}^*\}_{x^*} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial x^4} \right] + O(2) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Considerando la otra derivada variacional, de la dependencia en η^* de \mathcal{H}_1^{1*} se obtiene:

$$\frac{\delta H^*}{\delta\eta^*} = - \left(\eta^* + \frac{1}{2} \alpha \Phi_{x^*}^{*2} \right) + O(2) \quad (4.39)$$

Por lo que las ecuaciones canónicas para H^* , a orden $O(1)$, son

$$\eta_{t^*}^* = - \left(\{(1 + \alpha\eta^*) \Phi_{x^*}^*\}_{x^*} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial x^4} \right) + O(2) \quad (4.40)$$

$$\Phi_{t^*}^* = - \left(\eta^* + \alpha \frac{\Phi_{x^*}^{*2}}{2} \right) + O(2) \quad (4.41)$$

Las relaciones anteriores nos pueden parecer más familiares al introducir la variable $u^* = \Phi_{x^*}^*$, y derivando (4.41) respecto a x^* ; la forma alternativa del sistema de ecuaciones (4.40)-(4.41) es entonces

$$0 = \eta_{t^*}^* + \{(1 + \alpha\eta^*) u^*\}_{x^*} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*3}} + O(2) \quad (4.42)$$

$$0 = u_{t^*}^* + \alpha u^* u_{x^*}^* + \eta_{x^*}^* + O(2) \quad (4.43)$$

El sistema (4.42)-(4.43) es de tipo Boussinesq. Involucra tanto efectos no lineales asociados a la amplitud de las ondas (relacionados con los términos de α en (4.42) y (4.43)) como efectos dispersivos, propios de ondas largas (asociados al término de β en (4.42)). Vale la pena expresar el sistema Boussinesq (4.42)-(4.43) en términos de las variables originales:

$$0 = \eta_t + \{(h + \eta)u\}_x + \frac{h^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(2) \quad (4.44)$$

$$0 = u_t + uu_x + g\eta_x + O(2) \quad (4.45)$$

Las relaciones de Boussinesq (4.40)-(4.41) pueden ser escritas como una ecuación no lineal en derivadas parciales sólo para Φ^* y otra relación que nos da a η^* una vez que es conocida Φ^* , ambas con un error de orden $O(2)$. Sustituyendo (4.41) en (4.40), se encuentra que

$$0 = \Phi_{t^* t^*}^* - \Phi_{x^* x^*}^* - \frac{\beta}{3} \frac{\partial^4 \Phi^*}{\partial x^4} + \alpha \left[\frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{\Phi_{x^*}^{*2}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^*} (\Phi_{x^*}^* \Phi_{t^*}^*) \right] + O(2) \quad (4.46)$$

$$\eta^* = - \left[\Phi_{t^*}^* + \alpha \frac{\Phi_{x^*}^{*2}}{2} \right] + O(2) \quad (4.47)$$

La expresión anterior de la versión Hamiltoniana encontrada para las relaciones de Boussinesq es de gran utilidad por diversas razones. La primera de ellas es que, en cierta forma, las variables están “desacopladas”. En (4.46) se tiene una ecuación que debe satisfacer únicamente el potencial Φ^* ; si ésta se resuelve, la forma funcional de la superficie libre η^* queda definida por (4.47). Por lo tanto, para encontrar la evolución de las ondas en agua de acuerdo a las relaciones de Boussinesq obtenidas, basta con resolver la ecuación (4.46). Esto es conveniente al estudiar problemas como el de las ondas solitarias. Por otro lado, analizando la forma de la ecuación (4.46), queda claro que en ese modelo se añaden a la propagación lineal de ondas (dada por los primeros dos sumandos, que por sí solos corresponden a la Ecuación de Onda) los efectos dispersivos asociados a ondas largas (propios del tercer sumando, de factor β) y los efectos de amplitud no-lineales (representados por el cuarto sumando, de coeficiente α , formado por derivadas de Φ^* multiplicadas entre sí).

Haremos un comentario final sobre el sistema Boussinesq (4.42)-(4.43). En este modelo, la variable u^* representa la velocidad horizontal del fluido; sin embargo, Φ_{x^*} es estrictamente la circulación sobre la superficie libre 1-dimensional Γ por unidad de longitud horizontal, en unidades adimensionales. Esto se deduce de lo mostrado a continuación para Φ_x :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \varphi(x, y)|_{y=\eta(x)} \implies \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= \mathbf{u} \cdot (1, \eta_x) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = T \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}}\end{aligned}$$

donde $\mathbf{T} = (1, \eta_x)$ es la tangente a Γ , y $T = \sqrt{1 + \eta_x^2} = \frac{dS}{dx}$, con dS y dx elementos diferenciales de longitud sobre la superficie libre y el dominio horizontal, respectivamente. Por lo tanto, se tiene que

$$\Phi_x = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}} \frac{dS}{dx} = \frac{\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}}{dx} \quad (4.48)$$

lo que corresponde al significado físico atribuido anteriormente a Φ .

4.3. La Ecuación Korteweg-de Vries y su relación con el Sistema Boussinesq

El objetivo de esta sección será deducir de las relaciones de Boussinesq encontradas la Ecuación Korteweg-De Vries (KdV). Ésta es una conocida ecuación en derivadas parciales que describe el comportamiento de ondas largas en agua de baja amplitud, cuyo movimiento se da en una sola dirección. Su importancia radica en que es el modelo de mayor simplicidad que es capaz de predecir, a partir del balance de efectos no lineales y dispersivos, la existencia de ondas solitarias y el comportamiento de éstas como solitones: la ecuación KdV predice que, al cruzarse dos ondas solitarias, éstas emergen del cruce casi como si hubieran interactuado de forma lineal (mediante una simple superposición), sin que cambien las propiedades de las ondas después de su cruce, aún cuando la interacción en realidad es no lineal. La única evidencia de este tipo de interacción es un ligero desfasamiento de las posiciones de las crestas respecto a las esperadas de una simple superposición lineal. Conforme se avance se irá presentando más información sobre la teoría de solitones en la ecuación KdV, que puede ser encontrada en [7], [8] y [9].

Cabe mencionar que, como es bien señalado en [13], las relaciones (4.44) y (4.45) difieren de la formulación usual del sistema de ecuaciones de Boussinesq (presentada en [7]), en la que aparecería un término dispersivo en (4.45) en vez de estar en (4.44); tal término no involucraría a u sino a η , al ser de la forma: $\frac{h}{3}\eta_{xtt}$. Sin embargo, como también se comenta atinadamente, las relaciones de Boussinesq (4.44)-(4.45) son las que surgen naturalmente de nuestro procedimiento de teoría de perturbaciones aplicado al Hamiltoniano. Aún más: de ellas, al igual que del Sistema Boussinesq usual, también se puede deducir la Ecuación KdV.

Para empezar, restringiremos el movimiento de las ondas a un solo sentido, paralelo al eje x^* , de modo que tengan velocidad positiva. Esto se expresa matemáticamente al suponer que se cumple la relación

$$u^* = \Phi_{x^*}^* = \eta^* + \alpha J(\eta^*) + \beta K(\eta^*) + O(2) \quad (4.49)$$

determinándose J y K al sustituir la relación anterior en el sistema Boussinesq. La razón de tal condición es comprensible al recordar la condición dinámica de Bernoulli en variables adimensionales, representada en el sistema Boussinesq por (4.47), derivándola respecto a x^*

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^* + \Phi_{t^*}^* + O(1), \implies \\ 0 &= \eta_{x^*}^* + u_{t^*}^* + O(1) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Tomando en cuenta que la relación (4.49) propuesta es del tipo: $u^* = \eta^* + O(1)$, vemos que si ésta se sustituyera en (4.50) se encontraría la relación

$$\eta_{x^*}^* + \eta_{t^*}^* + O(1) = 0 \quad (4.51)$$

En conclusión, bajo la relación (4.49) supuesta, la forma de la superficie libre sería, a orden cero, una función del tipo $\eta^* = \eta^*(x^* - t^*)$; es decir, una onda viajera restringida a tener una velocidad positiva unitaria (en las unidades originales, la velocidad de esta solución tendría el valor típico $c_o = \sqrt{gh}$). Se observa que se ha propuesto (4.49) buscando que a primer orden las soluciones al problema de ondas largas también sean ondas cuyo movimiento esté restringido a tener velocidades positivas.

Procedemos a sustituir la relación (4.49) propuesta en las ecuaciones de Boussinesq, despreciando los términos $O(2)$. Aplicándola a (4.43), se encuentra que

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{x^*}^* + u_{t^*}^* + \alpha u^* u_{x^*} \\ &= \eta_{x^*}^* + (\eta_{t^*}^* + \alpha J_{t^*} + \beta K_{t^*} + O(2)) \\ &\quad + \alpha(\eta^* + \alpha J + \beta K + O(2))(\eta_{x^*}^* + \alpha J_{x^*} + \beta K_{x^*} + O(2)) \\ &= \eta_{x^*}^* + \eta_{t^*}^* + \alpha J_{t^*} + \beta K_{t^*} + \alpha(\eta^* \eta_{x^*}^* + O(1))O(2) \\ &= \eta_{x^*}^* + \eta_{t^*}^* + \alpha(J_{t^*} + \eta^* \eta_{x^*}^*) + \beta K_{t^*} + O(2) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Sustituyendo (4.49) en la condición dinámica (4.42) de las relaciones de Boussinesq, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{t^*}^* + u_{x^*}^* + \alpha(\eta^* u^*)_{x^*} + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^{*3}} \\ &= \eta_{t^*}^* + (\eta_{x^*}^* + \alpha J_{x^*} + \beta K_{x^*} + O(2)) \\ &\quad + \alpha \frac{\partial}{\partial x^*} (\eta^* [\eta^* + O(1)]) + \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3}{\partial x^{*3}} (\eta^* + O(1)) \\ &= \eta_{t^*}^* + \eta_{x^*}^* + \alpha \left(J_{x^*} + \frac{\partial(\eta^{*2})}{\partial x^*} \right) + \beta \left(K_{x^*} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} \right) + O(2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Para que la condición (4.49) supuesta sea consistente con las ecuaciones de Boussinesq a primer orden en α y β , se debe dar la igualdad entre las relaciones (4.52) y (4.53). Igualando así los coeficientes de α y β de dichas ecuaciones, se deben cumplir

$$J_{t^*} + \eta^* \eta_{x^*}^* = J_{x^*} + \frac{\partial(\eta^{*2})}{\partial x^*} = J_{x^*} + 2\eta^* \eta_{x^*}^* \quad (4.54)$$

$$K_{t^*} = K_{x^*} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} \quad (4.55)$$

Sin embargo, debemos tomar en cuenta que J y K dependen sólo de η^* , por lo cual

$$J_{t^*} = \frac{dJ}{d\eta^*} \frac{\partial \eta^*}{\partial t^*} = \frac{dJ}{d\eta^*} \left(-\frac{\partial \eta^*}{\partial x^*} + O(1) \right) = -J_{x^*} + O(1)$$

La segunda igualdad se da al considerar (4.51). De forma análoga se obtiene que $K_{t^*} = -K_{x^*} + O(1)$. Sustituyendo esto en (4.54) y (4.55), tenemos que

$$\begin{aligned} J_{t^*} + \eta^* \eta_{x^*}^* &= -J_{t^*} + O(1) + 2\eta^* \eta_{x^*}^* \implies \\ &= \frac{3}{2} \eta^* \eta_{x^*}^* + O(1) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Se ha obtenido así el coeficiente de α en la Ecuación (4.52). El coeficiente de β se calcula a continuación:

$$\begin{aligned} K_{t^*} &= -K_{t^*} + O(1) + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} \\ &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} + O(1) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Sustituyendo estos coeficientes en cualquiera de las relaciones (4.52) y (4.53):

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{x^*}^* + \eta_{t^*}^* + \alpha \left(\frac{3}{2} \eta^* \eta_{x^*}^* + O(1) \right) + \beta \left(\frac{1}{6} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} + O(1) \right) + O(2) \\ &= \underbrace{\eta_{t^*}^* + \eta_{x^*}^* + \alpha \left(\frac{3}{2} \eta^* \eta_{x^*}^* \right)}_{\text{No-Linealidad}} + \underbrace{\left(\frac{\beta}{6} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} \right)}_{\text{Dispersión}} + O(2) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Tenemos entonces una ecuación en derivadas parciales que modela, a primer orden en α y β , la forma de la superficie libre η^* de ondas en agua que se mueven en un solo sentido (de velocidad positiva); despreciando los términos de $O(2)$, encontramos así la Ecuación Korteweg-De Vries (KdV) en forma adimensional:

$$0 = \eta_{t^*}^* + \left[1 + \alpha \left(\frac{3}{2} \eta^* \right) \right] \eta_{x^*}^* + \frac{\beta}{6} \frac{\partial^3 \eta^*}{\partial x^{*3}} \quad (4.59)$$

La forma de la ecuación KdV se presta fácilmente a analizar los procesos físicos encontrados en ella. Si se omitieran los términos de primer orden en α y β , se tendría una ecuación lineal de ondas que se mueven “hacia la derecha” con la misma velocidad unitaria. Sin embargo, el término asociado a α hace que el tercer sumando de (4.58) dé cuenta de que la velocidad de propagación de las ondas depende de su altura mediante η^* ; de este modo, se toman en cuenta los efectos no-lineales relacionados con la amplitud de las ondas. Por otra parte, el término de β consiste en derivadas de η^* y por tanto está asociado a efectos dispersivos, propios de ondas largas. En conclusión, la ecuación KdV, no-lineal y de tercer orden, considera la acción de efectos dispersivos y no-lineales sobre las ondas largas en agua de baja amplitud, a orden $O(1)$.

La ecuación KdV será el modelo teórico de ondas en agua con el que compararemos los resultados experimentales del siguiente capítulo. Por lo tanto, será conveniente expresarla en términos de variables físicas con dimensiones. Transformando así a (4.59), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a} \eta_t \frac{L}{c_o} + \left[1 + \alpha \left(\frac{3}{2a} \eta \right) \right] \frac{1}{a} \eta_x L + \frac{\beta}{6a} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} L^3 \\ &= \eta_t + c_o \left[1 + \alpha \left(\frac{3}{2a} \eta \right) \right] \eta_x + \frac{1}{6} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} L^2 c_o \\ &= \eta_t + c_o \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\eta}{h} \right) \right] \eta_x + \left(\frac{c_o h^2}{6} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ésta es la ecuación KdV en términos de variables físicas.

4.4. La Teoría de Solitones de la Ecuación KdV para las Ondas Solitarias

Obtenida la Ecuación KdV en la sección anterior, estudiaremos ahora algunas de las predicciones que este modelo de ondas largas hace sobre la existencia y propiedades de las ondas solitarias. Si bien existen varios modelos teóricos que predicen las ondas solitarias en agua, el de la KdV tiene varias ventajas: de él se puede encontrar con relativa facilidad la forma de la superficie y velocidad de propagación de este tipo de ondas, pero aún más importante para nuestro estudio experimental es lo que predice sobre la interacción de un par de ellas. Como ya se comentó en la Sección 4.3, de acuerdo al modelo KdV, si detrás de una onda solitaria hay otra que se desplaza en la misma dirección, alcanzándola, después de su cruce las ondas solitarias no desaparecen aunque el carácter de la interacción sea no lineal (de acuerdo a la forma de la ecuación KdV), sino que el resultado de la interacción es casi el del caso lineal, como si se hubiera dado una simple superposición entre las ondas. La única evidencia de la interacción no lineal es un ligero desfase en las posiciones de las ondas como producto del cruce. Las ondas que interactúan de esta manera son llamadas solitones: son soluciones a un sistema no lineal espacialmente localizadas y de forma permanente, que después de interactuar con otras soluciones del mismo tipo no sufren cambios en su forma. Cabe mencionar que la ecuación KdV posee soluciones exactas de más de dos solitones; aún más, es un sistema integrable (ver [10]). Esta propiedad permite un análisis detallado no sólo de las soluciones multisolitónicas, sino también de la evolución de una condición arbitraria.

Primero mostraremos las propiedades de las ondas solitarias que la ecuación KdV (4.60) predice, siguiendo a [7]. Posteriormente presentaremos la teoría de solitones de la KdV (usándola en forma normalizada), desarrollando lo presentado en [9] y [7]; finalmente, haremos algunos cálculos para que las predicciones de la teoría de solitones queden en términos de las variables físicas. Esta última descripción será utilizada en la comparación con las observaciones experimentales del Capítulo 5.

4.4.1. Solución KdV de tipo onda solitaria

Queremos saber qué predice la ecuación KdV (4.60), en términos de las variables originales, sobre la existencia de una onda solitaria y sus propiedades. Por lo tanto, buscamos una solución a esta ecuación en la que la elevación tenga la forma

$$\begin{aligned}\eta(x, t) &= \eta(\xi), \\ \text{con } \xi &= x - ct,\end{aligned}\tag{4.61}$$

$$\tag{4.62}$$

y también supondremos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \eta \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Nótese que c es la velocidad de propagación de la onda, que en este caso es constante.

De la forma de $\eta(x, t)$ en (4.61) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} \\ \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d\eta(\xi)}{d\xi} = -c \frac{d\eta(\xi)}{d\xi}\end{aligned}$$

Aplicando estas relaciones en la ecuación KdV (4.60), se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= -c \frac{d\eta}{d\xi} + c_o \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3c_o}{2h} \left(\eta \frac{d\eta}{d\xi} \right) + \frac{c_o h^2}{6} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} \\
&= \left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{3}{2h} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\eta^2}{2} \right) + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} \\
&= \frac{d}{d\xi} \left[\left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \eta + \frac{3}{4h} \eta^2 + \frac{h^2}{6} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Integrando la última igualdad, y usando las condiciones sobre η y sus derivadas en (4.61), se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= \left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \eta + \frac{3}{4h} \eta^2 + \frac{h^2}{6} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \left[\left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \eta + \frac{3}{4h} \eta^2 + \frac{h^2}{6} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] \Big|_{\xi=\pm\infty} \\
&= \frac{d\eta}{d\xi} \left[\left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \eta + \frac{3}{4h} \eta^2 + \frac{h^2}{6} \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right] \\
&= \left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \frac{1}{2} \frac{d(\eta^2)}{d\xi} + \frac{1}{4h} \frac{d(\eta^3)}{d\xi} + \frac{h^2}{6} \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \\
&= \frac{d}{d\xi} \left[\left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{4h} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Integrando de nuevo, tomando en cuenta (4.61), tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{c}{c_o} \right) \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{4h} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 &= 0, \text{ entonces} \\
\eta^2 \left[2 \left(\frac{c}{c_o} - 1 \right) - \frac{\eta}{h} \right] &= \frac{h^2}{3} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Para hacer más sencilla la integración de (4.65), definimos la función

$$f(\xi) = \frac{\eta(\xi)}{\gamma h}, \quad \text{con } \gamma = 2 \left(\frac{c}{c_o} - 1 \right)$$

por lo que (4.65) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \left(\frac{d(\eta/\gamma h)}{d\xi/h} \right)^2 &= \left(\frac{\eta}{\gamma h} \right)^2 \gamma \left[1 - \frac{\eta}{\gamma h} \right], \text{ entonces} \\
\frac{df}{f\sqrt{1-f}} &= \frac{\sqrt{3\gamma}}{h} d\xi.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

La expresión del lado izquierdo de (4.66) tiene como integral a $2\text{arc sech}\sqrt{f}$, cuyo valor máximo es 1. Tomando como $\xi_o = 0$ al punto en el que se alcanza el máximo de f , de modo que $f_o = f(\xi_o) = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_o=0}^{\xi} \frac{\sqrt{3\gamma}}{h} d\xi' &= \int_{f_o=1}^f \frac{df'}{f'\sqrt{1-f'}} = 2\text{arc sech}\sqrt{f'} \Big|_1^f = 2\text{arc sech}\sqrt{f}, \\
\text{entonces } f(\xi) &= \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3\gamma}}{2h} \xi \right) \implies, \text{ y el perfil de } \eta \text{ es} \\
\eta(\xi) &= (\gamma h) \text{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{3\gamma}}{2h} \xi \right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Vemos que el máximo valor de $\eta(\xi)$ es $\eta(0) = \gamma h$. Definimos entonces a

$$\begin{aligned} A &= \gamma h, \quad \text{y al parámetro} \\ \alpha &= \frac{A}{h} = \gamma \end{aligned} \quad (4.68)$$

Naturalmente, A es la máxima elevación de la onda solitaria (su amplitud); el parámetro α tiene el mismo significado que al principio de este capítulo. Por otra parte, el decaimiento a cero del perfil está modulado por un coeficiente b , que podemos interpretar como una longitud horizontal típica, de valor:

$$b = \left(\frac{\sqrt{3\gamma}}{h} \right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{3A}{h^3}} \right)^{-1} = \frac{h}{\sqrt{3\alpha}} \quad (4.69)$$

Algunos autores le llaman β al factor $1/b$ (véase [17]); sin embargo, no se seguirá esta convención dado que b no es adimensional. Tenemos entonces que

$$\eta(\xi) = \eta(x - ct) = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \frac{(x - ct)}{b} \right) \quad (4.70)$$

Es importante observar la relación entre la amplitud A y la velocidad c de la onda solitaria

$$\begin{aligned} A &= \gamma h = 2h \left(\frac{c}{c_o} - 1 \right), \quad \text{entonces} \\ c &= c_o \left(1 + \frac{1}{2} \frac{A}{h} \right). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Vemos que la velocidad con la que se mueve la onda aumenta con la altura, de forma lineal según la teoría KdV. Respecto a la limitación en el valor de A , en [7] se menciona que, de acuerdo a la teoría, la máxima altura de una onda solitaria es $A \approx 0.78h$, y experimentalmente es $A \approx 0.7h$.

Una forma alternativa de la ecuación (4.70) usa la identidad

$$\operatorname{sech}^2 z = \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}} \right)^2 = \left(\frac{2}{e^z(1 + e^{-2z})} \right)^2 = \frac{4e^{-2z}}{(1 + e^{-2z})^2} \quad (4.72)$$

De (4.70) y (4.72) se obtiene entonces que

$$\eta(\xi) = \frac{4Af(\xi)}{(1 + f(\xi))^2}, \quad \text{con} \quad (4.73)$$

$$f(\xi) = e^{-\xi/b}. \quad (4.74)$$

4.4.2. El problema de dos ondas solitarias y la solución de dos solitones de la ecuación KdV

Para estudiar ahora el problema de dos ondas solitarias, será conveniente usar otra forma de la ecuación KdV. Hasta el momento hemos estudiado el problema de las ondas solitarias en un marco de referencia S en el que la velocidad del agua es cero en el infinito (las aguas no perturbadas se observan inmóviles). Ahora nos montaremos en un marco S' que se mueve con velocidad positiva c_o respecto a S ; notemos que este marco se mueve en el mismo sentido que las ondas de la ecuación KdV, siendo la magnitud de su velocidad de un valor típico de ondas largas. Las transformaciones galileanas de coordenadas entre los sistemas de referencia S y S' son

$$t = t', \quad (4.75)$$

$$x = x' + c_o t' \quad (4.76)$$

La relación (4.76) predice que el origen de S , inmóvil en dicho marco (pues $x = 0$), parece moverse con velocidad negativa $-c_o$ en S' . De estas transformaciones deducimos que

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + c_o \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.78)$$

Aplicando las relaciones anteriores en (4.60), obtenemos la ecuación KdV en términos de las coordenadas de S' :

$$0 = \frac{\partial \eta}{\partial t'} + \left(\frac{3 c_o}{2 h} \right) \eta \frac{\partial \eta}{\partial x'} + \left(\frac{c_o h^2}{6} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x'^3}. \quad (4.79)$$

Además, definimos a las nuevas variables X, τ, W como

$$(X, \tau) = \frac{\sqrt{6}}{h} (x', c_o t'), \quad (4.80)$$

$$W = \frac{\eta}{4h} \quad (4.81)$$

Sustituyendo (4.80) y (4.81) en (4.79) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial \eta}{\partial t'} + \left(\frac{3 c_o}{2 h} \right) \eta \frac{\partial \eta}{\partial x'} + \left(\frac{c_o h^2}{6} \right) \frac{\partial^3 \eta}{\partial x'^3} \right] \frac{1/4h}{c_o \sqrt{6}/h} \\ &= \left[\frac{\partial(\eta/4h)}{\partial(c_o \sqrt{6} t'/h)} + \left(\frac{3}{2h} \right) 4h(\eta/4h) \frac{\partial(\eta/4h)}{\partial(\sqrt{6} x'/h)} + \frac{\partial^3(\eta/4h)}{\partial(\sqrt{6} x'/h)^3} \right] \\ &= \frac{\partial W}{\partial \tau} + 6W \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Ésta es la forma normalizada de la KdV. Por otra parte, la siguiente proposición nos será útil para encontrar otra ecuación que nos permitirá estudiar con facilidad soluciones de ondas solitarias y comprobar que se comportan como solitones de acuerdo a la ecuación KdV (4.82).

