Algebra Lineal I
Tarea 1.

1. Calcula el producto de matrices AB, donde

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Escribe los siguientes problemas en forma de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (forma $Ax = b$) y encuentra su solución:

(a) Juan le dobla la edad a Pedro y sus edades suman 39 años.

(b) Los puntos $(2, 5)$ y $(3, 7)$ en el plano pertenecen a la misma línea recta. Encuentra la ecuación de la recta de la forma $y = mx + c$.

3. ¿Cierto o falso? Demuestra o da un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

(a) Si $AB = I$ y $BC = I$ entonces $A = C$.

(b) Si las columnas 1 y 3 de B son iguales entonces también lo son las columnas 1 y 3 de AB.

(c) Si los renglones 1 y 3 de B son iguales entonces también lo son los renglones 1 y 3 de AB.

(d) Si los renglones 1 y 3 de A son iguales entonces también lo son los renglones 1 y 3 de AB.

(e) $(AB)^2 = A^2B^2$

4. Demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \alpha\sin\theta \\ -\frac{1}{\alpha}\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \alpha\sin n\theta \\ -\frac{1}{\alpha}\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix},$$

para cualquier $\alpha \neq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

5. Sean

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $A \in M_{3\times 3}$ una matriz arbitraria.

(a) Describe los renglones de EA en términos de los renglones de A.

(b) Describe las columnas de EA en términos de las columnas de A.

6. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \alpha \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Calcula

$$\lim_{n\to+\infty} A^n.$$

Sugerencia: Calcula algunas de las primeras potencias y trata de deducir el comportamiento general de A^n.

7. Si $A \in M_{n\times n}$ es invertible y simétrica, demuestra que A^{-1} es simétrica.

8. Si A es invertible, multiplica el primer bloque renglón por CA^{-1} y resta del segundo bloque renglón para encontrar el *complemento de Schur* S:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}$$

9. Para cualesquiera matrices $A \in M_{n\times m}$ y $B \in M_{m\times n}$, muestra que la matriz de bloques

$$L = \begin{bmatrix} I_m - BA & B \\ 2A - ABA & AB - I_n \end{bmatrix}$$

es *involutoria*, es decir, $L^2 = I_{m+n}$. Estas matrices aparecen con frecuencia en criptografía.

10. Para cualquier matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}$ explica porqué no es posible hallar una solución $X \in M_{n\times n}$ a la siguiente ecuación:

$$AX - XA = I_n.$$

Sugerencia: Considera la función traza.

Total: 10 pts.