Álgebra Lineal I
Tarea 7

1. (a) Da un ejemplo de un mapeo (o transformación) lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ con el mismo núcleo y rango, $\mathcal{N}(L) = \mathcal{R}(L)$.

(b) Demuestra que no existe un mapeo lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^5)$ tal que $\mathcal{N}(L) = \mathcal{R}(L)$.

2. Sea $L \in \mathcal{L}(V, V)$ un mapeo lineal en un espacio vectorial V de dimensión $\dim V = n$. Demuestra que los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) L^{-1} existe.

(b) L es inyectivo.

(c) L es suprayectivo.

3. Sean V y W espacios vectoriales y $L \in \mathcal{L}(V, W)$ un mapeo lineal de V en W.

(a) Suponiendo que W es de dimensión finita, demuestra que L es inyectivo si y sólo si existe $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $S \circ L = SL$ es el mapeo identidad en V.

(b) Suponiendo que V es de dimensión finita, demuestra que L es suprayectivo si y sólo si existe $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que $L \circ S = LS$ es el mapeo identidad en W.

4. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $v \in V$, fijo. Se define

$$\mathcal{E}_v := \{L \in \mathcal{L}(V, W) \, : \, L(v) = 0\},$$

es decir, el subconjunto de mapeos lineales de V en W tales que v está en su núcleo.

(a) Demuestra que $\mathcal{E}_v$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(V, W)$.

(b) Suponiendo que $v \neq 0$. ¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{E}_v$?

5. Sean $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ dos bases de un espacio vectorial V de dimensión $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

(a) La matriz de cambio de base $C = C_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ es invertible.

(b) Si $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ entonces $C_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} = I_n$.

(c) La representación matricial de $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathrm{Id}\,(v) := v$, $\forall v \in V$, como operador lineal de la base $\mathcal{S}$ a la base $\mathcal{T}$ es la matriz de cambio de base:

$$M_{\mathrm{Id}}^{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} = C_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}}.$$

6. Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ el mapeo lineal definido mediante $L(x, y, z) := (x+y, x-z, 2x+y+z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Considera la base

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y el vector $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Encuentra $[L]_{\mathcal{S}}$ y $[w]_{\mathcal{S}}$.

(b) Calcula $[L(w)]_{\mathcal{S}}$ y verifica que $[L(w)]_{\mathcal{S}} = [L]_{\mathcal{S}}[w]_{\mathcal{S}}$.

7. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Sea la base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Encuentra $[A]_{\mathcal{S}}$, es decir, la representación matricial de A en la base $\mathcal{S}$.

8. Sean $V = \mathbb{F}[x; 2]$ y $W = \mathbb{F}[x; 3]$ los espacios vectoriales de polinomios en x de grado ≤ 2 y ≤ 3, respectivamente. Se define el operador lineal $L \in \mathcal{L}(V, W)$ mediante

$$L(q) := \int_0^x q(y)\, dy, \qquad \forall\, q(x) \in V.$$

Encuentra la matriz asociada a L de la base $\mathcal{S}$ de V a la base $\mathcal{S}'$ de W, es decir, $M_L^{\mathcal{S}\to\mathcal{S}'}$, donde

$$\mathcal{S} = \left\{1,\, x,\, x^2\right\}, \quad \mathcal{S} = \left\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\right\}.$$

9. Una matrix $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ es *idempotente* si $A^2 = A$. Un mapeo lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$ es idempotente si $L^2 := L \circ L = L$. Sean $\mathcal{S} = \{v_j\}_{j=1}^{r}$ y $\mathcal{T} = \{u_i\}_{i=1}^{n-r}$ bases de $\mathcal{R}(L)$ y $\mathcal{N}(L)$, respectivamente.

(a) Demuestra que $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$ es una base de $\mathbb{F}^n$. (*Sugerencia:* Prueba que $L(v_j) = v_j$ para todo $1 \leq j \leq r$ y deduce que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.)

(b) Demuestra que $[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) Explica porqué dos matrices idempotentes $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ con el mismo rango, $r = \dim\mathcal{R}(A) = \dim\mathcal{R}(B)$, son necesariamente matrices similares.

(d) Demuestra que si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ es idempotente entonces $\dim \mathcal{R}(A) = \operatorname{tr}(A)$.

10. Sea $V = \mathbb{R}^2$ y el mapeo lineal

$$P(v) := \operatorname{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|^2} u \in \mathbb{R}^2, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

es decir, la proyección de cualquier vector en el plano $\mathbb{R}^2$ sobre la recta $\{x = y\}$.

(a) Determina la matriz $[P]_{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Determina la matriz $[P]_{\mathcal{S}}$ donde $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Total: 10 pts.