Proposición 5 Sea $f(X, \tau)$ solución a la ecuación

$$0 = f(f_\tau + f_{XXX})_X - f_X(f_\tau + f_{XXX}) + 3(f_{XX}^2 - f_{XXX}f_X) \quad (4.83)$$

con $f(X, \tau) \geq 0 \quad \forall X, \tau \in \mathbb{R}$. Sea $W(X, \tau) = 2(\log f(X, \tau))_{XX}$. Entonces $W(X, \tau)$ satisface la Ecuación KdV (4.82).

Demostración.

Como f satisface (4.83) se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= f(f_\tau + f_{XXX})_X - f_X(f_\tau + f_{XXX}) + 3(f_{XX}^2 - f_{XXX}f_X) \\
&= f_{X\tau}f + f_{XXX}f - f_Xf_\tau - f_{XXX}f_X + 3(f_{XX}^2 - f_{XXX}f_X) \\
&= f_{X\tau}f - f_Xf_\tau + f_{XXX}f - 4f_{XXX}f_X + 3f_{XX}^2 \\
\Rightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{f_{X\tau}f - f_Xf_\tau + f_{XXX}f - 4f_{XXX}f_X + 3f_{XX}^2}{f^2} \right]
\end{aligned}$$

La última ecuación puede ser reescrita en la forma

$$S_\tau + 3S_X^2 + \frac{\partial^3 S}{\partial X^3} = 0 \quad (4.84)$$

con $S(X, \tau) = 2(\log f(X, \tau))_X$. De $W(X, \tau) = S_X(X, \tau)$ y derivando respecto a X la ecuación (4.84), se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial X} \left[S_\tau + 3S_X^2 + \frac{\partial^3 S}{\partial X^3} \right] = \frac{\partial S_\tau}{\partial X} + 3\frac{\partial S_X^2}{\partial X} + \frac{\partial^4 S}{\partial X^4} \\
&= \frac{\partial W}{\partial \tau} + 3\frac{\partial W^2}{\partial X} + \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} = \frac{\partial W}{\partial \tau} + 6W\frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}
\end{aligned}$$

que es la ecuación KdV (4.82).

■

Cabe mencionar que se le llama transformación logarítmica al cambio de variable

$$W = 2(\log f)_{XX}. \quad (4.85)$$

Se puede consultar más al respecto en [9].

Ahora hablaremos de cómo algunas soluciones sencillas de (4.83) se corresponden con soluciones exactas de (4.82) a problemas de ondas solitarias. Por ejemplo, para el caso de una onda solitaria, considérese la siguiente solución a (4.83)

$$\begin{aligned}
f(X, \tau) &= 1 + f_s, \quad \text{con} \\
f_s(X, \tau) &= \exp(-P(X - P^2\tau))
\end{aligned} \quad (4.86)$$

La función $W(X, \tau)$ correspondiente, obtenida de la transformación logarítmica, es

$$\begin{aligned}
W(X, \tau) &= 2(\log f(X, \tau))_{XX} \\
&= 2\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{-Pf_s}{(1 + f_s)} \right) \\
&= 2\frac{(1 + f_s)P^2f_s - (-Pf_s)(-Pf_s)}{(1 + f_s)^2} \\
&= 2P^2\frac{f_s}{(1 + f_s)^2}
\end{aligned} \quad (4.87)$$

Usando la identidad (4.72), vemos que la expresión (4.87) es igual a

$$W = \frac{P^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{P}{2}(X - P^2\tau) \right) \quad (4.88)$$

De los cambios de variable (4.80), usados para pasar de las soluciones η a (4.79) vistas desde un marco S' a las soluciones W de (4.82), tenemos que

$$\begin{aligned}\eta(x', t') &= 4hW(X(x'), \tau(t')) = 2hP^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{P}{2}(X(x') - P^2\tau(t')) \right) \\ &= 2hP^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{P}{2} \frac{\sqrt{6}}{h}(x' - P^2 c_o t') \right)\end{aligned}\quad (4.89)$$

Hemos recuperado así la forma funcional de tipo sech^2 asociado a una onda solitaria. De la relación (4.89) vemos que el máximo valor de η es $A = 2hP^2$. Por lo tanto, se cumple que

$$P = \sqrt{\frac{A}{2h}} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\quad (4.90)$$

De sustituir (4.90) en (4.89) se sigue que

$$\begin{aligned}\eta(x', t') &= A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{2h}} \frac{\sqrt{6}}{h} \left(x' - \frac{A}{2h} c_o t' \right) \right) \\ \eta(x', t') &= A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3A}{h^3}} \left(x' - \left(\frac{A}{2h} c_o \right) t' \right) \right)\end{aligned}\quad (4.91)$$

Vemos que en (4.91) aparece el coeficiente $b^{-1} = \frac{3A}{h^3}$. Por otro lado, en el marco S' la velocidad de nuestra onda es $c - c_o$; comparando con (4.91) se tiene que

$$c - c_o = \frac{A}{2h} c_o, \quad \text{entonces}\quad (4.92)$$

$$c = \left(1 + \frac{A}{2h} \right) c_o\quad (4.93)$$

que es la relación (4.71) previamente obtenida entre c y A . En conclusión, las observaciones anteriores nos confirman que hemos recuperado la solución KdV al problema de una onda solitaria a partir de la función exponencial f solución de (4.83), dada en (4.86). Ésta es la ventaja de la transformación logarítmica; a partir de soluciones f simples de (4.83), y aún cuando esta ecuación es no lineal, se pueden obtener soluciones de la Ecuación KdV que sería complicado encontrar de trabajar sólo con esta ecuación. Por ejemplo: sabemos que las ondas solitarias son representadas por exponenciales en la ecuación (4.83) para f ; de este modo, podemos intentar resolver el problema de dos ondas solitarias mediante teoría de perturbaciones, proponiendo como solución a f una serie en términos de un parámetro ϵ en la que el término de orden 1 es la suma de dos exponenciales, de manera que

$$\begin{aligned}f &= \underbrace{1}_{O(\epsilon^0)} + \underbrace{f_1 + f_2}_{O(\epsilon^1)} + O(\epsilon^2), \quad \text{con} \\ f_j &= \exp(-\xi_j), \quad \text{donde} \\ \xi_j &= P_j(X - X_{j_o} - P_j^2 \tau), \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Las constantes X_{j_o} son, aproximadamente, las posiciones iniciales (al tiempo $\tau = 0$) de los puntos de máxima elevación de las ondas solitarias, llamados crestas. Naturalmente, la solución para f requiere más

términos que la simple suma de dos exponenciales, ya que la ecuación (4.83) es no lineal; sin embargo, la estructura de esta ecuación es tal que los términos de la serie de orden superior a 2 se anulan, siendo la solución exacta

$$\begin{aligned}
 f &= \underbrace{1}_{O(\epsilon^0)} + \underbrace{f_1 + f_2}_{O(\epsilon^1)} + \underbrace{K_{12}f_1f_2}_{O(\epsilon^2)}, \quad \text{con} \\
 f_j &= \exp(-\xi_j), \text{ donde} \\
 \xi_j &= P_j(X - X_{j_0} - P_j^2\tau), \quad j = 1, 2, \quad \text{y} \\
 K_{12} &= \frac{(P_2 - P_1)^2}{(P_2 + P_1)^2}
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

En [9] y [7] se puede encontrar una discusión más amplia respecto a la transformación logarítmica y la solución de dos solitones de la ecuación KdV.

De esta forma, la solución al problema de dos ondas solitarias está dada por los términos de $O(\epsilon)$, que representan la simple superposición de ondas solitarias, sumados a un término cruzado f_1f_2 asociado a la interacción, correspondiente a $O(\epsilon^2)$ (no aparecen términos cuadráticos en una misma f_j). El hecho de que la suma de términos encontrada sea solución para cualquier tiempo t indica que las ondas solitarias mantienen su forma después del cruce, interactuando así como solitones. Esto será mostrado con mayor claridad al trabajar en la siguiente sección con la solución explícita al problema de dos ondas solitarias. Mediante la transformación logarítmica encontramos la solución W al problema de dos ondas solitarias en la ecuación KdV normalizada (4.82), dada por

$$\begin{aligned}
 W &= 2(\log f)_{XX} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^2 \left[\log \left(1 + \underbrace{e^{\xi_1}}_{f_1} + \underbrace{e^{\xi_2}}_{f_2} + \underbrace{K_{12}e^{\xi_1}e^{\xi_2}}_{K_{12}f_1f_2} \right) \right] \\
 &= 2 \frac{P_1^2 f_1 + P_2^2 f_2 + 2(P_2 - P_1)^2 f_1 f_2 + K_{12}(P_2^2 f_1^2 f_2 + P_1^2 f_1 f_2^2)}{(1 + f_1 + f_2 + K_{12}f_1f_2)^2}
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Mediante los cambios de variable (4.81) y (4.80), identificando los parámetros que aparecen en (4.95) con el caso de una sola onda solitaria, escribimos la solución al problema de dos ondas solitarias para la ecuación KdV con dimensiones físicas, vista tanto en el marco móvil S' como en el fijo S :

$$\begin{aligned}
\eta(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)) &= 8h \frac{\frac{A_1}{2h} f_1 + \frac{A_2}{2h} f_2 + 2 \left(\sqrt{\frac{A_2}{2h}} - \sqrt{\frac{A_1}{2h}} \right)^2 f_1 f_2 + K_{12} \left(\frac{A_2}{2h} f_1^2 f_2 + \frac{A_1}{2h} f_1 f_2^2 \right)}{(1 + f_1 + f_2 + K_{12} f_1 f_2)^2} \\
&= 4 \frac{A_1 f_1 + A_2 f_2 + 2 (\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1})^2 f_1 f_2 + K_{12} (A_2 f_1^2 f_2 + A_1 f_1 f_2^2)}{(1 + f_1 + f_2 + K_{12} f_1 f_2)^2} \\
\text{donde } f_j(\xi_j) &= \exp(-\xi_j), \quad j = 1, 2, \text{ con}
\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
\xi_j &= P_j(X - X_{j_0} - P_j^2 \tau) = \sqrt{\frac{A_j}{2h}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} (x' - x'_{j_0}) - \underbrace{\frac{A_j}{2h}}_{\left(\frac{c_j}{c_0} - 1\right)} \frac{\sqrt{6}}{h} c_0 t' \right) \\
&= \sqrt{\frac{A_j}{2h}} \left(\frac{\sqrt{6}}{h} \right) \left[(x' - x'_{j_0}) - \left(\frac{c_j}{c_0} - 1 \right) c_0 t' \right] \\
&= \sqrt{\frac{3A_j}{h^3}} [(x' - x'_{j_0}) - (c_j - c_0) t'],
\end{aligned}$$

$$\text{y con } K_{12} = \frac{(P_2 - P_1)^2}{(P_2 + P_1)^2} = \left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1}} \right)^2.$$

$$\text{Además, sea } \frac{1}{b_j} = \sqrt{\frac{3A_j}{h^3}}, \text{ de modo que}$$

$$\xi_j(x', t') = \frac{(x' - x'_{j_0}) - (c_j - c_0) t'}{b_j}, \text{ en } S'; \tag{4.97}$$

$$\xi_j(x, t) = \frac{x - x_{j_0} - c_j t}{b_j}, \text{ en } S. \tag{4.98}$$

Notemos que las ξ_j definidas arriba difieren de la ξ definida en el problema de una onda solitaria por un factor constante b y que la posición inicial no es nula en el caso de las primeras. Dividida por el factor de escala b , la coordenada ξ_j indica la posición respecto a un marco de referencia móvil con la onda solitaria j , en el que el origen es (aproximadamente) su punto de máxima altura.

Cabe mencionar que las soluciones de W que provienen de funciones f que satisfacen la ecuación (4.83) cumplen la condición $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} W(X, \tau) = 0$. Esto se debe a que el miembro izquierdo de (4.83) es cero. En general, dicho miembro puede ser igual a un valor constante c y se pueden recuperar mediante la transformación logarítmica, soluciones de la ecuación KdV. Sin embargo, la constante $c = 0$ corresponde a soluciones W (y por ende η) que decaen a cero en el infinito, lo que es adecuado para nuestro estudio de ondas solitarias en agua.

4.4.3. La interacción de dos solitones en la Ecuación KdV

El conocer las propiedades de la solución al problema de una onda solitaria será de gran utilidad para interpretar la solución (4.96) al estudiar su límite a tiempos muy grandes (positivos o negativos). De estos límites se encontrará que, según la ecuación KdV, las ondas solitarias interactúan como solitones: después de su cruce emergen dos ondas de propiedades idénticas a las originales (forma, altura, etc), siendo la única evidencia del cruce un desfaseamiento en sus posiciones respecto al caso de una simple superposición lineal. Supondremos que $A_1 < A_2$, de manera que, como la velocidad aumenta con la altura de onda y las ondas solitarias viajan en el mismo sentido en la KdV, antes de que éstas se crucen la onda de mayor altura se encuentra detrás de la menor hasta que la alcanza. Establecida la situación física, analizamos los casos límite en que $t \rightarrow \pm\infty$:

Antes de la interacción de ondas solitarias ($t \rightarrow -\infty$)

Cerca de la onda menor 1 ($\xi_1 \approx 0$; $\xi_2 \gg 0$).

Por hipótesis, nos encontramos en una posición cercana a la cresta de la onda 1, que es el origen de la coordenada ξ_1 , por lo cual $\xi_1 \approx 0$. Además, sabemos que mucho antes de la interacción la onda menor 1 va muy por delante de la onda mayor 2, de modo que la región que estudiamos tiene una posición muy adelantada respecto a la cresta 2, que es el origen de la coordenada ξ_2 , y por lo tanto $\xi_2 \gg 0$. De estos valores límite de los argumentos ξ_j encontramos los límites correspondientes a las $f_j(\xi_j)$:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1) &= \exp(-\xi_1)|_{\xi_1 \approx 0} \approx 1 \\ f_2(\xi_2) &= \exp(-\xi_2)|_{\xi_2 \gg 0} \ll 1 \end{aligned} \quad (4.99)$$

Aplicando a la solución (4.96) de dos ondas solitarias los límites (4.99) (eliminando los términos con f_2), encontramos que la superficie libre en la región estudiada tiene, aproximadamente, la siguiente forma funcional:

$$\begin{aligned} \eta(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)) &\approx \frac{4A_1 f_1(\xi_1)}{(1 + f_1(\xi_1))^2} \\ &= A_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi_1}{2}\right), \quad \text{por lo que} \\ \eta(x, t) &\approx A_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \frac{(x - x_{1o}) - c_1 t}{b_1}\right) \end{aligned} \quad (4.100)$$

haciendo uso de la forma compacta (4.73) de la solución al problema de una onda solitaria. Como podríamos haberlo esperado de la situación física analizada, al situarnos en la región de la cresta de la onda menor antes del cruce, las ondas no han interactuado y por ende la forma de la superficie libre es semejante a la de la onda solitaria menor 1.

Cerca de la onda mayor 2 ($\xi_2 \approx 0$; $\xi_1 \ll 0$).

Ahora nos encontramos en una posición cercana a la cresta de la onda 2, el origen de ξ_2 , por lo que $\xi_2 \approx 0$. Como antes de la interacción la onda mayor 2 va muy por detrás de la onda 1, el origen de ξ_1 , se tiene en este caso que $\xi_1 \ll 0$. Deducimos de estos valores de las ξ_j los límites de las $f_j(\xi_j)$:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1) &= \exp(-\xi_1)|_{\xi_1 \ll 0} \gg 1 \\ f_2(\xi_2) &= \exp(-\xi_2)|_{\xi_2 \approx 0} \approx 1 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Sustituyendo en la solución (4.96) de dos ondas solitarias los límites (4.101) (conservando sólo los términos cuadráticos en f_1 , pues son los de mayor magnitud), encontramos que la forma de la superficie libre es aproximadamente:

$$\begin{aligned}
\eta(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)) &\approx \frac{4A_2K_{12}f_2}{(1+K_{12}f_2)^2} \\
&= \frac{4A_2\hat{f}_2}{(1+\hat{f}_2)^2}, \quad \text{siendo} \\
\hat{f}_2 &= K_{12}f_2 = e^{\log K_{12}} e^{-\xi_2} = \exp(-(\xi_2 - \log K_{12})) \\
&= \exp\left(-\left(\frac{x-x_{2_o}-c_2t}{b_2} - \frac{b_2 \log K_{12}}{b_2}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\left(\frac{x-(x_{2_o}+b_2 \log K_{12})-c_2t}{b_2}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\left(\frac{x-(x_{2_o}-\theta_2)-c_2t}{b_2}\right)\right), \quad \text{donde} \\
\theta_2 &= -b_2 \log K_{12} = -b_2 \log\left(\frac{\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}+\sqrt{A_1}}\right)^2 \\
&= 2b_2 \log\left(\frac{\sqrt{A_2}+\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}-\sqrt{A_1}}\right). \tag{4.102}
\end{aligned}$$

$$\text{Así: } \eta(x, t) \approx A_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \frac{x-(x_{2_o}-\theta_2)-c_2t}{b_2}\right) \tag{4.103}$$

usando de nuevo la forma compacta (4.73) de la sech^2 . Como se esperaría, la superficie libre en la región estudiada corresponde a la de la onda solitaria mayor 2; la única modificación se da en la posición inicial de su cresta, que está retrasada por θ_2 del valor x_{2_o} .

En la región espacio-temporal de interacción ($\xi_1 \approx 0$; $\xi_2 \approx 0$).

La interacción entre ondas se da cuando sus crestas están en la misma zona (espacial y temporal), por lo que la región estudiada tiene posiciones ξ_1 y ξ_2 cercanas a los orígenes de estas coordenadas. De esto se sigue que:

$$\begin{aligned}
f_1(\xi_1) &= \exp(-\xi_1)|_{\xi_1 \approx 0} \approx 1 \\
f_2(\xi_2) &= \exp(-\xi_2)|_{\xi_2 \approx 0} \approx 1
\end{aligned} \tag{4.104}$$

En este caso f_1 y f_2 son del mismo orden de magnitud, por lo que la forma funcional de la superficie libre no puede ser sujeta a aproximaciones y por tanto se debe usar la relación (4.96) completa para estudiarla. Por otra parte, de la condición sobre las coordenadas ξ_j para el caso estudiado, se puede dar una aproximación a la posición y tiempo de cruce entre ondas (la posición y tiempo de cruce exactos en el caso de una simple superposición lineal), puesto que

$$\begin{aligned}
\xi_{1_{cr}} \approx 0, \quad \xi_{2_{cr}} \approx 0 &\implies \\
x_{cr} &= x_{1_o} + c_1 t_{cr}, \\
x_{cr} &= x_{2_o} + c_2 t_{cr},
\end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$t_{cr} = \frac{x_{1_o} - x_{2_o}}{c_2 - c_1}, \quad (4.105)$$

$$x_{cr} = \frac{c_2 x_{1_o} - c_1 x_{2_o}}{c_2 - c_1}. \quad (4.106)$$

Después de la interacción de ondas solitarias ($t \rightarrow \infty$)

En la posición esperada de la onda 1 ($\xi_1 \approx 0$; $\xi_2 \ll 0$).

Nos hemos ubicado en una región cerca de la que se esperaba encontrar la cresta de la onda menor 1 si es que las ondas solitarias hubieran subsistido aún después de haber interactuado de forma no-lineal (así que $\xi_1 \approx 0$). En tal caso, la onda 1 ya habría sido rebasado por la onda mayor 2, por lo que $\xi_2 \ll 0$. Los límites de las f_j correspondientes a este caso son:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1) &= \exp(-\xi_1)|_{\xi_1 \approx 0} \approx 1 \\ f_2(\xi_2) &= \exp(-\xi_2)|_{\xi_2 \ll 0} \gg 1 \end{aligned} \quad (4.107)$$

Encontremos de las relaciones anteriores la forma límite de la superficie libre (al mantener únicamente los términos cuadráticos en f_2):

$$\begin{aligned} \eta(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)) &\approx \frac{4A_1 K_{12} f_1}{(1 + K_{12} f_1)^2} \\ &= \frac{4A_1 \hat{f}_1}{(1 + \hat{f}_1)^2}, \quad \text{con} \\ \hat{f}_1 &= K_{12} f_1 = e^{\log K_{12}} e^{-\xi_1} = \exp(-(\xi_1 - \log K_{12})) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x - x_{1_o} - c_1 t}{b_1} - \frac{b_1 \log K_{12}}{b_1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x - (x_{1_o} + b_1 \log K_{12}) - c_1 t}{b_1}\right)\right) \\ &= \exp\left(-\left(\frac{x - (x_{1_o} - \theta_1) - c_1 t}{b_1}\right)\right), \quad \text{donde} \\ \theta_1 &= -b_1 \log K_{12} = -b_1 \log\left(\frac{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1}}\right)^2 \\ &= 2b_1 \log\left(\frac{\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}\right). \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\text{Así: } \eta(x, t) \approx A_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \frac{x - (x_{1_o} - \theta_1) - c_1 t}{b_1}\right) \quad (4.109)$$

Encontramos que la forma de la superficie libre en la región estudiada es efectivamente idéntica a la de la onda solitaria menor 1 antes del cruce; aún después de que éste ocurre no cambian ni su altura ni su velocidad. Pero, como se había comentado antes, hay una evidencia de la interacción no-lineal, y ésta es la posición de la cresta, que se retrasa por una distancia θ_1 de la posición que se esperaba en el caso de una simple superposición lineal entre las ondas solitarias.

En la posición esperada de la onda 2 ($\xi_2 \approx 0$; $\xi_1 \gg 0$).

Estudiamos ahora la región por la que se esperaba encontrar la cresta de la onda mayor 2 si es que se mantiene después de su interacción con la onda menor 1, de modo que $\xi_2 \approx 0$. Como la

onda 2 estaría muy por delante de la onda menor 1, se tendría que $\xi_1 \gg 0$. Los límites de las f_j correspondientes son:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1) &= \exp(-\xi_1)|_{\xi_1 \gg 0} \ll 1 \\ f_2(\xi_2) &= \exp(-\xi_2)|_{\xi_2 \approx 0} \approx 1 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Sustituyendo (4.110) encontramos la forma de la superficie libre en la región estudiada (despreciando los términos con f_1):

$$\begin{aligned} \eta(f_1(\xi_1), f_2(\xi_2)) &\approx \frac{4A_2 f_2(\xi_2)}{(1 + f_2(\xi_2))^2} \\ &= A_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi_2}{2}\right), \quad \text{por lo que} \\ \eta(x, t) &\approx A_2 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \frac{(x - x_{2o}) - c_2 t}{b_2}\right) \end{aligned} \quad (4.111)$$

Vemos que aún después de la interacción también la onda solitaria 2 se mantiene, sin que cambien su forma, altura o velocidad. Pero si comparamos la función (4.111) obtenida para la superficie libre en este caso con la relación (4.103) correspondiente a la onda 2 antes del cruce, se observa la evidencia de la interacción no-lineal: como en el caso de la onda 1, la posición de la cresta sufre un desfase respecto a la posición correspondiente a una superposición lineal. En el caso de la onda 2, la cresta se adelanta por la distancia $\theta_2 = 2b_2 \log\left(\frac{\sqrt{A_2} + \sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}}\right)$, que ya habíamos calculado en (4.102).

