Álgebra Lineal I
Tarea 3

Aplica el método de eliminación Gaussiana para encontrar la descomposición LU (no singular) de las siguientes matrices:

1.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 5 & -8 \\ -1 & 0 & 7 & -11 \\ 2 & 7 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Encuentra la descomposición $PA = LU$ de las siguientes matrices (encuentra una matriz de permutación P de manera que PA tiene descomposición LU; usa el método de eliminación Gaussiana con permutaciones de renglón):

4.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -4 & -12 & 11 \\ 3 & 14 & -16 \end{bmatrix}.$$

6. Determina los valores de ξ para los cuales la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \xi & 2 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix}$$

no tiene una descomposición LU.

7. Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 17 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Sin tratar de encontrarla, explica porqué la matriz A *no* tiene una descomposición LU (no singular). (*Sugerencia*: Observa la submatriz principal de 2×2; ¿es invertible?)

(b) Usa el método de eliminación para hallar una matriz de permutación P tal que $PA = LU$ es una descomposición LU y halla también las matrices L y U.

(c) Utiliza la información del inciso anterior para resolver el sistema $Ax = b$.

8. Considera la siguiente matriz en forma *tridiagonal*,

$$T = \begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_4 \end{bmatrix}$$

(a) Suponiendo que T tiene una factorización LU, verifica que ésta es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1/\delta_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2/\delta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3/\delta_3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} \delta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix},$$

donde las δ_j's están generadas mediante la siguiente fórmula recursiva,

$$\delta_1 = \beta_1, \qquad \delta_{j+1} = \beta_{j+1} - \frac{\alpha_j \gamma_j}{\delta_j}, \quad j \geq 1.$$

(b) Utiliza la fórmula anterior para calcular la factorización LU de la siguiente matriz,

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Demuestra que la descomposición $A = LU$ no es única. Para esto encuentra *dos* descomposiciones diferentes para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

10. Se dice que $A \in M_{n\times n}$ tiene una descomposición $A = LDU$ no singular si existen $L \in M_{n\times n}$ triangular inferior *unitaria* (es decir, con pivotes iguales a uno, $l_{jj} = 1$, $1 \leq j \leq n$), $U \in M_{n\times n}$ triangular superior unitaria (con $u_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$), y $D \in M_{n\times n}$ una matriz diagonal, $D = \text{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn})$, $d_{jj} \neq 0$.

(a) Demuestra que si $A \in M_{n\times n}$ tiene una descomposición $A = LDU$ entonces ésta es única. (*Sugerencia:* Suponiendo que existen dos descomposiciones, $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$, analiza la ecuación $L_2^{-1}L_1D_1 = D_2U_2U_1^{-1}$ que iguala una matriz triangular inferior con una triangular superior.)

(b) Encuentra la (única) descomposición LDU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Total: 10 pts.