En conclusión, de acuerdo a la solución de la ecuación KdV al problema de dos ondas solitarias, hemos encontrado que dichas ondas interactúan como solitones: después de su cruce, las dos ondas solitarias emergen sin que cambie ni su forma (dada por la función sech^2 que las describe), ni su altura, ni la velocidad con la que se desplazan. Sin embargo, hemos encontrado que la única diferencia entre la interacción no lineal propia de la KdV con el caso de una superposición lineal es el desfase de las posiciones de las crestas. De hecho, el sentido de los desfases encontrados en nuestro análisis es comprensible si imaginamos la situación física: la onda mayor 2 va detrás de la menor 1, y conforme la alcanza le va cediendo parte de su masa de agua al cruzarse, de modo que poco a poco la onda que va adelante alcanza la altura de la onda 2, y de esta forma la cresta 2 se adelanta respecto a su posición previa, sufriendo un desfase positivo; por el contrario, la onda que viene detrás pierde altura durante el cruce, por lo que la onda 1 menor parece retrasarse. De hecho, ésta es una representación física característica de los solitones: ondas “localizadas” cuya interacción se puede comparar, en cierta medida, a un choque de partículas.

Capítulo 5

Experimentación en ondas solitarias en agua

En este apartado final de la Tesis se muestra el trabajo experimental de interacción de ondas solitarias en agua desarrollado en el Laboratorio de Oleaje del Instituto de Ingeniería de la UNAM, que es coordinado por el Dr. Rodolfo Silva Casarín y el Dr. Edgar Mendoza Baldwin. Como introducción, se da un resumen de las investigaciones experimentales antecedentes en el tema, tanto de generación como de interacción de ondas solitarias, así como un apartado sobre el Laboratorio de Oleaje, para finalmente presentar la investigación experimental sobre ondas solitarias realizada en él.

5.1. Antecedentes experimentales

5.1.1. Generación de ondas solitarias con un pistón

En el artículo [17], Guizien y Barthélemy exponen sus estudios empíricos sobre la precisión en la generación de una onda solitaria mediante un pistón móvil. Consideran que dicho aparato es adecuado para originar ondas largas, puesto que éstas, de acuerdo a la teoría de ondas en aguas someras (SW: Shallow Water Theory) tienen una velocidad horizontal uniforme en la dirección vertical. Para generarlas, la velocidad del pistón (cuya posición $X(t)$ es función del tiempo) se iguala a la velocidad horizontal promedio \bar{u} del flujo que se desea generar, de modo que

$$\frac{dX}{dt} = \bar{u}(X, t) = \frac{\int_{-h}^{\eta(X, t)} u(X, y, t) dy}{\int_{-h}^{\eta(X, t)} dy} \quad (5.1)$$

La velocidad promedio dependerá del campo de velocidades correspondiente a la onda, y por lo tanto diferirá de acuerdo al modelo de ondas largas en el que nos basemos para deducir \bar{u} . A su vez, del movimiento que se le dé al pistón dependerá que la onda solitaria generada sea de buena o mala calidad.

Los autores usaron en la generación de ondas tres diferentes soluciones explícitas de tipo onda solitaria que corresponden a distintas aproximaciones: KdV, de Rayleigh y ondas de aguas someras en aproximación de segundo orden (SW2), y las compararon con estudios previos de otro tipo de ondas, las de Goring/Boussinesq. Para todas ellas, la forma funcional de la superficie libre es la misma:

$$\eta(x, t) = A \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\beta}{2} x - ct \right) \quad (5.2)$$

Sin embargo, las teorías difieren en el valor de los parámetros β y c (ver [17] para más información). Los valores correspondientes a la teoría KdV se mencionaron en la Sección 4.4.1; los asociados a la teoría de Ondas de Rayleigh pueden ser consultados en [4] y son

$$\beta_r = \sqrt{\frac{3A}{h^2(A+h)}}, \quad (5.3)$$

$$c_r = \sqrt{g(h+A)} \quad (5.4)$$

Vale la pena mencionar que c_r fue la relación empírica encontrada por Scott Russell en su estudio de las ondas solitarias (véase [8]).

En [17] se comenta que (5.1) y (5.2) determinan la ecuación implícita de movimiento del pistón, que es:

$$X(t) = \frac{2\alpha}{\beta} \tanh\left(\frac{\beta(ct - X(t))}{2}\right) \quad (5.5)$$

Integrando (5.5) de $-\infty$ a $+\infty$ se puede deducir el desplazamiento total S del pistón

$$S = \frac{4\alpha}{\beta} \quad (5.6)$$

Según (5.5) y (5.6), el movimiento para generar la onda sería de duración infinita; en realidad, el tiempo durante el que el pistón se movería se estima pensando en que el desplazamiento se trunca cuando se ha efectuado un desplazamiento por $0.999S$. Bajo esta consideración, en el artículo [17] aparece escrita la siguiente expresión para el tiempo τ de movimiento del pistón:

$$\tau = \frac{4}{\beta c} (\tanh^{-1}(0.999) + \alpha) \quad (5.7)$$

Sin embargo, al realizar los cálculos indicados en [17], encontramos que la expresión correcta para τ es:

$$\tau = \frac{4}{\beta c} (\text{arc tanh}(0.999) + \alpha) \quad (5.8)$$

La diferencia entre (5.7) y (5.8) se debe a una cuestión de notación.

Sus experimentos fueron desarrollados en un canal de oleaje de 36m de largo, 0.55m de ancho y 1.2m de altura (dimensiones similares a las del Canal de Olas del II-UNAM), con un pistón de movimiento controlado por una computadora. Se hacía mover o bien resolviendo (5.5) numéricamente, o aproximando el argumento de la tanh en el miembro derecho de (5.5) tomando $X = 0$ (con base en la hipótesis de desplazamientos pequeños). Colocaron sensores resistivos del nivel de agua en distintas posiciones a lo largo del canal para medir la altura de la superficie en dichos puntos. Se trabajó con una profundidad del agua de $h = 0.20\text{m}$ y $h = 0.30\text{m}$. Los resultados de su investigación son, entre otros, los siguientes:

- Las ondas generadas siguiendo los parámetros de KdV y SW2 son seguidas por una onda dispersiva cuya altura es, en promedio, del 5% de la elevación máxima A de la onda solitaria. En cambio, las ondas de Rayleigh se acompañan de una pequeña elevación de agua cuyo tamaño es, en promedio, de un 3% de A . En ocasiones, la altura de la onda dispersiva de KdV es del doble de la correspondiente a la onda de Rayleigh (las alturas mencionadas fueron registradas a 20m del extremo del canal en el que se originan las olas).
- Conforme las ondas solitarias generadas usando KdV o SW2 se propagan, sus amplitudes decaen notablemente, en comparación con las ondas de Rayleigh. Si bien esto se puede atribuir a un amortiguamiento de la ola (debido a la disipación viscosa) dado por la denominada fórmula de Keulegan, la disminución en amplitud predicha por esta relación es menor a la observada para el primer grupo de ondas

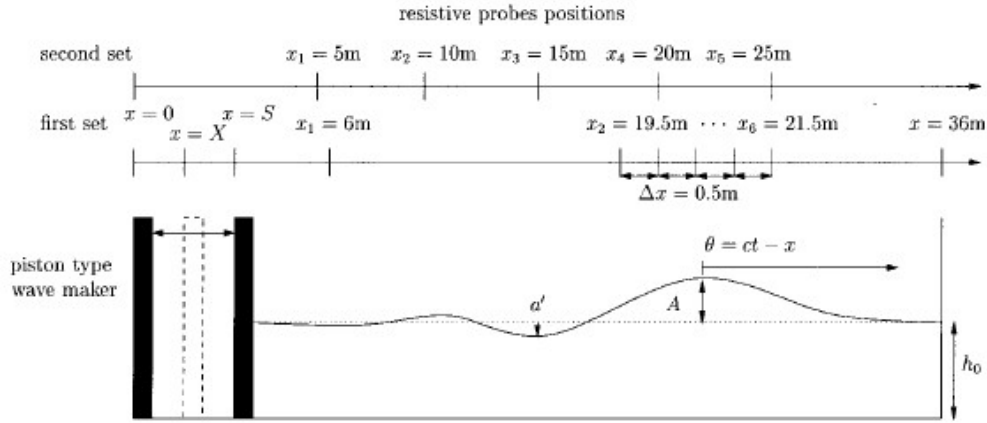


Figura 5.1: Diseño experimental de [17]. Posiciones de los sensores: $\{x_i\}$. ($0.2\text{m} \leq h \leq 0.3\text{m}$, $0.015\text{m} \leq A \leq 0.15\text{m}$, $a' \leq 0.1A$, $S \leq 0.55\text{m}$).

mencionadas. Para una profundidad de $h = 0.3\text{m}$, la relación de Keulegan predice que la onda debe haber disminuido su amplitud en un 3.3% después de haber recorrido 13.5m; sin embargo, las ondas KdV y SW2 a tal distancia decaen en su altura en un 5 o 6%. En cambio, las ondas de Rayleigh tienen un decaimiento en amplitud no mayor al 3%, y en promedio del 1.5%. Además, comparando con los estudios previos de ondas de Goring/Boussinesq, se observó que para estas ondas, con una profundidad de $h = 0.1\text{m}$ y una altura $A = 0.175h$, se presentaba un atenuamiento en la amplitud del 17% después de 10m de recorrido, siendo el predicho por la fórmula de Keulegan de 11%. En contraste, con una profundidad de $h = 0.2\text{m}$ y una altura $A = 0.2h$, después de 13.5m de recorrido el decaimiento en amplitud para ondas de Rayleigh es de 5.5%, y para ondas KdV y SW2, el atenuamiento es de 8%, siendo el predicho por la fórmula de Keulegan de 4.8%.

Los dos resultados previos indican que las ondas de Rayleigh son las ondas solitarias de mayor pureza entre las comparadas, puesto que el residuo que las acompaña en su formación es de menor magnitud que el de las otras ondas con las que se experimentó. A su vez, son las ondas que alcanzan a estabilizarse con mayor rapidez entre las estudiadas, puesto que la variación en su altura conforme avanzan es menor que la de las ondas solitarias asociadas a otras teorías. Estas dos observaciones son de importancia si se considera hacer experimentos de interacción entre dos ondas solitarias, puesto que es conveniente distinguir entre los cambios en las propiedades de las ondas debidos a la interacción y los correspondientes a la calidad de la generación de cada onda solitaria. En conclusión, las ondas solitarias indicadas para realizar experimentos sobre la interacción de un par de ellas son las Ondas de Rayleigh, al ser las de mayor pureza.

Como explicación a estos resultados, se comenta en el artículo que las ondas Goring/Boussinesq, KdV y SW2 son acompañadas de residuos que necesitan una mayor distancia para separarse de la elevación principal que para las ondas de Rayleigh, por lo que se da una interacción energética de mayor duración entre esas dos masas de agua, dando como resultado ondas de agua de menor estabilidad. Además, concluyen que la supremacía en pureza y estabilidad de las ondas de Rayleigh sobre las otras ondas estudiadas se debe a que la teoría de ondas de Rayleigh describe mejor el coeficiente de decaimiento β_r dado en (5.3).

5.1.2. Interacción de ondas solitarias en agua

W. Craig, C. Sulem y demás autores exponen en [18] su estudio numérico y experimental de las interacciones entre dos ondas solitarias, enfocándose en los cambios en sus propiedades, así como en el residuo en la superficie luego del cruce (inelástico) entre ellas. Es importante mencionar que estudiaron interacciones tanto de ondas contra-propagantes (con sentidos de movimiento opuestos, encontrándose en su desplazamiento)

como de co-propagantes (ondas que se desplazan en el mismo sentido, alcanzando la trasera a la onda de adelante y por tanto, interactuando con ella); sus resultados experimentales en el último tipo de interacción son los de interés para nuestro estudio.

Los experimentos fueron desarrollados en un canal de olas de 13.2m de largo y 0.25m de ancho, con una profundidad del agua de (5.000 ± 0.025) cm (las dimensiones son similares a las del apartado anterior, por un factor cercano a 3), fijando la altura de la onda mayor en $A_2 \approx 0.4h = 2$ cm y variando sistemáticamente la de la menor, de $A_1 \approx 0.1h = 0.5$ cm a $A_1 \approx 0.3h = 1.5$ cm. Las mediciones de la altura de la superficie del agua se hicieron con cuatro sensores (no-invasivos) de la elevación de agua, colocados a cierta altura de la superficie sobre un armazón móvil, desplazado sobre el canal con la velocidad promedio de las ondas estudiadas para seguir la evolución del perfil de la superficie libre a lo largo de su interacción.

Cabe mencionar que el generador de ondas también en este caso fue un pistón controlado por una computadora, al que se le especificaba su posición y velocidad. Para lograr la situación co-propagante, el pistón creó dos perfiles de ondas solitarias en rápida sucesión, siendo el primero de menor amplitud que el segundo (para que el último tuviera una mayor velocidad, y así pudiera alcanzar al primero). Las ondas solitarias generadas fueron del tipo KdV; esto será de importancia al considerar sus resultados, a la luz de lo comentado en la sección anterior. Notaron, para el caso co-propagante, que la diferencia entre las velocidades de las dos ondas a cruzarse no es mucha, y por lo tanto la interacción entre ellas dura un tiempo relativamente largo, efectuándose sobre una distancia considerable sobre el canal. Es por esto que desplazaron el armazón de sensores con la velocidad promedio de las dos ondas, manteniéndose sobre la zona de interacción.

Paralelamente, los resultados de sus experimentos fueron comparados con lo predicho por la teoría de solitones de la Ecuación KdV, y con una serie de simulaciones numéricas de ondas solitarias, usando un algoritmo desarrollado por ellos para resolver las Ecuaciones de Euler. Notaron que, en la zona de interacción de crestas, la forma geométrica de la superficie registrada experimentalmente concordaba con la obtenida de las simulaciones numéricas, siendo diferente, justo a la mitad de la interacción, de la dada por la solución de dos solitones de la ecuación KdV. Sin embargo, también se dieron cuenta de que, en los experimentos, se daba un atenuamiento en las amplitudes de las olas, en comparación a las simulaciones y a la solución a la KdV (dándose para esta última una importante sobreestimación de la amplitud durante la mayor parte de la interacción), y a su vez, el desfase en las posiciones de las crestas producto de la interacción es mayor en las simulaciones que en las observaciones experimentales (sobre todo para la onda pequeña).

Estos señalamientos son atinadamente atribuidos por los autores a procesos disipativos en el experimento, probablemente no considerados en la teoría KdV ni en las simulaciones. Dichos procesos deben ser de importancia por dos razones. La primera es que, al ser la interacción co-propagante, la duración de la interacción en la que seguramente se dan tales procesos es lo suficientemente larga para que sus efectos sean notables (de lo cual también están conscientes los autores). La segunda razón, no considerada por ellos, se refiere a la estabilidad de las ondas generadas experimentalmente. Como se hizo notar en el apartado anterior, las ondas KdV “experimentales” sufren un atenuamiento considerable, bastante mayor que el propio de las ondas de Rayleigh, y tienen una estabilidad menor que estas últimas, al interactuar por más tiempo con el residuo de su generación. Todo esto vuelve a señalar que las Ondas de Rayleigh son las indicadas para hacer un estudio experimental de interacciones entre ondas solitarias, para que así los cambios observados en las olas se deban solamente a su interacción y no a su propia estabilización.

Hay otros hechos observados durante su investigación que deben ser destacados. De sus estudios numéricos, encuentran que después de la interacción co-propagante, se da un incremento en la amplitud de la ola grande, no mayor a 0.1%, mientras que la menor pierde amplitud (sin embargo, este fenómeno no cambia de forma monótona con las amplitudes de las dos ondas solitarias). La máxima elevación de la superficie del agua es en todo momento menor a la altura (final) de la mayor de las olas y mayor que la menor. Es de importancia esto último al considerar la calibración de sensores en nuestro experimento, de la que hablaremos en otra sección, puesto que nos asegura que podemos tomar como cota superior del intervalo de medición la altura máxima de la ola. Acerca del residuo de la interacción, éste se forma después del cruce detrás de la menor de las ondas solitarias; sin embargo, es tan pequeño que se debe magnificar 100 veces la gráfica de la simulación para apreciarlo.

Por último, cabe destacar la clasificación de las interacciones (de acuerdo a sus simulaciones) en tres

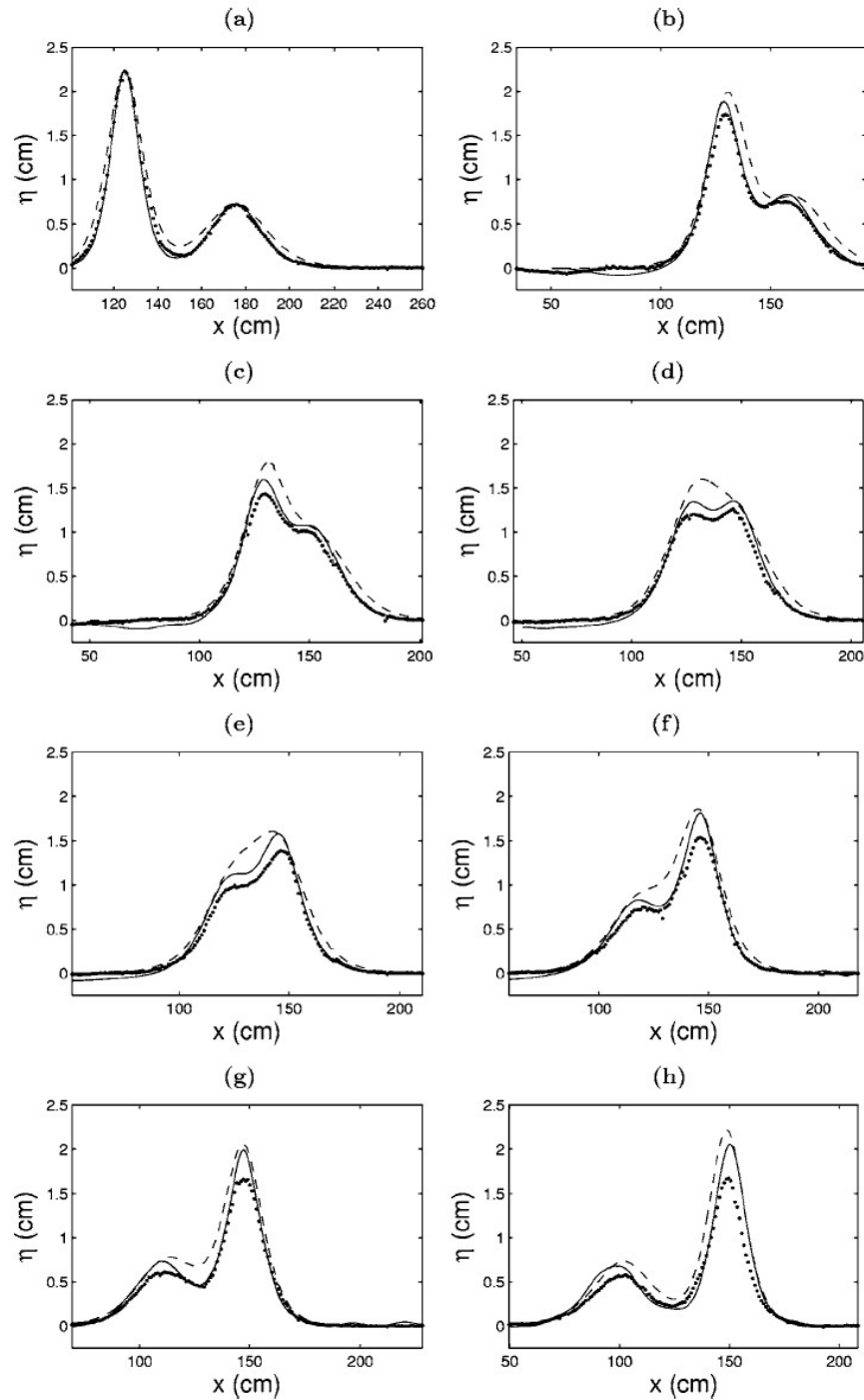


Figura 5.2: Interacción co-propagante en [18] de dos ondas solitarias de alturas $A_2 = 2.295$ cm, $A_1 = 0.730$ cm en distintos tiempos: (a) $t = 2.90304$ s, (b) 5.50196 s, (c) 6.40513 s, (d) 7.05025 s, (e) 7.60014 s, (f) 8.50024 s, (g) 9.50478 s, y (h) 11.30191 s: Simulaciones (línea continua), Datos experimentales (puntos), Solución KdV de 2 solitones (línea punteada). Se ha alineado el centro de masa de todas las gráficas de elevación de agua.

distintos tipos, análogos a tres categorías de colisiones solitónicas en la Ecuación KdV, llamadas categorías de Lax:

Tipo A: Se da cuando las alturas de las olas son comparables; en todo momento en la interacción hay dos crestas bien definidas, siempre separadas, dándose un intercambio de alturas entre ellas para que así la mayor supere a la menor.

Tipo C: Observada al ser dispares las alturas de las olas. La ola menor, al ser alcanzada por la mayor, es absorbida en ella, acelerándose la cresta mayor. Se forma así una única cresta, de la que después sale reemitida la cresta menor por su parte trasera, para luego separarse de ella y formarse definitivamente las dos crestas.

Tipo B: Es un régimen de colisión intermedio entre los dos tipos anteriores, de comportamiento más complicado. Primero, la cresta pequeña es absorbida y luego reemitida de la ola mayor, después de lo cual hay una región central de dos crestas. En ella la ola menor crece y la mayor disminuye, intercambiando así sus alturas. La separación de las crestas se da de forma similar a lo mencionado.

Si bien toda simulación de colisión pertenecía a alguna de estas tres categorías, ya encontradas en la teoría de interacciones solitónicas de la Ecuación KdV, la transición observada de un régimen de colisión a otro no concuerda con el predicho por esta teoría. Definiendo como A_2 la altura de la ola mayor y A_1 la de la menor, la transición del tipo de colisión A al B se da, según la teoría, cuando: $\frac{A_2}{A_1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.62$, y la transición de B a C cuando: $\frac{A_2}{A_1} = 3$. Sin embargo, ellos encontraron que las transiciones entre regímenes de colisión no son simples funciones de la proporción de amplitudes, variando de acuerdo al valor de A_1 , o de A_2 . Para el caso que ellos estudiaron, $A_2 = 0.4h$, siendo h la profundidad del agua, la transición de A a B se dió cuando: $\frac{A_2}{A_1} = 2.941$, y la de B a C cuando: $\frac{A_2}{A_1} = 3.536$. Es notable el comportamiento de la superficie libre en la zona de interacción justo cuando el juego de parámetros es tal que coincide con el de la transición entre B y C: en este caso se forma una sola cresta central, a punto de romperse en dos crestas separadas, pareciendo propagarse en ese momento a “velocidad infinita”. En realidad, dicha velocidad infinita es aparente, pues realmente debe haber dos crestas tan pegadas que no se distinguen, aumentando eventualmente la altura de la cresta menor.

Es importante saber que las transiciones entre regímenes no tienen una dependencia sencilla en términos de los parámetros de interés. De este modo, parece conveniente para nuestro experimento mantener fijos tantos de ellos como se puedan; los más naturales a controlar son la profundidad h y la altura de la ola mayor, A_2 , variando así A_1 .

Cabe mencionar que el grado de inelasticidad de las “colisiones” entre ondas depende del tipo de interacción. Para el tipo A, en el que siempre hay dos crestas bien diferenciadas, la colisión entre las masas de agua es de un carácter más elástico que para los tipos B y C, de menor “pureza” de interacción, en los cuales se juntan las ondas en una sola cresta (al menos por cierto tiempo), y por tanto en estos últimos regímenes se da una mayor transferencia de energía en la formación del residuo de la colisión. Esto también se deberá considerar al comparar los perfiles antes y después de la interacción de ondas solitarias en nuestros experimentos, esperando una mayor similitud entre ellos para colisiones tipo A que para B y C, dada la influencia de los procesos disipativos presentes.

5.2. Laboratorio de Oleaje del Instituto de Ingeniería de la UNAM

5.2.1. Generación de Oleaje

Nuestros experimentos de interacción entre ondas solitarias se desarrollaron en el Laboratorio de Oleaje del Instituto de Ingeniería de la UNAM, que cuenta con un Canal de Olas de 35m de largo, 0.8m de ancho y 1.2m de altura (fig. 5.3) . Para generar olas en el canal, se hace mover un pistón vertical ubicado en uno de sus extremos, mediante un motor eléctrico controlado por la aplicación de cómputo HP Wavemaker.



Figura 5.3: Canal de Olas del Instituto de Ingeniería, UNAM

Con tal aplicación bien se puede generar un tipo de oleaje preconfigurado (sinusoidal, por ejemplo, con ciertos parámetros de frecuencia, altura de ola, etc.), o bien, cuando el oleaje que se desea generar no viene preconfigurado (como en el caso de las ondas solitarias), se hace lectura de un archivo de datos, dado por el usuario, en el que se encuentra indicada la posición del pistón a lo largo de un intervalo de tiempo.

En la generación del oleaje, es importante considerar la denominada función de transferencia (hidráulica) del pistón. Se llama así a la proporción entre la altura de ola generada y el desplazamiento del pistón requerido para ello; dicho factor varía de 0.6 a 2.0, aumentando su valor con la profundidad (y también con la frecuencia de la onda). La función de transferencia se determina a partir de ensayos experimentales en el canal a una profundidad h dada, si bien existen valores teóricos para ella (ver [22]). La labor experimental en el Canal de Olas usualmente requiere de profundidades mayores a 0.30m, para las cuales se han establecido empíricamente las funciones de transferencia correspondientes. En la experimentación realizada, no obstante, se trabajó con una profundidad menor ($h = 0.16\text{m}$), por lo cual se requirió usar una función de transferencia teórica.

También es importante considerar que hay limitaciones en la altura de ola que es posible alcanzar a cierta profundidad h . La primera limitación se debe al rompimiento de la ola al rebasar cierta altura; en el caso particular de una onda solitaria, la máxima altura por rompimiento es, teóricamente, $A \approx 0.78h$, y empíricamente $A \approx 0.7h$ (véase [7]). Las otras limitaciones están relacionadas con el desempeño del pistón: el máximo desplazamiento, velocidad y fuerza que puede alcanzar. En principio, el manual [20] especifica los siguientes valores límite:

$$\begin{aligned}
 \text{Máximo Desplazamiento: } S &= 0.86 \text{ m} \\
 \text{Máxima Velocidad: } U &= 0.75 \text{ m/s} \\
 \text{Máxima Fuerza: } F &= 3.2 \text{ kN}
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Lo cierto es que la limitación en la altura de las olas por estos factores depende de la profundidad h del agua, determinándose tal dependencia a partir de evaluaciones empíricas del pistón (realizadas antes de nuestra participación en el Canal). De este modo, la limitación en la altura $A_{\text{máx}_S}$ por desplazamiento del pistón depende de h en la forma:



Figura 5.4: Sensor resistivo del nivel de agua

$$A_{\text{máx}_S} = 0.3471570893 - 0.5103806009h + 0.4239129782h^2 - 0.1774624638h^3 + 0.0241709257h^4 \quad (5.10)$$

Y la dependencia en h de la máxima altura $A_{\text{max}_U}(h)$ limitada por la velocidad del pistón es:

$$A_{\text{máx}_U} = 0.04165030194 + 0.7280900439h - 1.1311647297h^2 + 1.396348913h^3 - 0.5768227176h^4 \quad (5.11)$$

5.2.2. Instrumentos de Medición: Sensores Resistivos

Los instrumentos utilizados para medir el nivel de agua sobre posiciones fijas del canal fueron los sensores resistivos del nivel del agua (fig. 5.4). Estos sensores están formados por dos varas metálicas paralelas, unidas en sus extremos inferiores por un aislante, y en los superiores por un conductor, conectado con un cable a una terminal. Cada sensor se fija verticalmente sobre un soporte metálico (ver figura 5.5), dejando que parte de él esté sumergido en el agua, la que cierra el circuito entre el par de varillas. Dado que hay una respuesta lineal (por la Ley de Ohm) de la corriente del circuito a la longitud de la sección de las varillas por la que circula (aumentando la corriente mientras más sumergido está el sensor), se puede medir indirectamente, a través del voltaje de salida en que es convertida la corriente en cada sensor, la elevación del agua respecto al nivel de la superficie en reposo. De acuerdo al manual [23], el límite de resolución de los sensores es, en general: $dY = \pm 0.2$ mm.

Previo al inicio de toda sesión experimental, se realiza la calibración de los sensores de nivel, usando un programa de cómputo. En la calibración se toma un nivel de agua de referencia, que normalmente es el del agua en reposo, estableciendo en cero (mediante potenciómetros) los voltajes de todos los sensores a ese nivel. Posteriormente, se varía la longitud de los sensores que está sumergida en agua, y el programa registra el voltaje correspondiente a esta diferencia en el nivel de agua del sensor; este proceso se realiza dos veces, de forma que se tienen, junto con el cero para el nivel de referencia, tres valores de voltaje en función del nivel de agua para cada sensor. El programa ajusta a cada triada de datos una recta por mínimos cuadrados, obteniéndose así, para cada sensor, la relación entre el voltaje registrado en cada sensor y la elevación de agua que le corresponde. Finalmente, el programa escribe en un archivo los parámetros (pendientes, ordenadas al origen y coeficientes de correlación R^2 de los ajustes lineales realizados). La calibración se considera aceptable cuando $R^2 \geq 0.99990$.



Figura 5.5: Grupo de sensores de nivel montados en un soporte metálico.

5.2.3. Adquisición de Datos

Para realizar mediciones en un ensayo experimental se usa un programa de adquisición de datos. En él se deben indicar el número de sensores usados (que en nuestros experimentos fue 11, todos los disponibles en el laboratorio), así como la frecuencia de muestreo (la frecuencia de registro del voltaje de salida en los sensores) y el número de datos a registrar. En nuestros experimentos se usó una frecuencia de muestreo de 50 Hz, y puesto que en la mayoría de los casos la duración de los experimentos era menor a 30s, generalmente en cada ensayo se archivaron 1500 datos. Cada conjunto de datos asociado a un sensor es calibrado con el ajuste lineal correspondiente, para pasar así de las mediciones de voltaje a los valores de la elevación del agua.

5.3. Experimentos de cruce de dos ondas solitarias

5.3.1. Planeación y Desarrollo Experimental

El objetivo de nuestros experimentos fue lograr el cruce de dos ondas solitarias copropagantes de diferentes alturas A_1 , A_2 ($A_1 < A_2$) a lo largo de un canal de agua a una profundidad h , y observar si su interacción es de tipo solitónica: es decir, si después del cruce el perfil de la superficie libre corresponde al de dos ondas solitarias de características semejantes a las originales, pero ahora con la onda de mayor altura delante de la menor y con un desfaseamiento en las posiciones de las crestas.

Se dispuso de una longitud de 30m en el canal para los experimentos. En el extremo opuesto al pistón, se colocaron costales de arena y rocas con un perfil parabólico, para así minimizar la reflexión de las ondas solitarias. Como se comentó en la Sección 5.1.2, para estudiar sistemáticamente la naturaleza de las interacciones, se decidió mantener fijas tanto la profundidad h como la altura de la onda mayor A_2 , y se tomó como único parámetro variable la altura de la onda menor A_1 . El valor de la profundidad del agua con la que se trabajó, $h = 0.16\text{m}$ se escogió de modo que las ondas solitarias alcanzaran a separarse después de su interacción (de acuerdo a la fórmula de Russell (5.4) para la velocidad de una onda solitaria, $c_r = \sqrt{g(h + A)}$, por lo que, conforme la profundidad sea mayor, la velocidad relativa $c_1 - c_2$ entre dos ondas solitarias será menor, requiriendo una mayor longitud de recorrido para separarse). La amplitud de la onda mayor se fijó en $A_2 \approx 8\text{ cm}$ ($\alpha_2 \approx 0.5$), la mayor altura que fue posible generar, dada h , sin que se presentaran efectos de rompimiento

en la onda. De esta forma, en lo que se refiere a la onda mayor, nuestros experimentos tienen un carácter no-lineal más alto que los realizados por Craig et. al. en [18], dado el valor de α_2 . La altura de la onda menor tomó valores desde $A_1 \approx 2$ cm ($\alpha_1 \approx 0.13$, $A_1/A_2 \approx 0.25$) hasta $A_1 \approx 5$ cm ($\alpha_1 \approx 0.3$, $A_1/A_2 \approx 0.6$), con el fin de observar distintos tipos de interacción dadas las proporciones entre alturas. Vemos que las alturas menores utilizadas tienen parámetros α_1 de valores similares a los de [18].

Se buscó generar el par de ondas solitarias de la siguiente forma: primero se le proporcionaba al pistón el movimiento adecuado para generar la onda de menor amplitud, después se dejaba pasar cierto intervalo de tiempo τ_{int} , y finalmente se movía al pistón de forma que generara la onda mayor, que alcanzaría a la primera. En un principio, para generar cada onda se hacía mover al pistón de acuerdo a la ecuación de movimiento (5.5) linealizada (es decir, tomando $X = 0$ dentro del argumento de la tanh), con los parámetros de Rayleigh β_r (5.3) y c_r (5.4) y con el tiempo de movimiento de la pala τ dado por (5.8). Sin embargo, al proceder de esta forma se observó que para la mayoría de las parejas de alturas de ondas solitarias la onda mayor rompía, independientemente del tiempo τ_{int} entre generación de ondas; en los únicos casos en los que no se daba el rompimiento las ondas eran de alturas tan semejantes que no se alcanzaba a dar la interacción sobre el canal. Cabe mencionar también que el rompimiento no se presentaba cuando se generaba una sola onda solitaria. Por otra parte, antes de haber realizado los cálculos explícitos para llegar a la fórmula (5.8), se realizaron pruebas experimentales en las que se usó para τ la relación (5.7). Se observó que, aunque las ondas solitarias generadas no eran de la altura esperada, éstas eran reproducibles, y no se presentaba el rompimiento al generar dos ondas solitarias consecutivas de esta forma. Por tales razones, se decidió proceder de la última forma descrita para generar las ondas solitarias en nuestros experimentos. Los archivos de datos con la posición del pistón en el tiempo se elaboraron mediante un código en Fortran previamente desarrollado por el Dr. Rodolfo Silva.

Hay tres zonas en el canal en las que el perfil de la superficie libre durante el experimento es de natural interés: cerca del pistón, para registrar los perfiles iniciales de las ondas solitarias; la región de cruce entre olas (aunque ésta abarca una gran longitud del canal); y cerca del extremo final del canal, para observar si la superficie libre después de la interacción corresponde al de dos ondas solitarias semejantes a las originales. En el Laboratorio de Oleaje se disponía de once sensores de nivel y cuatro soportes metálicos para ellos, por lo que sólo se podría monitorear el nivel del agua en cuatro regiones del canal. De forma que los once sensores se dispusieron en las siguientes zonas (dado que el canal está dividido cada 2 metros por marcos (véase fig. 5.3), por conveniencia se decidió tomar al marco más cercano al pistón como el cero de referencia para indicar posiciones; dicho origen está a 0.84m de la posición del pistón en reposo):

1. Zona I: Un par de sensores para medir los perfiles iniciales de las ondas (y de forma indirecta sus velocidades promedio), ubicados en las posiciones: $X_{S_1} = 6.68\text{m}$, $X_{S_2} = 7.18\text{m}$.
2. Zona II: Tres sensores para registrar el principio de la interacción, en las posiciones: $X_{S_3} = 11.74\text{m}$, $X_{S_4} = 12.33\text{m}$, $X_{S_5} = 13.05\text{m}$.
3. Zona III: Cuatro sensores para observar la fase final de la interacción, en las posiciones: $X_{S_6} = 19.77\text{m}$, $X_{S_7} = 20.66\text{m}$, $X_{S_8} = 21.56\text{m}$, $X_{S_9} = 22.46\text{m}$.
4. Zona IV: Dos sensores para medir los perfiles finales de las ondas (y velocidades promedio) en caso de que se diera una interacción solitónica, en las posiciones: $X_{S_{10}} = 27.35\text{m}$, $X_{S_{11}} = 27.85\text{m}$.

La Zona I fue escogida de forma que a tal distancia del pistón llegaran los perfiles ya establecidos de ambas ondas, sin que se hubieran cruzado apreciablemente. Ante la imposibilidad de monitorear toda la región de interacción (dada la cantidad de soportes para sensores y su longitud), se decidió estudiar el perfil en las Zonas II y III, disponiendo en ellas la mayor cantidad de sensores. Respecto a la Zona IV, su posición satisfizo dos condiciones: que las ondas resultantes de la interacción llegaran a ella separadas; y que estuviera lo suficientemente alejada del extremo final del canal, para que la reflexión en él no afectara la medición de los perfiles finales.

El tiempo τ_{int} entre la generación consecutiva de las ondas se determinó empíricamente para cada valor de la altura menor. Para escogarlo, se buscó que con dicho τ_{int} tanto los perfiles iniciales como finales de las



Figura 5.6: Perfil de la onda menor antes del cruce. $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$.



Figura 5.7: Perfil de la onda mayor antes del cruce, $A_2 = 7.99\text{ cm}$, $X_{S1}=6.68\text{ m}$.

ondas fueran aceptables: que estuvieran suficientemente separadas y, en el caso de los perfiles finales, que fueran suaves y estabilizados.

En conclusión, cada experimento, determinado por su juego de parámetros h , a , A y τ_{int} , fue realizado diez veces, dejando reposar al agua del canal aproximadamente por ocho minutos, para después generar el par de ondas solitarias de acuerdo a lo mencionado. En las pruebas experimentales usadas para determinar el tiempo τ_{int} adecuado para cada experimento, el agua no se dejó reposar por mucho tiempo, ni tampoco se realizaron varias mediciones con un mismo juego de parámetros; sin embargo, las pruebas con un distinto τ_{int} al de los experimentos definitivos nos fueron útiles para observar en las mediciones de los sensores fases de la interacción que no era posible medir con el τ_{int} definitivo. De cualquier forma, al pensar en la reproducibilidad de lo observado en estas pruebas debe tenerse en cuenta la forma en que fueron realizadas.

En las fotografías 5.6 - 5.11 se muestran diversas etapas del experimento de cruce con $h = 16\text{cm}$, $A_1 = 3.26\text{cm}$ y $A_2 = 7.99\text{cm}$.



Figura 5.8: Superficie libre al inicio de la interacción (Zona II).



Figura 5.9: Superficie libre a la mitad de la interacción (perfil de meseta con dos crestas) a 15 m del pistón.

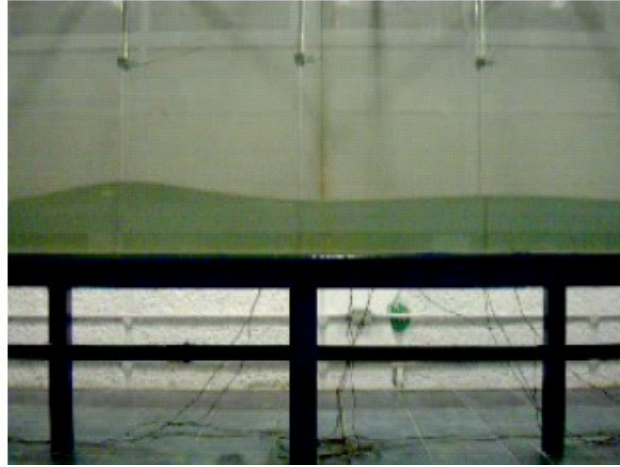


Figura 5.10: Superficie libre después de la interacción (Zona SIII): la cresta delantera es la mayor.



Figura 5.11: Superficie libre a 23 m del pistón: separación de las ondas solitarias.

5.3.2. Análisis de Datos y Resultados

Para analizar los datos de elevación de agua vs. tiempo medidos en cada experimento, se realizó un programa en Matlab. Dicho programa permite al usuario seleccionar los intervalos de tiempo de medición de su interés para cada sensor e indicar los extremos de las ondas solitarias observadas en los perfiles iniciales y finales de elevación. Después ajusta una función sech^2 a las mediciones de los perfiles iniciales y finales de las ondas, y al perfil inicial la solución de dos solitones de la Ecuación KdV de parámetros más convenientes, al resolver los problemas no lineales de mínimos cuadrados resultantes mediante un algoritmo de optimización incluido en Matlab (subrutina `lsqcurvefit`). Posteriormente, realiza una comparación de las ondas solitarias antes y después del cruce (mostrando ambas en una gráfica), contrasta las variables asociadas a ellas con los valores predichos por la teoría de ondas largas (en particular con los derivados de la solución KdV ajustada), y despliega gráficas de las mediciones de elevación vs. el tiempo para cada sensor fijo, junto con la elevación predicha por la solución KdV de dos solitones, y los ajustes sech^2 correspondientes en el caso de los sensores iniciales y finales. Al observar las gráficas, debe tenerse en cuenta que éstas no muestran el perfil de la superficie a un tiempo dado, sino que indican la elevación del agua sobre la posición fija del sensor en distintos tiempos de medición.

A falta de fórmulas de incertidumbre para los parámetros involucrados en los ajustes no lineales de curvas, les fueron asignadas las incertidumbres de las variables experimentales con las que estaban relacionadas (por ejemplo, a la altura estimada en el ajuste sech^2 se le asignó como incertidumbre la de las elevaciones de agua, 0.2mm). Cabe mencionar que en el programa fueron usados los criterios convencionales de asignación de incertidumbres para variables de medición tanto directa como indirecta, enlistados en [19].

Se estudió por separado cada juego de alturas de ondas solitarias, analizando diez mediciones con sensores en zonas intermedias (SII y SIII). Posteriormente, se promediaron los parámetros del cruce de ondas solitarias obtenidos del análisis de los diez experimentos (calculando la desviación típica experimental correspondiente a cada valor promedio); esto permitió observar que los parámetros mencionados tienen un carácter reproducible, y también condensar la información experimental obtenida en un conjunto de valores característicos. En lo siguiente, toda observación cuantitativa de estos parámetros de cruce se referirá a sus valores promedio. Mostramos a continuación lo obtenido del análisis para dos juegos de alturas de ondas solitarias, uno con $A_1 = 1.90\text{cm}$ y otro con $A_1 = 3.26\text{cm}$, estudiando la evolución del perfil de elevación conforme las ondas avanzan sobre el canal.

Experimento $h = 16 \text{ cm}$, $A_1 = 1.90 \text{ cm}$ ($\alpha_1 = 0.12$), $A_2 = 8.27 \text{ cm}$ ($\alpha_2 = 0.51$); $\tau_{int} = 0.4 \text{ seg.}$

1. Perfiles iniciales (Zona SI):

En la figura 5.12 se muestran los perfiles de las ondas solitarias registradas por el sensor S1 (en la posición $X_{S1}=6.68\text{m}$) conforme éstas pasan por él. Se observa que el ajuste de las curvas sech^2 a las mediciones es aceptable, aunque las “colas” de las ondas ubicadas en la zona intermedia a ellas ya han comenzado a traslaparse, lo que tal vez hace que el decaimiento de la onda mayor hacia la zona intermedia a las crestas difiera del ajuste. En la solución KdV de dos solitones ajustada las ondas aparecen algo más separadas, siendo de menor altura la zona intermedia a las crestas, debiéndose esto en parte a que el ajuste KdV predice para la onda mayor un coeficiente β_2 de mayor valor que el asociado a los datos con el ajuste sech^2 (en promedio, con una diferencia relativa de 9%), y por tanto la longitud de esta onda se estima menor al valor observado; el coeficiente β_1 asociado a los datos mediante el ajuste sech^2 difiere del esperado del ajuste KdV en menos de 1%. Cabe mencionar que los ajustes subestiman muy ligeramente la altura de las ondas solitarias: en promedio, la altura del ajuste KdV es menor en un 2% para la onda chica y en menos de 1% para la onda grande; para los ajustes sech^2 , su altura es menor a la máxima medición de elevación en menos de 1% para la menor y en 1% para la mayor. Por otra parte, las velocidades experimentales iniciales de las ondas solitarias fueron bastante cercanas a los valores predichos por la Ecuación KdV: para la onda menor, $c_1 = 1.33 \pm 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (concordando con la velocidad KdV dentro de los límites de medición), y para la onda mayor, $c_1 = 1.55 \pm 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (siendo la velocidad KdV mayor tan sólo en 2%).

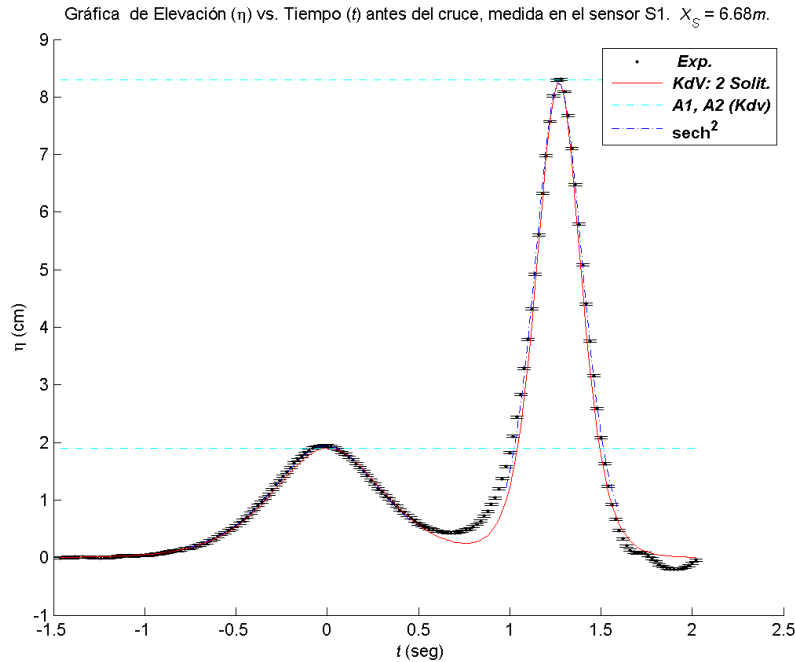


Figura 5.12: Elevación (η) vs. Tiempo (t) antes del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

2. Principio de la interacción (Zona SII):

En las gráficas 5.13 (correspondiente a una prueba experimental medida en S2 con un tiempo entre generación de las ondas de $\tau_{int} = 0.2\text{s}$) y 5.14 (medición en el sensor S3, $X_{S3} = 11.74\text{m}$) se sigue observando una elevación con dos crestas, pero éstas se han unido en una sola masa de agua. Aunque la altura de la cresta menor ha aumentado muy ligeramente, la de la cresta mayor ha disminuido considerablemente, probablemente porque cedió masa a la zona intermedia a las ondas, que ahora está llena de agua.

El comportamiento de la elevación en el tiempo predicho por la solución KdV sobre la posición de los sensores de la zona SII, en la primera parte de la interacción, coincide cualitativamente con el medido: la zona entre crestas se va alisando conforme las ondas avanzan sobre el canal, hasta que la cresta menor termina por convertirse en un “apéndice” de la cresta mayor (véanse las gráficas 5.14, de S3, 5.15, de S4, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, y 5.16, de S5, $X_{S5} = 13.05\text{m}$). De este modo, se ha formado una sola masa de agua en la que sobresale una cresta, que es de menor altura que en la solución KdV.

Sin embargo, hay diferencias cuantitativas entre los datos y la teoría al inicio de la interacción; vale la pena mencionarlas porque dan una idea de lo que sucede en este proceso. La elevación $\eta_{KdV}(t)$ de la solución KdV se ha adelantado ligeramente en el tiempo a la medición en la figura 5.14, lo que se observa al considerar la cresta menor; en cambio, la cresta mayor de la solución KdV presenta un adelanto en el tiempo notable respecto a su contraparte experimental, por lo que las crestas están más cerca en la teoría que en el experimento. Recordando que inicialmente las ondas estaban más separadas para la solución KdV que para las mediciones, se puede pensar que la teoría sobrestima la rapidez con la que se da la unión de las ondas al interactuar (aunque también podría influir el hecho de que la teoría KdV subestima la longitud de la onda mayor, por lo que las ondas se pueden acercar más). Si se observan las gráficas 5.15 y 5.16, se podrá notar que la zona asociada a la cresta menor de la solución KdV, conforme avanza sobre el canal, se adelanta temporalmente cada vez más respecto a su contraparte experimental.

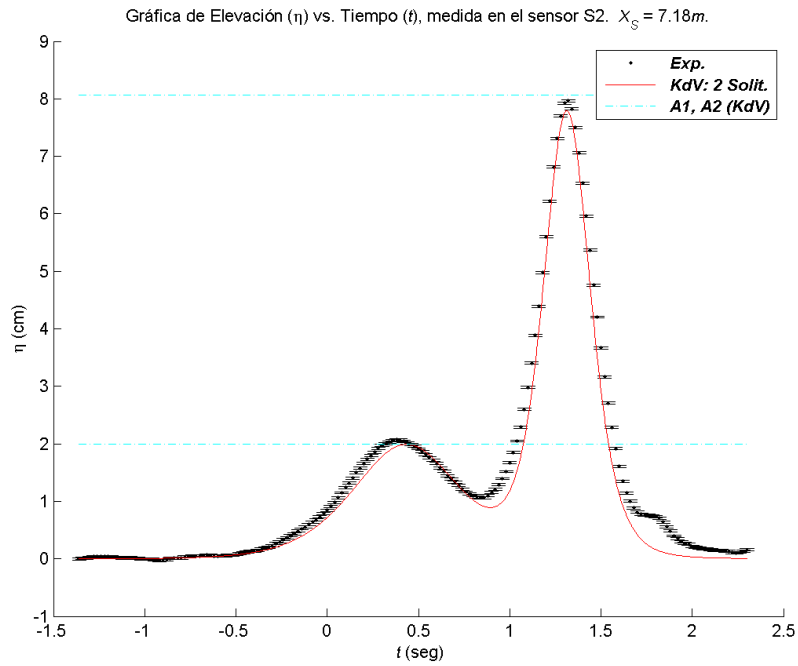


Figura 5.13: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S2} = 7.18\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)

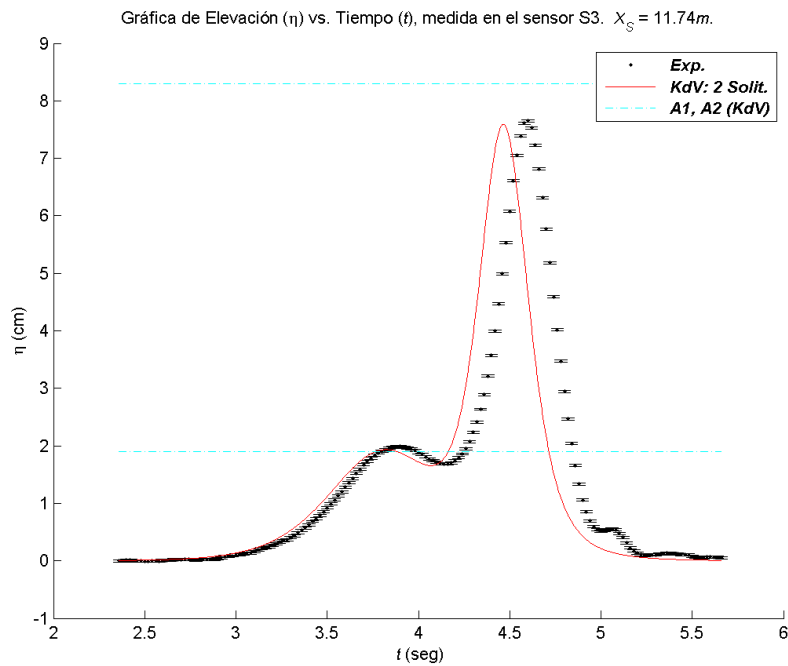


Figura 5.14: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S3} = 11.74\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

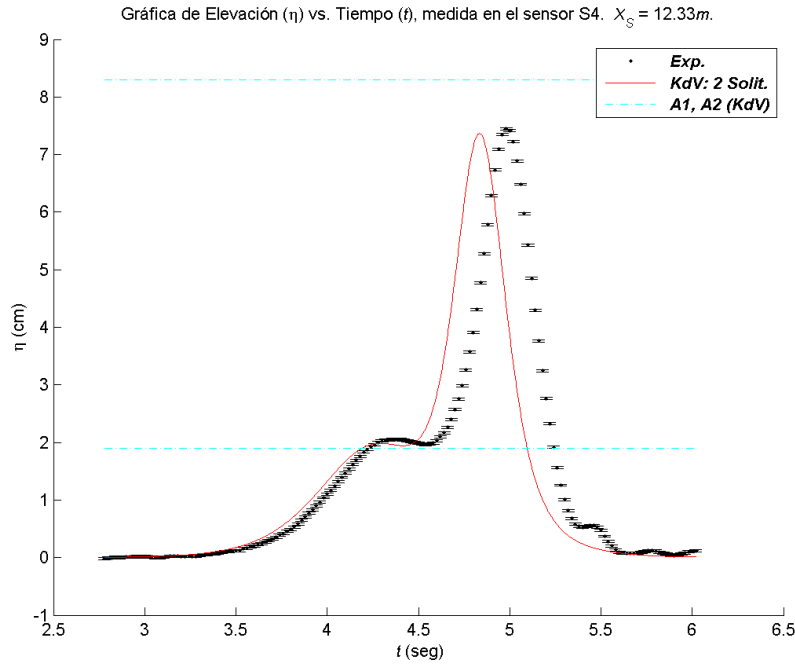


Figura 5.15: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

Por otra parte, se observó un fenómeno interesante en el sensor S5 que vale la pena comentar. En las mediciones de S3 (fig. 5.14) y S4 (fig. 5.15) la cresta grande es de mayor altura para la medición que para la solución KdV; tal vez esto se debe a que la longitud de la onda grande medida experimentalmente es mayor que en la teoría, de modo que la masa de agua que la conforma es mayor y entonces la disminución en su altura debido a la interacción es menor que en la teoría. Sin embargo, en las diez mediciones realizadas en S5, donde se ve cómo se completa la adhesión de la cresta menor a la mayor, formándose una sola masa de agua (gráfica 5.16), siempre se observó que la altura de la onda grande experimental pasaba a ser menor que la predicha por la ecuación KdV, lo cual es algo extraño, ya que en el ajuste KdV las crestas son más cercanas, de forma que la interacción está, en cierta forma, más avanzada. Sería interesante determinar las causas de este fenómeno, si es resultado de la evolución natural del fluido o si puede estar asociado al paso del agua por los sensores resistivos.

Los datos de pruebas experimentales realizadas con diferentes tiempos entre generación de ondas solitarias nos dan una idea de la evolución de la superficie libre a la mitad de la interacción. De nuevo hacemos énfasis en que las gráficas de estas pruebas experimentales sirven solamente para tener una idea cualitativa de la interacción, pues su τ_{int} es diferente al de las mediciones definitivas, 0.4seg, por lo que en sentido estricto el experimento de cruce de las pruebas es distinto al definitivo; además, en las pruebas no se cuidó de mantener en reposo el agua del canal por ocho minutos antes del experimento y tampoco se realizó un gran número de ensayos para cada una de ellas, como se hizo en las mediciones definitivas, por lo que la reproducibilidad de lo observado en las gráficas de estas pruebas experimentales no es del todo segura (de hecho, por tales razones no nos debe preocupar que en algunas de estas gráficas la máxima altura de los datos no sea menor que la de la KdV). De cualquier forma, comentamos que en las gráficas de pruebas 5.17, 5.18 y 5.19 se puede ver que el apéndice se va introduciendo en la cresta mayor, hasta que en la figura 5.20 se observa una elevación de agua suave, formada por una cresta algo achatada. Nuevamente, podemos observar que la fase de la interacción presentada en

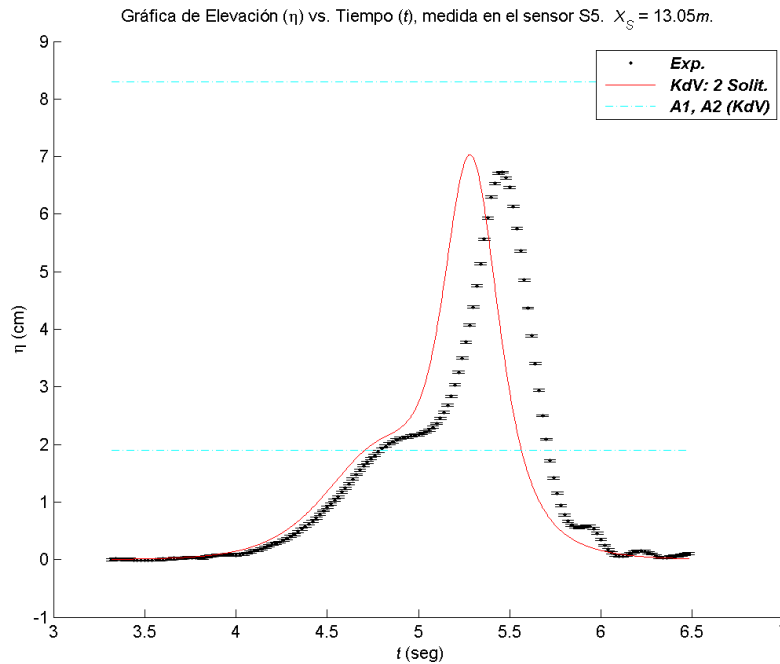


Figura 5.16: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

el ajuste KdV está adelantada a las observaciones experimentales. Además, la ecuación KdV predice una inmersión del apéndice a la cresta mayor algo más discreta que la experimental (véanse las figuras 5.17 y 5.18), teniendo la elevación del agua a la mitad de la interacción una cresta ciertamente aguda (confróntense las gráficas 5.19 y 5.20).

3. Desenlace de la interacción (Zona SIII):

Las figuras 5.21 - 5.28 muestran una elevación con una cresta de mayor altura en su parte delantera, junto a un “apéndice” de tamaño considerable detrás, que se van separando conforme avanzan sobre el canal hasta que se forman dos ondas solitarias. Para tener una imagen cualitativa del proceso de separación es de gran ayuda mostrar gráficas de una prueba experimental con $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. De esta forma, observamos que la gráfica experimental 5.21 es casi simétrica a la de la figura 5.17; en ambas se observa una suave ondulación detrás de la elevación de agua. Nótese que el ajuste KdV de la fig. 5.21 está de nuevo adelantado en la fase de la interacción, mostrando el inicio de la separación de la cresta mayor del apéndice. En la figura 5.22 se observa una elevación algo similar, pero no simétrica, a las observadas en las gráficas 5.15 y 5.16, ya que no es suave la zona de decaimiento del apéndice. Después, en la figura 5.23, se observa que al separarse el apéndice de la cresta mayor surge una pequeña cresta con una altura del orden de milímetros.

Las mediciones experimentales en SIII completan la imagen. En la figura 5.24, correspondiente a S6 ($X_{S6} = 19.77\text{m}$), se observa que la ondulación detrás de la elevación se ha suavizado y que la cresta pequeña surgida anteriormente es sólo una protuberancia sobre el apéndice. En cambio, en el ajuste KdV la forma del apéndice es mucho más suave; de nuevo esta gráfica está adelantada en la fase de la interacción respecto al experimento, al estar ya delineada la cresta menor, a la mitad de su separación de la cresta grande, que aparece de mayor altura que su contraparte experimental. Además, la elevación teórica sigue estando adelantada en el tiempo a la experimental. Las siguientes gráficas muestran cómo surge la cresta de la onda menor después del cruce, y lo que es interesante es que el proceso por el que

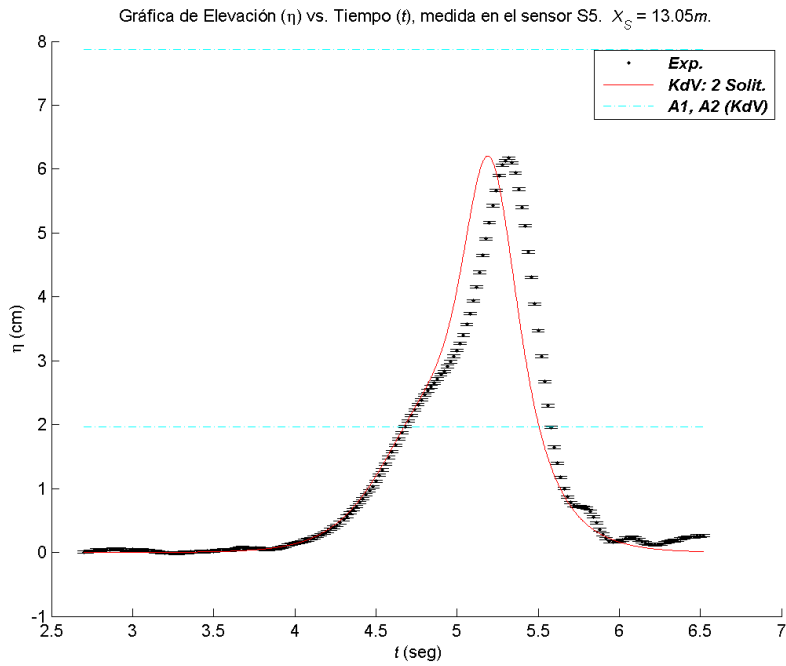


Figura 5.17: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90cm$, $X_{S5} = 13.05m$, $\tau_{int} = 0.3s$. (Prueba)

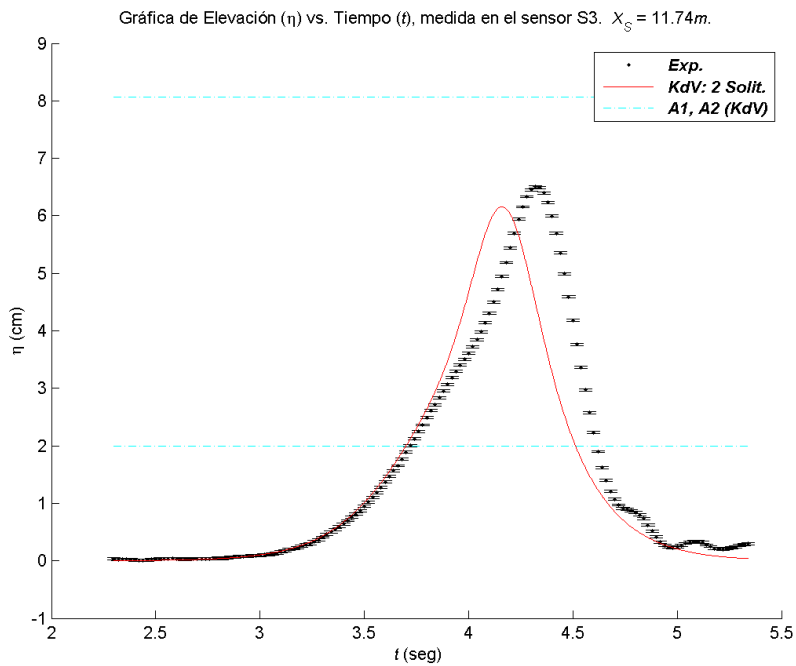


Figura 5.18: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90cm$, $X_{S3} = 11.74m$, $\tau_{int} = 0.2s$. (Prueba)

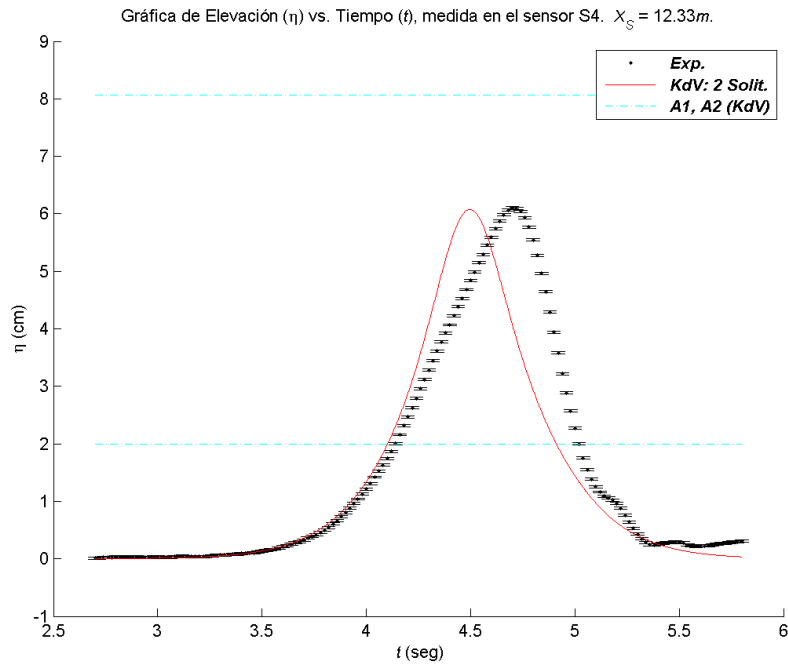


Figura 5.19: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)

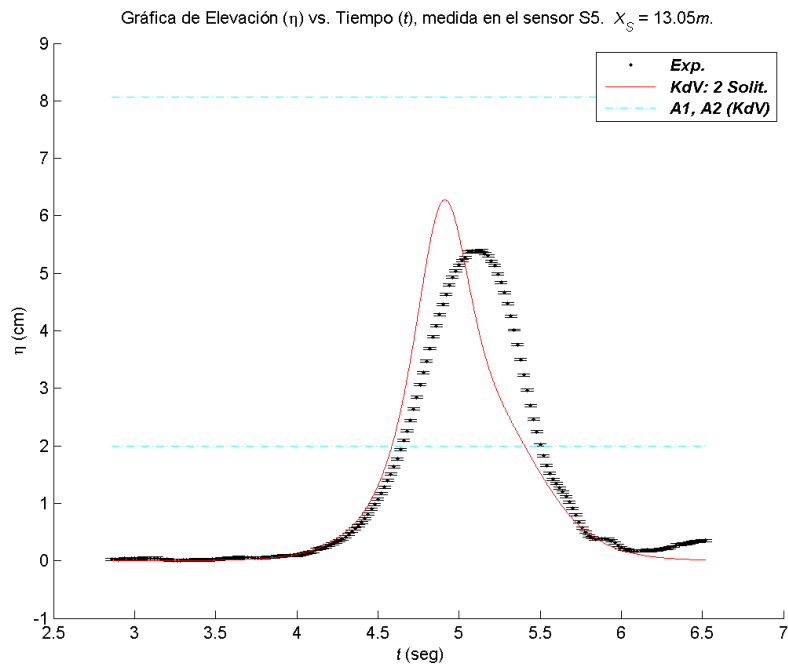


Figura 5.20: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)

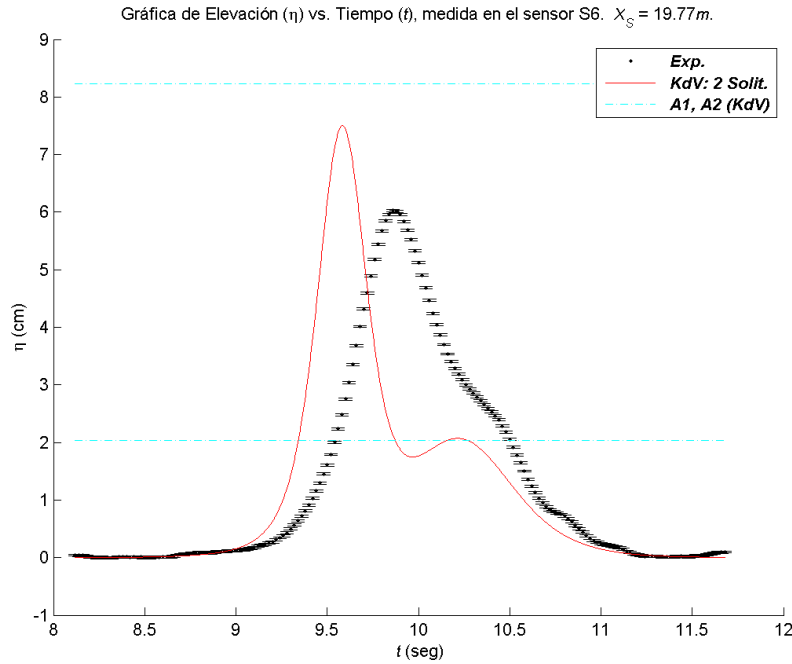


Figura 5.21: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90cm$, $X_{S6} = 19.77m$, $\tau_{int} = 0.5s$. (Prueba)

se forma difiere en cierta medida del predicho por la ecuación KdV. Contra lo que se habría esperado, no se origina de la pequeña cresta aparecida anteriormente: en la gráfica de S7 ($X_{S7} = 20.66m$, fig. 5.25) se observa que la parte trasera de la elevación primero le iguala en altura, para después originarse de ella la cresta de la onda menor, como se muestra en las gráficas de S8 ($X_{S8} = 21.56m$, fig. 5.26), S9 ($X_{S9} = 22.46m$, 5.27) y la figura 5.28 (prueba con $\tau_{int} = 0.2s$); la pequeña cresta se vuelve sólo una ligera protuberancia que descende sobre la zona intermedia a las crestas, y la cresta mayor va ganando altura conforme avanza sobre el canal. Como ya se ha comentado, el ajuste KdV en S7, S8 y S9 muestra un proceso de separación entre crestas más sencillo que el experimental y también más adelantado en tiempo y fase, como se deduce de la separación entre crestas y la altura de la onda mayor.

4. Perfiles finales (Zona SIV):

Las gráficas 5.29 y 5.30, correspondientes a los datos registrados en los sensores S10 y S11, muestran ya dos ondas solitarias separadas, con una zona intermedia algo perturbada, al aparecer la pequeña cresta como un residuo que acompaña a la onda mayor. Al respecto, es importante comentar que al analizar las gráficas de mediciones del mismo experimento sin sensores intermedios presentes (midiendo únicamente los perfiles iniciales y finales de las ondas) también aparece esta protuberancia a un lado del perfil final de la onda mayor; de esta forma, si se considera al residuo como una evidencia del proceso de desenlace descrito para la interacción experimental, esto sugiere en cierta medida que dicho proceso de desenlace es resultado de la evolución natural del fluido y no se debe al paso del agua por los sensores. Respecto al ajuste KdV, se pueden observar en las gráficas 5.29 y 5.30 de S10 y S11 dos ondas algo más separadas entre sí, con una zona intermedia limpia, sin la presencia de la protuberancia como residuo; tales ondas están adelantadas en el tiempo respecto a sus contrapartes experimentales, con alturas cercanas a las iniciales. Sobre los parámetros experimentales de las ondas finales, podemos decir que en S10 ($X_{S10} = 27.35m$, véase fig. 5.29), tanto la onda mayor como la menor (esta última con un perfil no tan suave) son de alturas cercanas a las originales, pero menores (con diferencias relativas

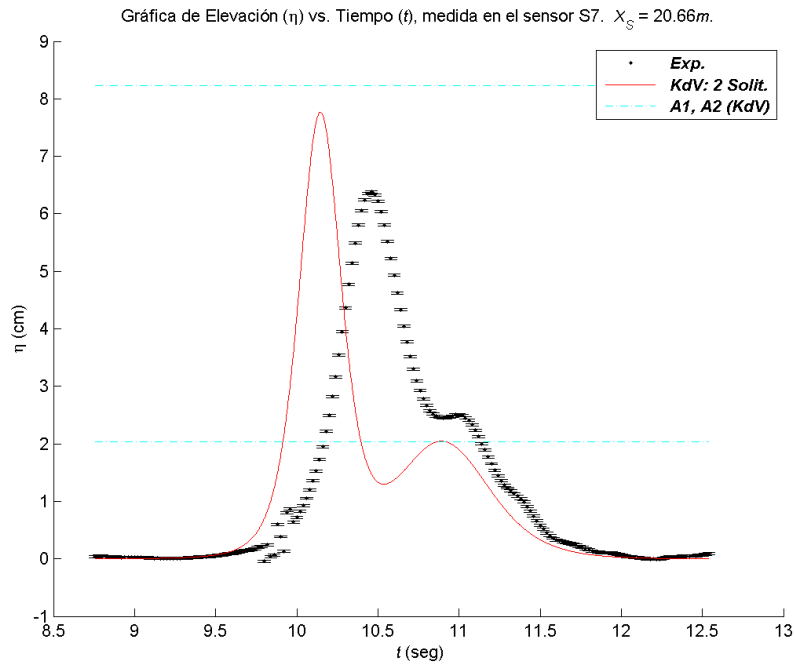


Figura 5.22: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)

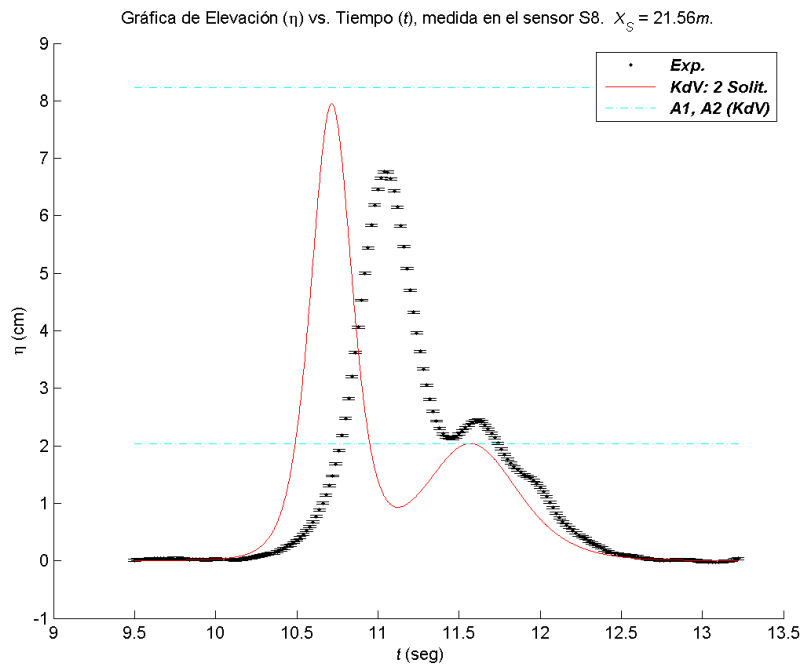


Figura 5.23: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)

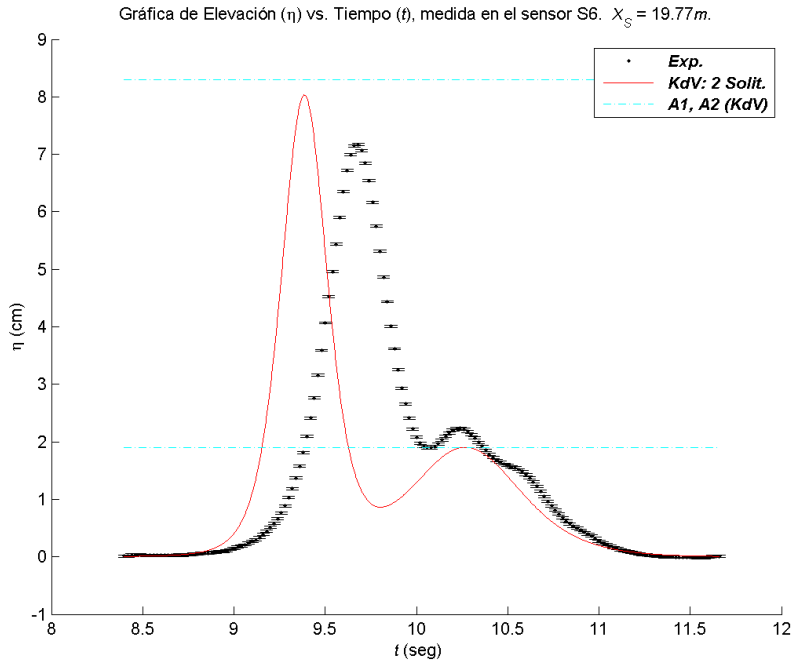


Figura 5.24: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90cm$, $X_{S6} = 19.77m$, $\tau_{int} = 0.4s$.

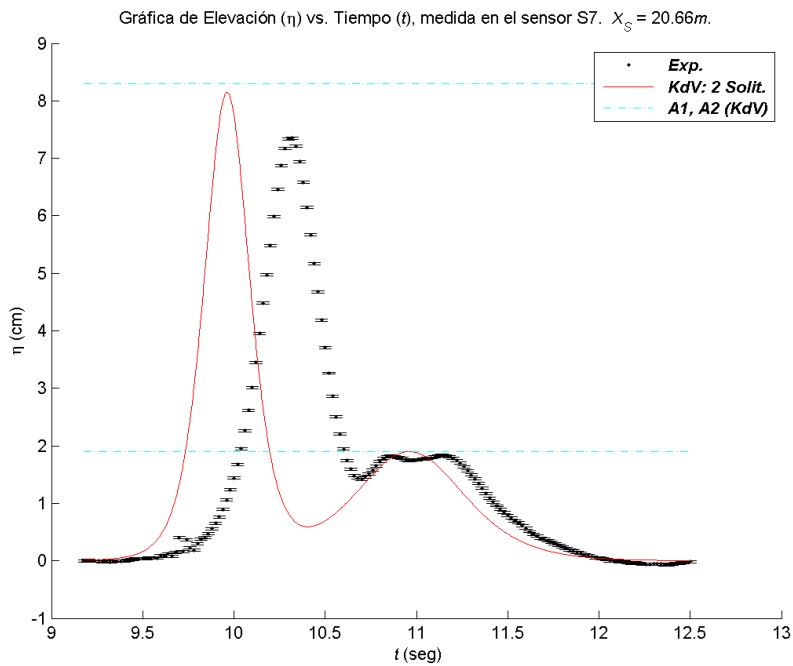


Figura 5.25: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90cm$, $X_{S7} = 20.66m$, $\tau_{int} = 0.4s$.

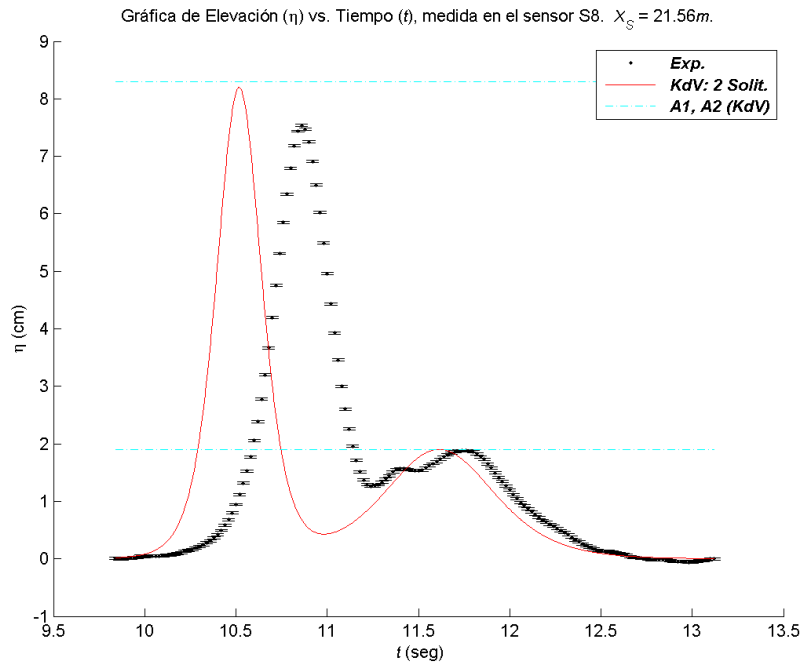


Figura 5.26: Gráfica de Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

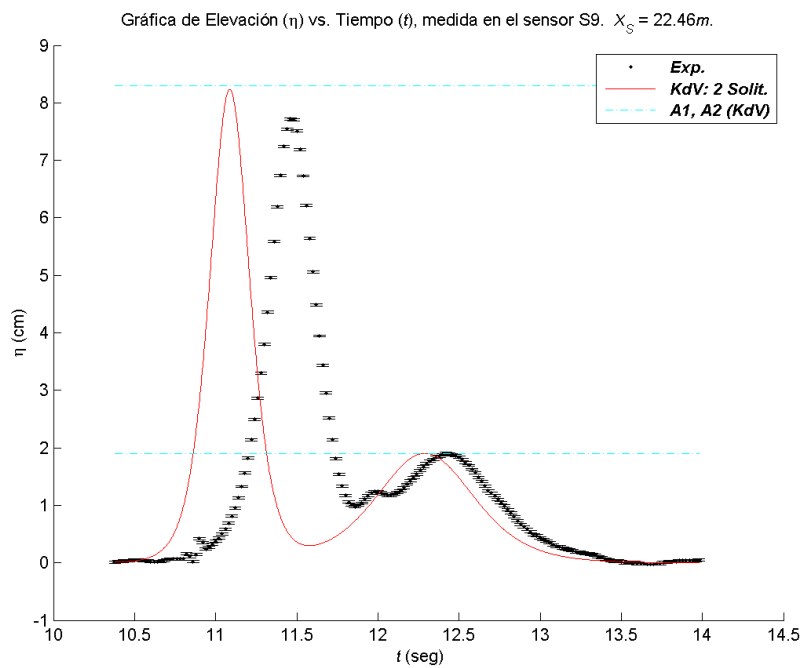


Figura 5.27: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S9} = 22.46\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

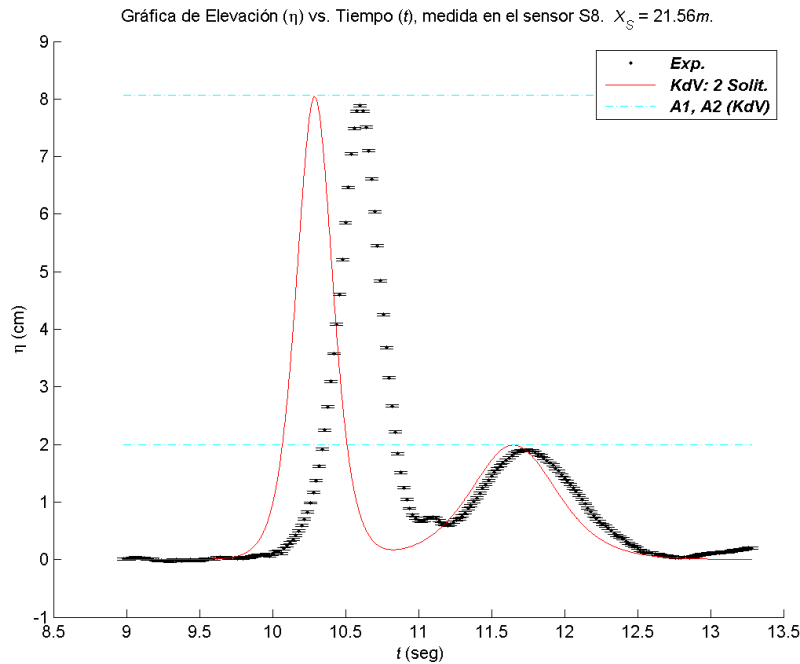


Figura 5.28: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)

del 6%), mientras que las ondas del ajuste KdV parecen haber alcanzado sus alturas originales: ahora las alturas del ajuste de las ondas KdV son mayores a las experimentales, en un 3% a la chica y en 6% a la grande. En S11 ($X_{S11} = 27.85\text{m}$), para el que se observa que el perfil de la onda menor se ha establecido con una forma más suave (figura 5.30), ambas ondas han aumentando sus alturas respecto a S10, pero siguen siendo menores a las mediciones originales (en 4%, aproximadamente) y a las ondas del ajuste KdV (en 2% la menor y 4% la mayor). Respecto a los coeficientes β del ajuste sech^2 en S11, el de la onda menor ha disminuido en 5% respecto a su valor original en S1 (y también respecto al valor asociado al ajuste KdV), mientras que el de la onda mayor aumentó 3% en comparación a su valor en S1 (siendo ahora más chico que el del ajuste KdV sólo por 6%). Las velocidades finales c_j de las ondas son bastante cercanas a los valores de KdV: la de la onda menor es, dentro de los límites experimentales, igual a la registrada originalmente (y a su vez a la predicción KdV), y la de la onda mayor es 3% menor a la original (y 5% menor a la propia de KdV). En conclusión, todo esto indica que la interacción entre las ondas solitarias fue solitónica, con ciertas diferencias ya comentadas respecto al comportamiento de la interacción para la solución de dos solitones de la Ecuación KdV, habiéndose dado casi por completo la interacción en la posición del sensor S11: puede ser que falte poco para que las ondas terminen de alcanzar su forma final y así queden establecidos sus valores de altura (A_j) y longitud (dados indirectamente por los coeficientes β).

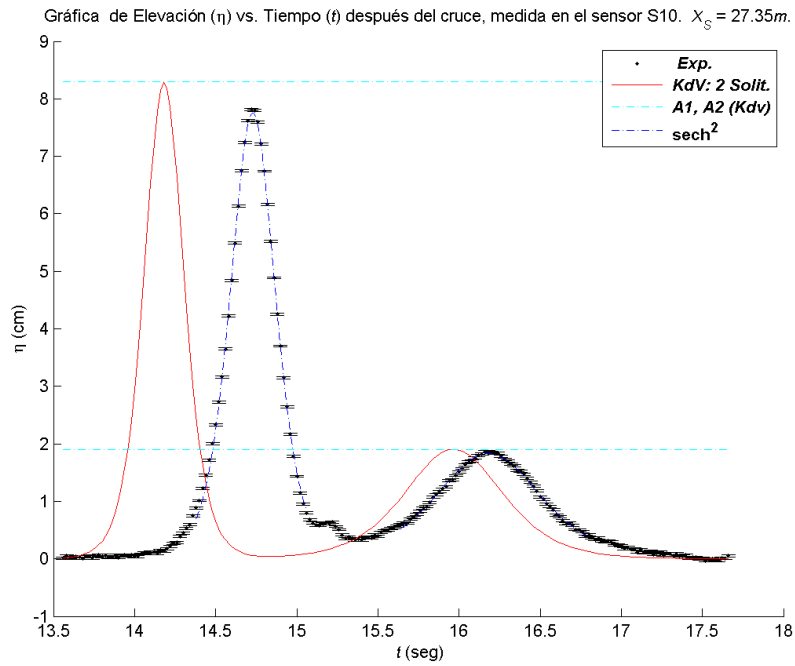


Figura 5.29: Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S10} = 27.35\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

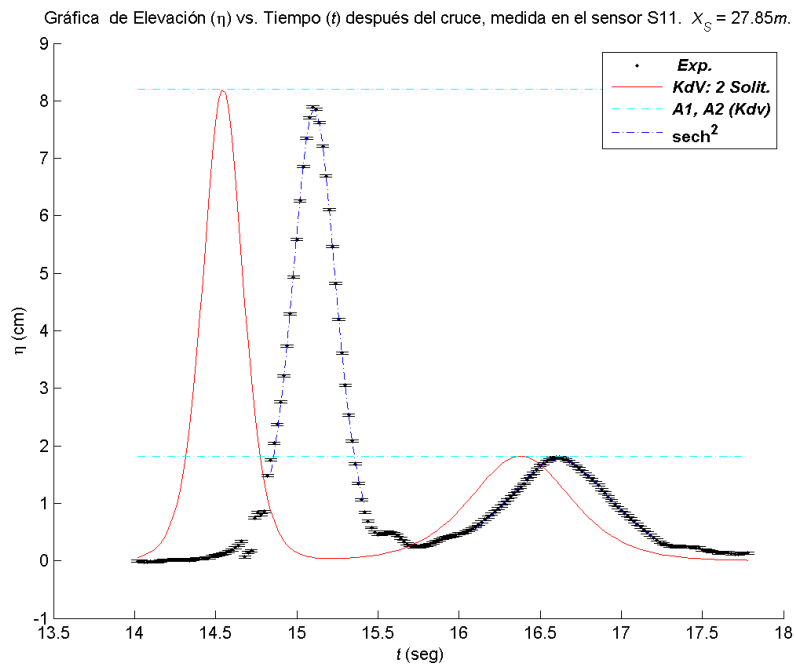


Figura 5.30: Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S11} = 27.85\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$.

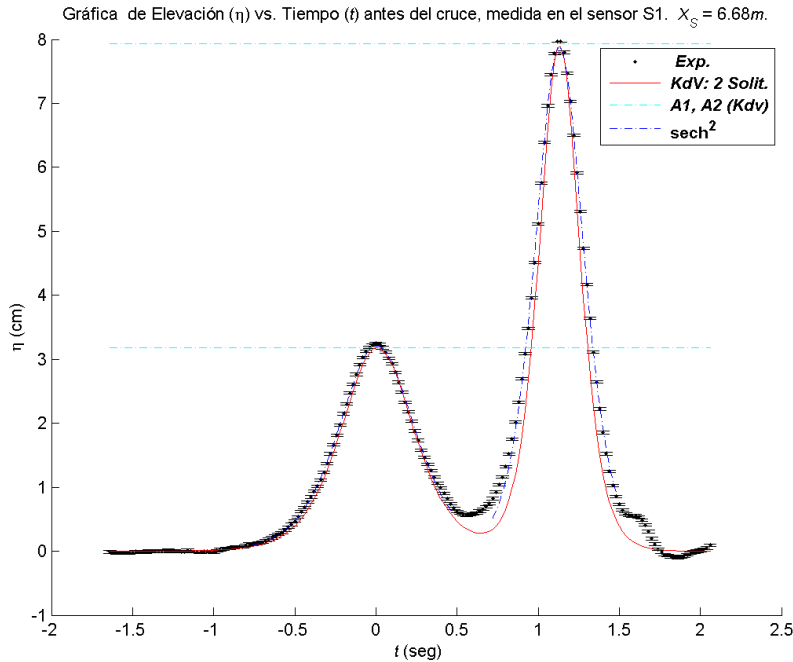


Figura 5.31: Elevación (η) vs. Tiempo (t) antes del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

Experimento $h = 16\text{ cm}$, $A_1 = 3.26\text{ cm}$ ($\alpha_1 = 0.21$), $A_2 = 7.99\text{ cm}$ ($\alpha_2 = 0.50$); $\tau_{int} = 0.2\text{ seg}$.

1. Perfiles iniciales (Zona SI):

Como en el experimento anterior, vemos en la gráfica 5.31 a las ondas cercanas antes del cruce, con una zona intermedia por encima a lo predicho por el ajuste KdV, que sigue subestimando las longitudes de las ondas (al sobreestimar el coeficiente β_1 en 6% y el β_2 en 20%) y también, aunque más ligeramente, las alturas de las ondas (la menor por 2% y la mayor por 0.7%). Las figuras 5.6 y 5.7, que aparecen en la sección de Planeación y Desarrollo Experimental, son fotografías de los perfiles iniciales de las ondas menor y mayor, respectivamente.

2. Principio de la interacción (Zona SII):

La primera mitad de la interacción es descrita cualitativamente por la solución KdV de forma aceptable; como en el experimento anterior, el ajuste es bueno sobre la cresta menor y un poco adelantado de la mayor. En este experimento, la onda mayor experimental es siempre de mayor altura que la teórica (véanse las figuras 5.32, 5.33 y 5.34). Experimentalmente se observa que las ondas se juntan en una sola masa de agua, pero ésta siempre presenta sobre ella dos crestas, que intercambian sus alturas de forma simétrica conforme avanzan sobre el canal; las gráficas 5.35-5.41 de pruebas experimentales, así como las fotografías 5.8 y 5.9 (observándose en esta última una meseta de agua con dos crestas ligeramente delineadas sobre ella), nos dan una idea de este proceso. En esto difiere, en parte, con la solución KdV pues, aunque justo a la mitad de la interacción ésta también predice una elevación simétrica con dos crestas iguales (figura 5.37), hay un momento entre la unión (y la separación) de crestas y la mitad de la interacción en que la solución KdV tiene una sola cresta y una región adyacente plana, relacionada con la cresta menor (véanse las gráficas de pruebas 5.36 y 5.38). De hecho, este comportamiento es propio del tipo de interacción B de acuerdo a las Categorías de Lax (véase la Sección 5.1.2), en contraste con el tipo de interacción del experimento, que corresponde más bien a una Categoría de Lax A. Recordando

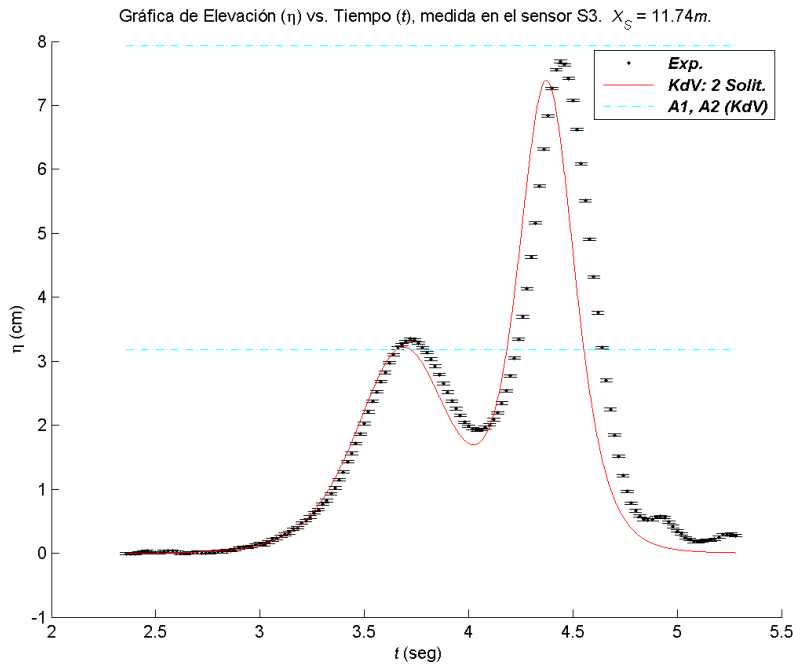


Figura 5.32: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S3} = 11.74\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

la Sección 5.1.2, notamos que para este experimento $A_2/A_1 \approx 2.45$, de modo que nos encontramos cerca de la transición de régimen de colisión de A a B (que teóricamente se da cuando $A_2/A_1 \approx 2.62$).

3. Desenlace de la interacción (Zona SIII):

En las figuras 5.40 y 5.41 de pruebas experimentales se observa la separación de las crestas, tanto en las gráficas teóricas como experimentales, aunque el ajuste KdV está adelantado respecto a las mediciones en cuanto a la fase de la interacción, como en las gráficas de pruebas anteriores. Sin embargo, también en este experimento hay una diferencia cualitativa con la teoría respecto a la formación de la onda menor: no se da un desprendimiento suave de la cresta mayor, como en la solución KdV (figuras 5.42 y 5.43), sino que la cresta menor inicial, al descender en altura, adquiere una forma irregular (fig. 5.44), apareciendo una protuberancia en su parte delantera que después se convertirá en un residuo sobre la zona intermedia a las ondas (ver figuras 5.45 y 5.46); la onda menor se forma de la parte trasera de la elevación. Tanto la onda mayor como la menor salen, después de la interacción, con alturas menores a las originales, pero conforme se siguen separando aumentan en altura. Las fotografías 5.10 y 5.11 corresponden al comienzo del desenlace de la interacción.

4. Perfiles finales (Zona SIV):

En las gráficas de mediciones en S10 (figura 5.47) y S11 (fig. 5.48) se observa a la solución KdV adelantada respecto a las mediciones, aunque la separación temporal entre ondas es parecida a la experimental. La gráfica de S10 muestra a las ondas del ajuste KdV alcanzando sus alturas originales, mientras que, experimentalmente, las ondas son de altura menor a la original (la menor en 9% y la mayor en 2%). Sin embargo, en S11 ambas han aumentado su altura: la onda chica ahora tiene una altura menor a la inicial en un 7% (siendo menor a la del ajuste KdV en 5%), mientras que la grande inclusive ha alcanzado una altura ligeramente mayor a la original, por menos de 1% (al igual que en comparación al ajuste KdV). La longitud de la onda menor es, aparentemente, mayor que la inicial (al

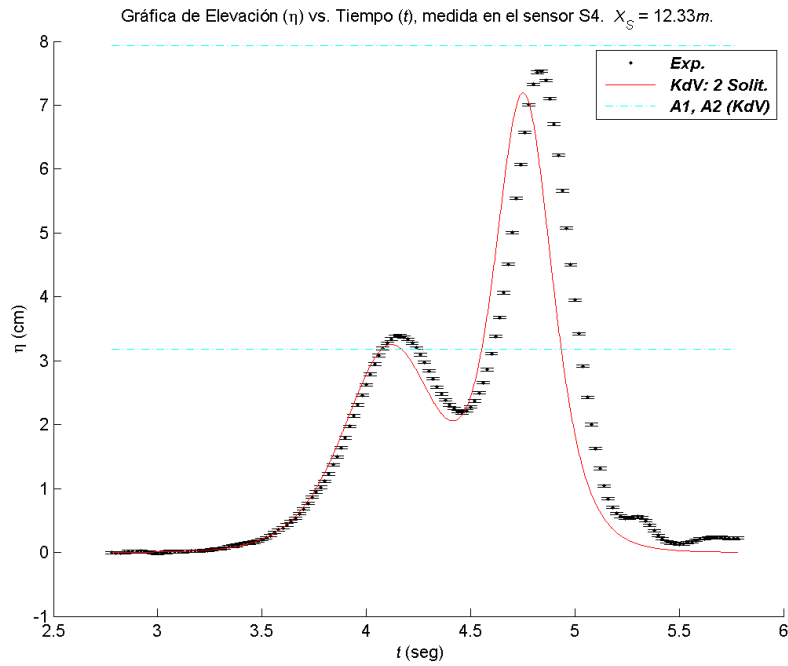


Figura 5.33: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

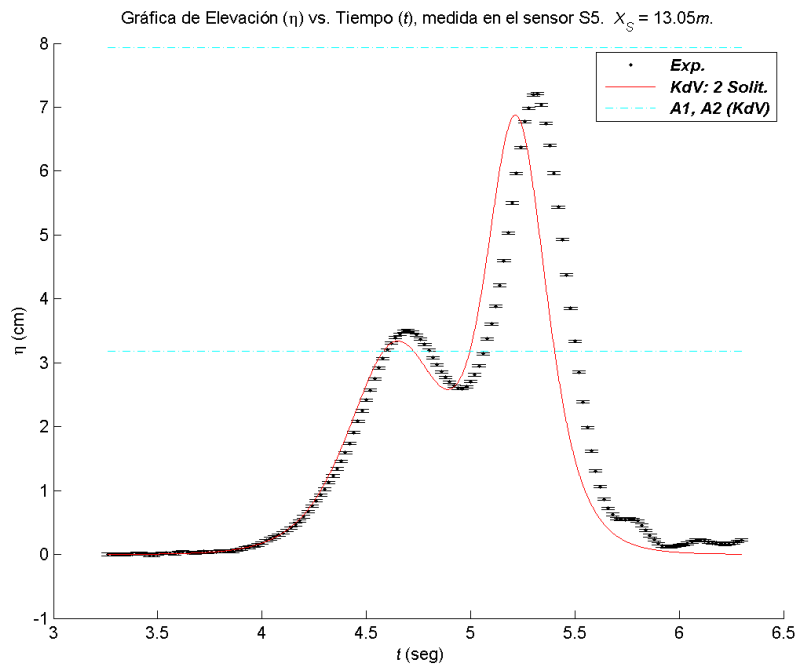


Figura 5.34: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

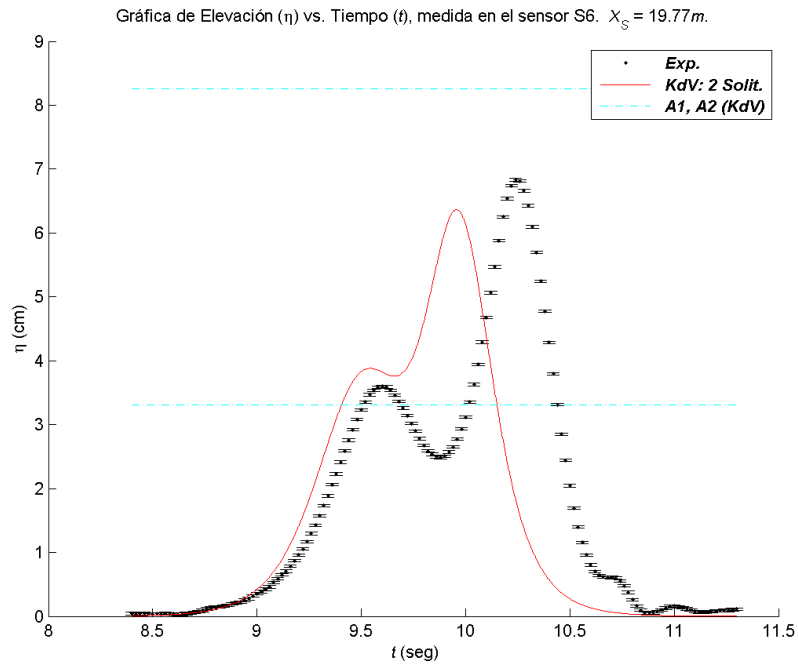


Figura 5.35: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)

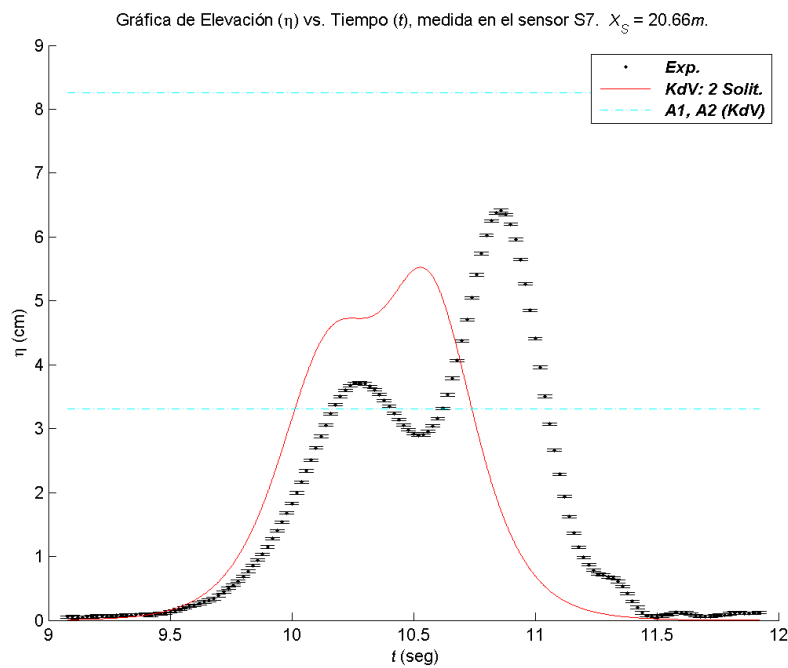


Figura 5.36: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)

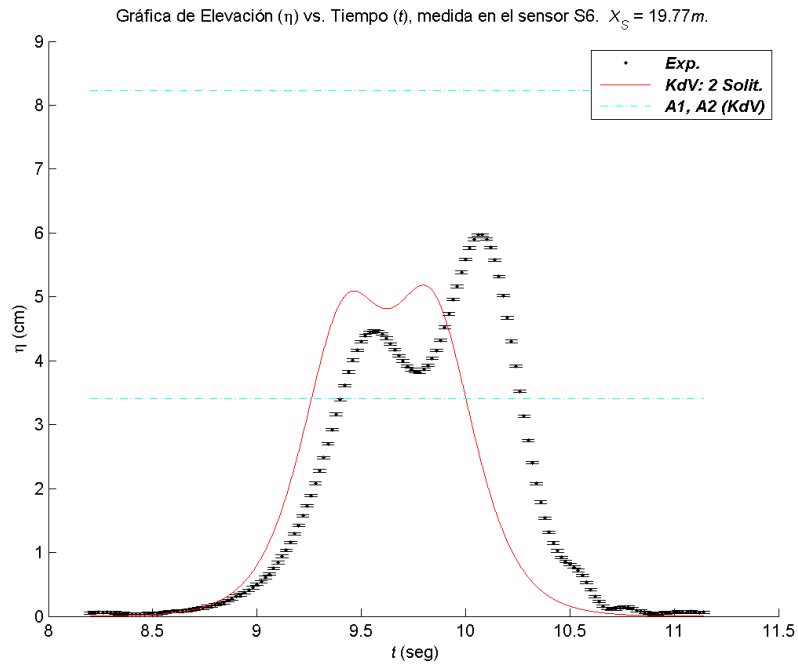


Figura 5.37: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)

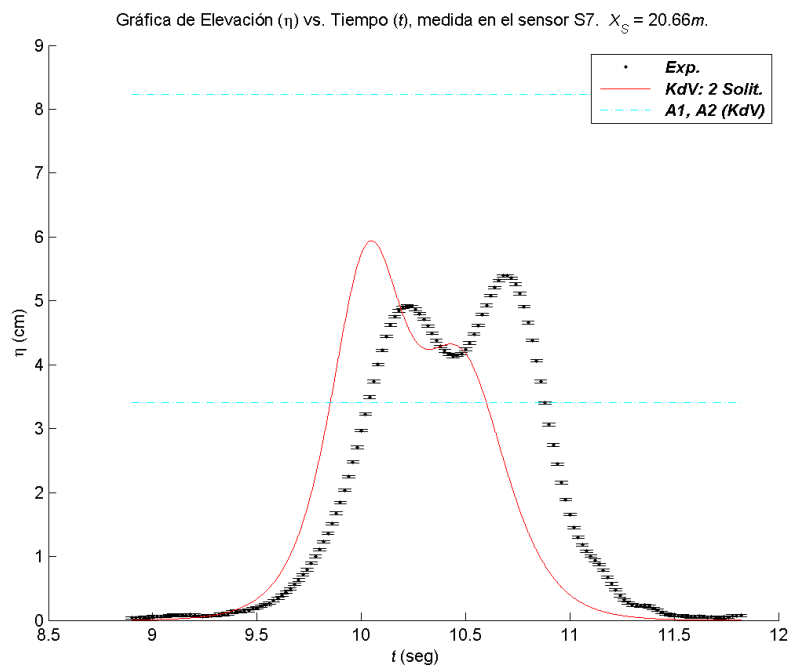


Figura 5.38: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)

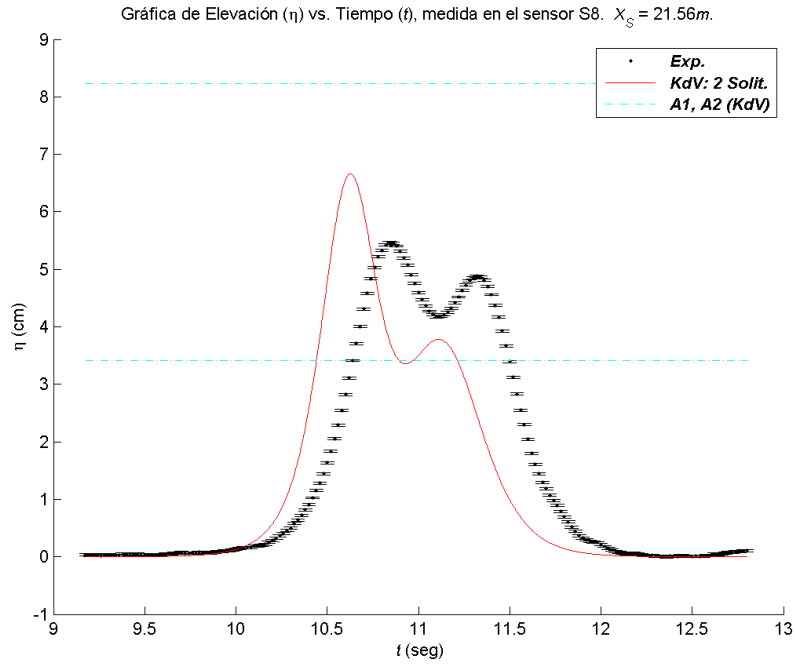


Figura 5.39: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)

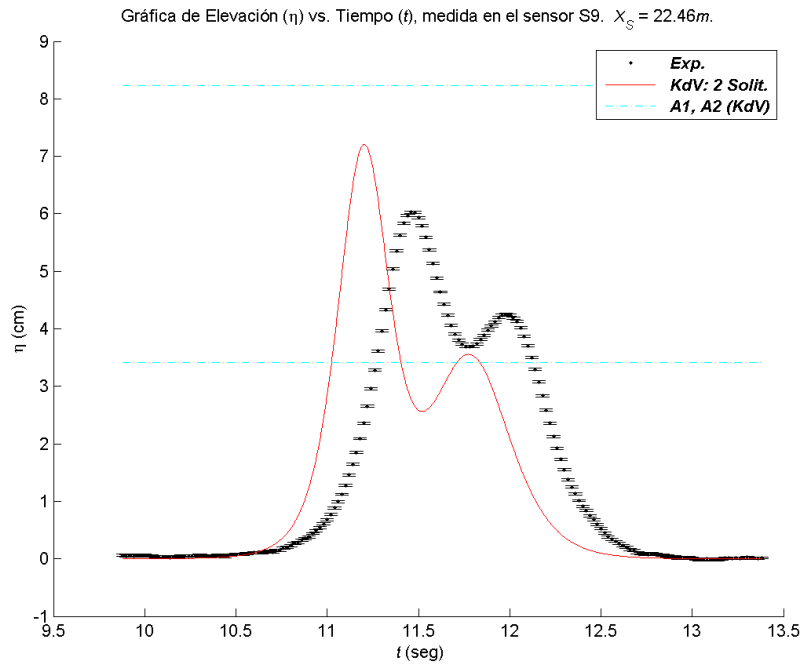


Figura 5.40: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S9} = 22.46\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)

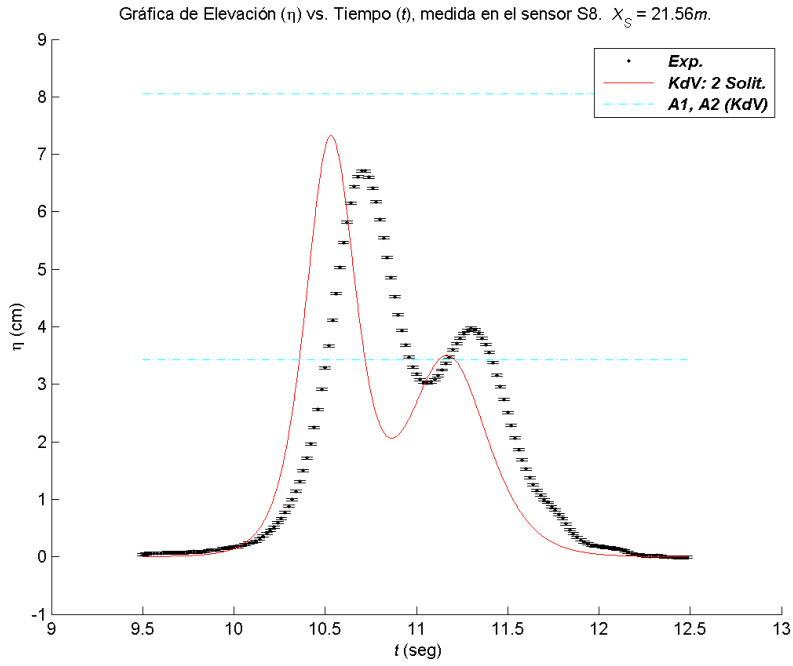


Figura 5.41: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26cm$, $X_{S8} = 21.56m$, $\tau_{int} = 0.3s$. (Prueba)

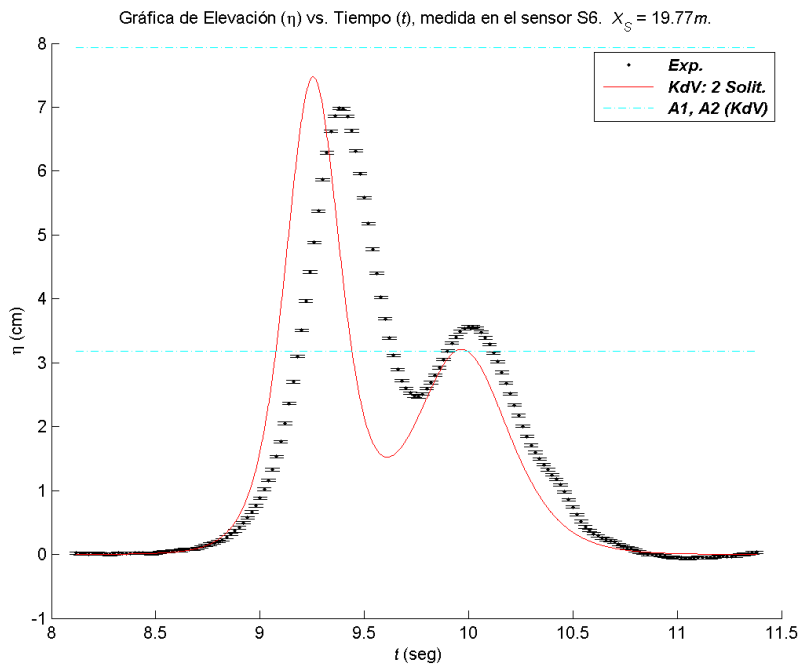


Figura 5.42: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26cm$, $X_{S6} = 19.77m$, $\tau_{int} = 0.2s$.

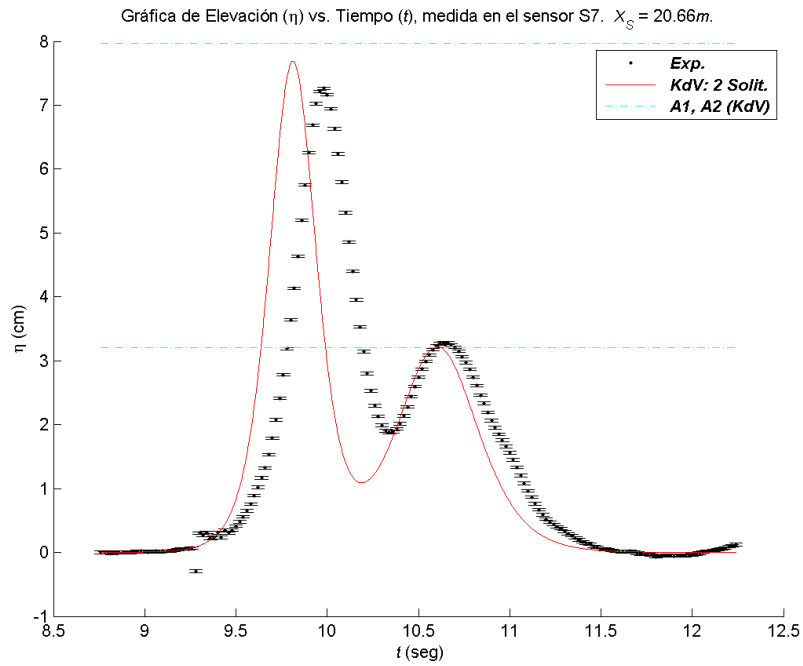


Figura 5.43: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

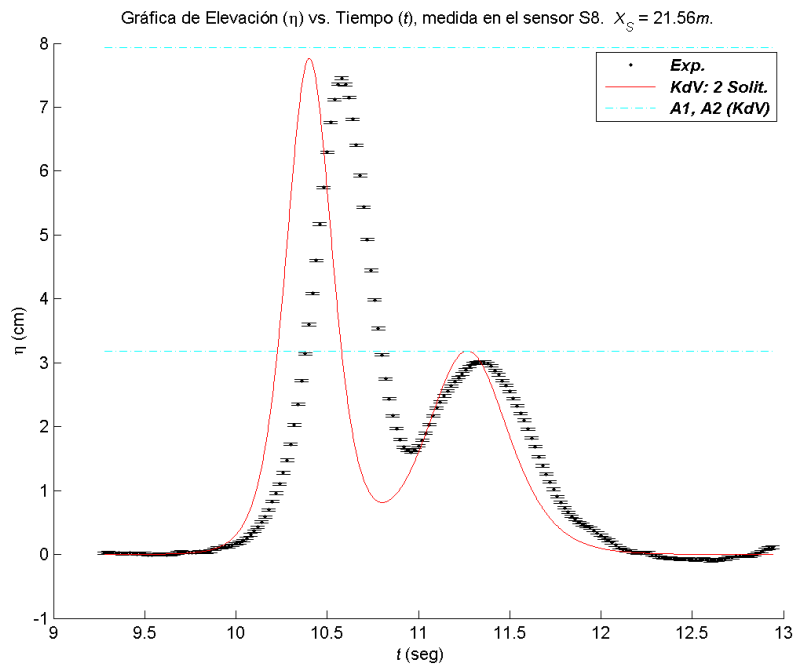


Figura 5.44: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

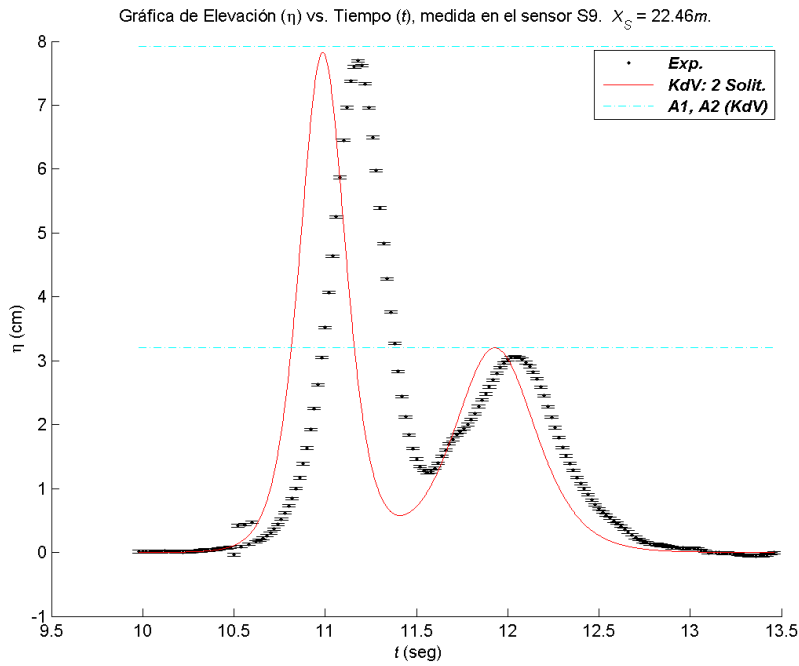


Figura 5.45: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26cm$, $X_{S9} = 22.46m$, $\tau_{int} = 0.2s$.

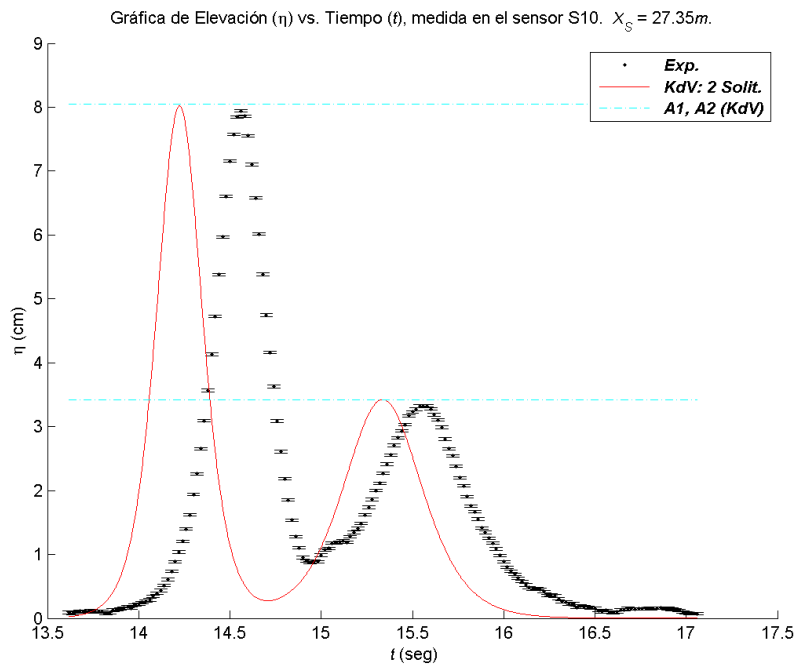


Figura 5.46: Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26cm$, $X_{S10} = 27.35m$, $\tau_{int} = 0.3s$. (Prueba)

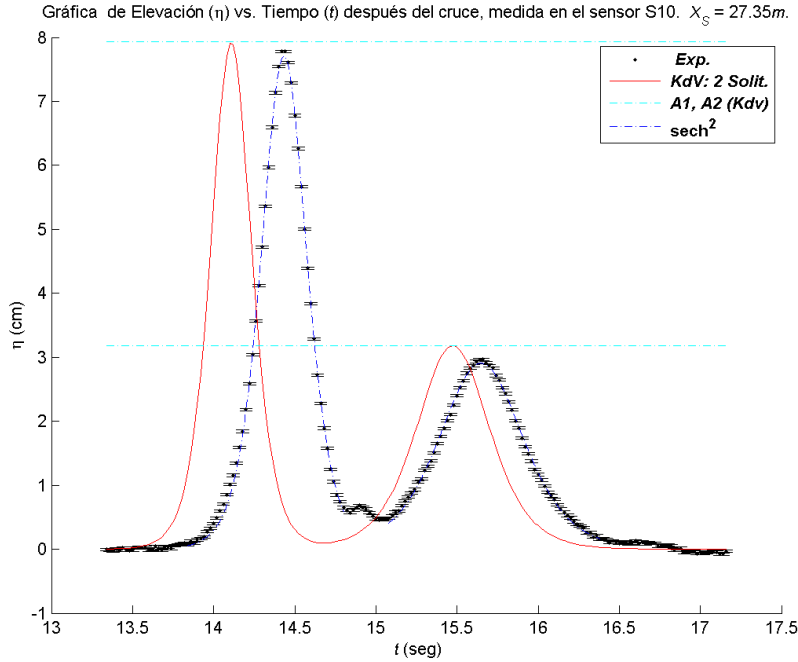


Figura 5.47: Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S10} = 27.35\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

ser el β_1 final menor que el inicial por 7%), mientras que la longitud de la onda mayor, de acuerdo al ajuste sech^2 , es menor que al inicio (ya que el β_2 inicial es 14% menor que el del ajuste sobre S11); los coeficientes β del ajuste sech^2 siguen siendo menores a los valores de KdV (para la onda menor en 14% y para la mayor en 7%). La velocidad final de la onda menor tuvo un valor promedio de $c_1 = 1.36 \pm 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (siendo menor al valor promedio inicial en 1% y al dado por la Ecuación KdV en menos de 1%), mientras que el de la mayor fue de $c_2 = 1.52 \pm 0.03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (siendo 3% menor a los valores iniciales tanto del experimento como de la teoría KdV). De este modo, el experimento presentado también muestra una interacción de tipo solitónica, con las diferencias ya mencionadas respecto a la solución de dos solitones de la Ecuación KdV, posiblemente faltando poco para que llegue a su fin.

Desfasamientos: Un primer estudio

Una evidencia de la interacción solitónica entre dos ondas solitarias, además de la formación de dos ondas solitarias después de la interacción de las originales, es el desfasamiento de sus crestas respecto a las posiciones que ocuparían si viajaran sin interactuar, como en el caso de una superposición lineal. Por tal motivo, es interesante para el análisis de nuestros experimentos de interacción entre ondas solitarias estudiar sus desfasamientos a través de los tiempos de llegada al primero y al último de los sensores. Dado que, en cierto sentido, las ondas solitarias “intercambian” posiciones (puesto que antes del cruce la onda menor se encuentra adelante y después de la interacción aparece detrás), podemos esperar que el desfasamiento de la onda menor sea negativo y el de la onda mayor sea positivo (y de hecho esto es lo predicho por la solución de dos solitones de la Ecuación KdV; compárense las fórmulas (4.100) y (4.103) con (4.109) y (4.111), respectivamente), o equivalentemente, que el tiempo de llegada cuando hay interacción entre ondas sea, para la onda menor, mayor a cuando no hay interacción, y para la onda mayor, menor. Aunque lo ideal para determinar el desfasamiento debido exclusivamente a la interacción experimental, sin influencia alguna de otro factor, sería comparar los tiempos de llegada entre experimentos de ondas solitarias individuales con los

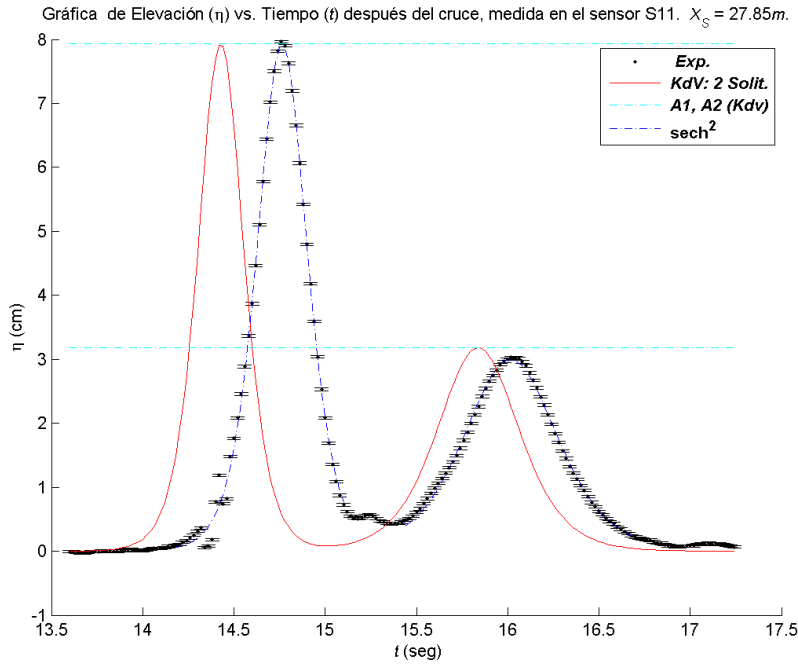


Figura 5.48: Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S11} = 27.85\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$.

de dos ondas solitarias sobre el canal, éste es un procedimiento ciertamente exhaustivo, a realizar más bien en un desarrollo futuro de este trabajo de investigación. Como un primer estudio de los desfases, se decidió comparar los tiempos experimentales de llegada al final del canal con tiempos calculados suponiendo que las ondas solitarias viajan sobre el canal sin interactuar entre sí, manteniendo sus velocidades iniciales (experimentales), y tomando en cuenta el tiempo por el que pasan por el primer sensor. A continuación enlistamos, para cada uno de los dos experimentos comentados en la tesis, los valores de velocidades (sólo por referencia se incluyen tanto los valores iniciales como finales) y tiempos de llegada, tanto medidos como calculados (nuevamente haremos referencia a valores promediados sobre las 10 mediciones para cada experimento).

Para el experimento con $A_1 = 1.90\text{cm}$:

Onda Menor

1. Valores Iniciales (S1):
 - Velocidad Experimental: $c_{1_o} = 1.33 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S1: $t_o = 0.01\text{s}$
2. Valores Finales (S11):
 - Velocidad Experimental: $c_{1_f} = 1.33 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S11:
 - Con cruce (Experimental): $t_f = 16.61\text{s}$
 - Sin cruce (Calculado): $t'_f = 16.0 \pm 0.3\text{s}$

Onda Mayor

1. Valores Iniciales (S1):

- Velocidad Experimental: $c_{2_o} = 1.55 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S1: $t_o = 1.29s$
2. Valores Finales (S11):
- Velocidad Experimental: $c_{2_f} = 1.51 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S11:
 - Con cruce (Experimental): $t_f = 15.10s$
 - Sin cruce (Calculado): $t'_f = 14.9 \pm 0.3s$

Se observa que, para la onda menor, el tiempo de llegada a S11 en los experimentos de interacción es mayor por 0.6 seg que el tiempo calculado sin interacción, que es lo que se esperaba por lo comentado líneas arriba. Sin embargo, para la onda mayor, el tiempo de llegada a S11 también es mayor en los experimentos que en los cálculos; si bien se esperaba lo contrario, es importante destacar dos cosas. Primero, que la diferencia entre estos tiempos (0.1 seg) es menor que la incertidumbre asociada al tiempo calculado (0.3 seg). De este modo, dentro del intervalo de incertidumbre del tiempo calculado hay valores que son, por un margen pequeño, mayores al tiempo de llegada de la onda mayor en los experimentos de interacción, por lo que no hay una oposición definitiva entre los resultados de nuestros cálculos y lo esperado de ellos. Además, también es importante mencionar que los desfases que sufren las ondas son proporcionales a sus longitudes (o equivalentemente, inversamente proporcionales a sus coeficientes β ; véanse las fórmulas (4.108) y (4.102)), y ciertamente los coeficientes β_2 son mayores a los β_1 , de modo que los desfases de las ondas mayores son de menor longitud que para las ondas menores. Puede ser que el desfase para la onda menor no sea lo suficientemente grande como para hacerse evidente en nuestros cálculos, además de que en los cálculos se está suponiendo que las ondas mantienen una velocidad constante, por lo que se está despreciando cualquier efecto disipativo sobre la velocidad (cabe mencionar que los cambios de los valores de las velocidades de nuestras ondas, indicados tanto en la tabla superior como en la siguiente, pueden estar relacionados más con el proceso de interacción que con uno de disipación).

Para el experimento con $A_1 = 3.26cm$:

Onda Menor

1. Valores Iniciales (S1):
- Velocidad Experimental: $c_{1_o} = 1.38 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S1: $t_o = 0.00s$
2. Valores Finales (S11):
- Velocidad Experimental: $c_{1_f} = 1.36 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S11:
 - Con cruce (Experimental): $t_f = 16.02s$
 - Sin cruce (Calculado): $t'_f = 15.3 \pm 0.3s$

Onda Mayor

1. Valores Iniciales (S1):
- Velocidad Experimental: $c_{2_o} = 1.56 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S1: $t_o = 1.12s$
2. Final:
- Velocidad Experimental: $c_{2_f} = 1.52 \pm 0.03 \frac{m}{s}$
 - Tiempo de llegada a S11:
 - Con cruce (Experimental): $t_f = 14.76s$
 - Sin cruce (Calculado): $t'_f = 14.7 \pm 0.3s$

Como en el experimento anterior, el tiempo de llegada en los experimentos de cruce es, para la onda menor, mayor por 0.7 seg que el tiempo calculado suponiendo que no hay interacción, y nuevamente, para la onda mayor, el tiempo experimental es mayor al calculado por un margen menor (menos de 0.1 seg) a la incertidumbre asociada al tiempo calculado (0.3 seg). Las observaciones de los resultados de nuestros cálculos para este experimento son esencialmente las mismas que en el anterior, aunque por el tipo de interacción observado para el primero (existencia de dos crestas durante toda la interacción) se podría esperar que el desfaseamiento de la onda mayor fuera más evidente.

En resumen, podemos decir de los resultados de este primer análisis de los desfaseamientos que, para la onda menor, los cálculos corresponden a lo esperado, mientras que para la onda mayor, los cálculos no dan un resultado conclusivo a favor o en contra de lo esperado, ya que ambos casos son posibles dentro de la incertidumbre asociada al tiempo de llegada calculado suponiendo que no hay interacción.

Capítulo 6

Conclusiones

En el trabajo teórico de la tesis se estudió el problema de ondas en agua en su formulación hamiltoniana (en términos de las variables de superficie), para encontrar la Ecuación Korteweg - de Vries (KdV) como una ecuación aproximada de evolución del sistema, ahondando después en la teoría de solitones de esta ecuación. Se estudió el Operador Dirichlet-Neumann, presente en el Hamiltoniano del sistema original, dado que éste puede expresarse como una expansión en potencias de η y entonces, para una elevación de agua baja ($\eta \approx 0$), se puede aproximar truncándolo a cierto orden en η . Reconociendo en esta aproximación una indicación de la relevancia de ciertos fenómenos físicos por determinar, se decidió realizar una adimensionalización del problema, encontrándose dos parámetros adimensionales α y β que indican la importancia de los efectos de amplitud (no-lineal) y dispersivos en el problema de ondas largas de baja amplitud. Al aproximar el sistema a orden $O(1)$ en α y β , se derivó un sistema de tipo Boussinesq, en el que se reconocieron tanto términos no-lineales como dispersivos. De este sistema Boussinesq fue derivada la Ecuación KdV, restringiendo el movimiento de las ondas a una sola dirección. Finalmente, se estudió el problema de la interacción de dos ondas solitarias en la Ecuación KdV, que predice una interacción solitónica entre ellas.

En cuanto a la labor de experimentación en la tesis, se logró el cruce de dos ondas solitarias en agua sobre un canal de olas para distintas alturas de la onda menor, observándose experimentalmente una interacción de tipo solitónica, como se esperaría del modelo KdV de ondas en agua, dado que después del cruce se observan dos ondas de alturas bastante cercanas a las originales y longitudes semejantes a las iniciales (determinadas indirectamente a partir de los coeficientes β), faltando poco para que termine por completo la interacción sobre el canal. Para los dos experimentos comentados en la tesis, las gráficas de elevación vs. tiempo son cualitativamente similares a las predicciones de la ecuación KdV durante la primera parte de la interacción, en la que comienza la unión de las crestas. Sin embargo, de la mitad de la interacción en adelante hay diferencias cualitativas importantes. Por un lado, en las gráficas de pruebas experimentales (con la reserva que se deben tomar) se observa, para el experimento con $A_1 = 1.90\text{cm}$, que la forma de la cresta única a la mitad de la interacción experimental es menos aguda que la teórica, y para el experimento con $A_1 = 3.26\text{cm}$, el tipo de interacción es diferente (de acuerdo a las categorías de Lax) entre la teoría y el experimento. Pero más importante aún: la forma cualitativa del desenlace de la interacción (determinada a partir de mediciones definitivas), en el que se establecen las ondas finales, es de un carácter más complicado (menos “limpio”) que lo predicho por la teoría, apareciendo inicialmente una cresta menor que termina por convertirse en un residuo que acompaña a la onda mayor y, en cambio, formándose la onda menor de la región trasera de la elevación. A su vez, a lo largo del experimento la solución KdV (obtenida del ajuste a los perfiles iniciales experimentales en S1) se va separando de los datos, adelantándose poco a poco tanto en el tiempo en el que llega a los sensores como en la fase de la interacción que describe sobre tales posiciones.

Respecto a las diferencias entre la teoría y el experimento en su comportamiento cualitativo durante la segunda parte de la interacción, es importante mencionar algunas cosas. Primero, que la Ecuación KdV es un modelo que supone amplitudes bajas (α pequeño); nuestros experimentos usaron una onda mayor con $\alpha \approx 0.5$, valor que ciertamente no es bajo. Por lo tanto, el que se observe experimentalmente una interacción

que concuerda cualitativamente en su primera parte con la Ecuación KdV y cuyo resultado final (su carácter solitónico) sea el esperado por dicho modelo, aún cuando las hipótesis de este último ($\alpha \ll 1$) no se cumplan por completo, indica que las predicciones de solitones dadas por la Ecuación KdV no son tan equivocadas aún fuera de su régimen de validez, lo cual es interesante. En segunda, cabe mencionar que también se realizaron experimentos con alturas A_1 mayores (no incluidos en la tesis), y para éstos la descripción cualitativa de la interacción dada por la Ecuación KdV (la existencia de dos crestas a lo largo de toda la interacción) corresponde al comportamiento cualitativo del experimento; de este modo, las diferencias cualitativas entre teoría y experimento se observaron para alturas A_1 pequeñas.

Sobre el adelanto de la solución KdV de dos solitones tanto en el tiempo como en la fase de la interacción respecto a las mediciones, aunque en un principio se podría pensar asociado a procesos de disipación presentes en el experimento y no considerados en la Ecuación KdV, el hecho de que las amplitudes finales de las ondas sean bastante cercanas a las iniciales descarta a dicha consideración como la razón principal de los adelantos (dada la relación entre la amplitud y la velocidad para las ondas solitarias, si las amplitudes no han disminuido considerablemente en el experimento, probablemente las velocidades tampoco). Más bien, los adelantos posiblemente están relacionados con cierta limitación de nuestro modelo teórico. Los efectos de variación (espacial y temporal) tanto de amplitudes como de fases de las ondas de agua son de un orden superior ($O(2)$) al de la Ecuación KdV ($O(1)$). Dado que el efecto de la variación de las fases durante el experimento es crucial para dar una descripción precisa tanto de las posiciones de las ondas solitarias como de las etapas de interacción, esto puede explicar la discrepancia en ambos aspectos entre la solución de dos solitones de la Ecuación KdV y los datos experimentales. En un trabajo a futuro sería interesante determinar, para posteriores mediciones, la variación en las fases de forma empírica, siguiendo a las crestas de las ondas solitarias, y compararlas con modelos teóricos que estudien dicha variación en fases; como referencia para el aspecto teórico, se puede estudiar el trabajo de Haberman en [16].

Hay algunas recomendaciones a tomar en cuenta si se continúa en un futuro el trabajo aquí presentado. Para la mejora de los experimentos en el Canal de Olas del II-UNAM, sería positivo determinar empíricamente la función de transferencia hidráulica del pistón a la profundidad usada de $h = 16$ cm, lo que no se pudo realizar durante nuestro trabajo debido a limitaciones de tiempo. Esto podría ayudar a que las ondas solitarias generadas sean de mayor calidad, pudiendo tal vez resolver el problema del rompimiento de la onda mayor al generar un par de ondas solitarias moviendo el pistón de acuerdo a (5.5) durante un tiempo τ esperado teóricamente de (5.8). Además, debemos tomar en cuenta que el proceso de medición del nivel de agua a través de sensores resistivos es, en cierta medida, invasivo; sin embargo, dichos sensores son el material disponible para realizar mediciones de elevación en el laboratorio de oleaje en el que se trabajó. El contar con la posibilidad de hacer mediciones con procedimientos menos invasivos (acústicos, por ejemplo) permitiría descartar la influencia de la medición en el experimento. Sobre el estudio de los desfases de las crestas en comparación con las posiciones que ocuparían si no interactuaran con la otra onda, además de la posible línea de trabajo tanto teórica como experimental señalada en el párrafo anterior, se pueden comparar las posiciones de las crestas de las ondas en nuestros experimentos de cruce con experimentos en los que sólo se genere una onda, debiéndose así la diferencia en las posiciones de las crestas sólo a la interacción. Por último, se podrían comparar nuestras mediciones de los experimentos de cruce con simulaciones numéricas en las que los datos de elevación en el primer sensor S_1 se impongan como una condición de frontera sobre la posición X_{S_1} de dicho sensor, para determinar si las diferencias de los experimentos con las predicciones de la Ecuación KdV pueden ser reproducidas computacionalmente.

Bibliografía

- [1] Panayotaros, P. “Notas del Curso de Mecánica de Fluidos”.
- [2] Marsden, J., Hughes, T. “Mathematical Foundations of Elasticity”. Dover, 1994.
- [3] Currie, G. “Fundamental Mechanics of Fluids”. McGraw-Hill, 2ª Edición, 1993.
- [4] Lamb, H. “Hydrodynamics”. Cambridge University Press, 6ª Edición, 1932.
- [5] Evans, L. “Partial differential equations”. AMS, 1998.
- [6] José, J., Saletan, E. “Classical Dynamics. A contemporary approach”. Cambridge University Press, 1998.
- [7] Whitham, G.B. “Linear and nonlinear Waves”. John Wiley, 1974.
- [8] Drazin, P.G., Johnson, R. “Solitons: An Introduction”. Cambridge University Press, 1989.
- [9] Hirota, R. “The Direct Method in Soliton Theory”. Cambridge University Press, 2004.
- [10] Ablowitz, M., Segur, H. “Solitons and the inverse scattering transform.” SIAM, 1981.
- [11] Zakharov, V.E. “Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys*, Vol. 2, pp 190-194.
- [12] Craig, W., Sulem, C. “Numerical simulation fo gravity waves”, *J. Comp. Phys*, Vol. 108, 1993, pp 73-83.
- [13] Craig, W., Groves, M. “Hamiltonian long-wave approximations to the water-wave problem”, *Wave Motion, ELSEVIER*, Vol. 19, 1994, pp 367-389.
- [14] De la Llave, R., Panayotaros, P. “Gravity waves on the surface of the sphere.” *J. Nonlin. Sci.*, Vol. 6, 1996, pp. 147-167.
- [15] Coifman, R., Meyer, Y. “Nonlinear harmonic analysis and analytic dependence”, *AMS Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 43, 1985, pp. 71-78.
- [16] Haberman, R. “The Modulated Phase Shift for Weakly Dissipated Nonlinear Oscillatory Waves of the Korteweg-deVries Type”, *Studies in Applied Mathematics*, Vol. 78, 1988, pp. 73-90.
- [17] Katell, G., Barthélemy, E. “Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker”, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 40, 2002, No. 3.
- [18] Craig, W. et al. “Solitary water wave interactions”. *Physics of Fluids*, Vol. 18, 2006, No. 057106.
- [19] Miranda, J. “Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales”. Instituto de Física, UNAM, 2001.
- [20] HR Wallingford Group. “Wave Generation System. User Manual”. Reino Unido, 2003.
- [21] HR Wallingford Group. “Wave Generation System. Technical Manual”. Reino Unido, 2003.

- [22] Beresford, P.J.; HR Wallingford Group. “HR WaveMaker Wave generation control program”. Reino Unido, 2003.
- [23] Beresford, P.J. et al; HR Wallingford Group. “HR WaveData - Data acquisition and analysis software program. User Manual”. Reino Unido, 2003.

Índice de figuras

5.1. Diseño experimental de [17]. Posiciones de los sensores: $\{x_i\}$. ($0.2\text{m} \leq h \leq 0.3\text{m}$, $0.015\text{m} \leq A \leq 0.15\text{m}$, $a' \leq 0.1A$, $S \leq 0.55\text{m}$).	49
5.2. Interacción co-propagante en [18] de dos ondas solitarias de alturas $A_2 = 2.295\text{ cm}$, $A_1 = 0.730\text{ cm}$ en distintos tiempos: (a) $t = 2.90304\text{s}$, (b) 5.50196 s , (c) 6.40513 s , (d) 7.05025 s , (e) 7.60014 s , (f) 8.50024 s , (g) 9.50478 s , y (h) 11.30191 s : Simulaciones (línea continua), Datos experimentales (puntos), Solución KdV de 2 solitones (línea punteada). Se ha alineado el centro de masa de todas las gráficas de elevación de agua.	51
5.3. Canal de Olas del Instituto de Ingeniería, UNAM	53
5.4. Sensor resistivo del nivel de agua	54
5.5. Grupo de sensores de nivel montados en un soporte metálico.	55
5.6. Perfil de la onda menor antes del cruce. $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$	57
5.7. Perfil de la onda mayor antes del cruce, $A_2 = 7.99\text{ cm}$, $X_{S1}=6.68\text{ m}$	57
5.8. Superficie libre al inicio de la interacción (Zona II).	58
5.9. Superficie libre a la mitad de la interacción (perfil de meseta con dos crestas) a 15 m del pistón.	58
5.10. Superficie libre después de la interacción (Zona SIII): la cresta delantera es la mayor.	59
5.11. Superficie libre a 23 m del pistón: separación de las ondas solitarias.	59
5.12. Elevación (η) vs. Tiempo (t) antes del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	61
5.13. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S2} = 7.18\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)	62
5.14. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S3} = 11.74\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	62
5.15. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	63
5.16. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	64
5.17. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.3\text{s}$. (Prueba)	65
5.18. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S3} = 11.74\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)	65
5.19. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)	66
5.20. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)	66
5.21. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)	67
5.22. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)	68
5.23. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)	68
5.24. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	69
5.25. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	69
5.26. Gráfica de Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	70
5.27. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S9} = 22.46\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	70
5.28. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$. (Prueba)	71
5.29. Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S10} = 27.35\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	72
5.30. Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 1.90\text{cm}$, $X_{S11} = 27.85\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$	72
5.31. Elevación (η) vs. Tiempo (t) antes del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S1} = 6.68\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	73
5.32. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S3} = 11.74\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	74
5.33. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S4} = 12.33\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	75
5.34. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S5} = 13.05\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	75

5.35. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)	76
5.36. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.5\text{s}$. (Prueba)	76
5.37. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)	77
5.38. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)	77
5.39. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)	78
5.40. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S9} = 22.46\text{m}$, $\tau_{int} = 0.4\text{s}$. (Prueba)	78
5.41. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.3\text{s}$. (Prueba)	79
5.42. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S6} = 19.77\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	79
5.43. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S7} = 20.66\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	80
5.44. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S8} = 21.56\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	80
5.45. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S9} = 22.46\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	81
5.46. Elevación (η) vs. Tiempo (t): $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S10} = 27.35\text{m}$, $\tau_{int} = 0.3\text{s}$. (Prueba)	81
5.47. Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S10} = 27.35\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	82
5.48. Elevación (η) vs. Tiempo (t) después del cruce: $A_1 = 3.26\text{cm}$, $X_{S11} = 27.85\text{m}$, $\tau_{int} = 0.2\text{s}$	83