Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales
Métodos de Análisis Funcional en Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2020-1

Tarea 2: Espacios de Sobolev

1. Usa la transformada de Fourier para demostrar que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},$$

donde $C = C(n,s) > 0$ es una constante independiente de u.

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente acotada en $H^1(\Omega)$. Suponiendo que $\|u - u_j\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ cuando $j \to \infty$ para cierta $u \in L^2(\Omega)$, demuestra que $u \in H^1(\Omega)$ y que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{j\to\infty} \|u_j\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. Integra por partes para demostrar que:

$$\int_\Omega |Du|^p\,dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^p\,dx\right)^{1/2},$$

con $2 \leq p < \infty$, y para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. (*Sugerencia:* usa la identidad $\int_\Omega |Du|^p\,dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega u_{x_j}u_{x_j}|Du|^{p-2}\,dx$.)

4. Sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Para cualquier función $u : I \to \mathbb{R}$ se define

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in I, \\ 0, & x \in \mathbb{R},\, x \notin I. \end{cases}$$

(a) Suponiendo que $u \in W_0^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$, demuestra que $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(b) Inversamente, sea $u \in L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$ tal que $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Demuestra que $u \in W_0^{1,p}(I)$.

(c) Sea $u \in L^p(I)$ con $1 < p < \infty$. Demuestra que $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\int_\mathbb{R} \overline{u}(x)\varphi'(x)\,dx\right| \leq C\|\varphi\|_{L^q(\mathbb{R})},$$

para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

5. Aplica la desigualdad de Sobolev[1] para verificar que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$, se cumple que $H^k(\Omega) \subset C^r(\overline{\Omega})$ si $k > r + n/2$. Encuentra un contraejemplo para $n = 2$, $k = 1$ y $r = 0$. (*Sugerencia:* Considera el disco en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio $r = 1/e$, y la función $u = \log|\log\sqrt{x^2+y^2}|$. Demuestra que $u \in H^1(\Omega)$.)

6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, $n \geq 2$. Sean $1 \leq p < n$, $1 \leq q < n$ y defínase

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Demuestra que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ entonces $uv \in W^{1,s}(\Omega)$. (*Sugerencia:* Aplica el teorema de encaje de Sobolev visto en clase y aplica la desigualdad de Hölder con $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ escogidos apropiadamente.)

7. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Demuestra que si $x_0 \in \Omega$, entonces $\delta(u) := u(x_0)$ para toda $u \in H_0^m(\Omega)$, define un elemento en el dual, es decir, $\delta \in H^{-m}(\Omega)$, si $m > n/2$. (*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Sobolev para verificar que $H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ si $m > k + n/2$.)

8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Demuestra que no existe un operador lineal y acotado, $\gamma_0 : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, tal que $\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega}$ cuando $u \in C(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$. Es decir, una función en $L^p(\Omega)$ no tiene, en general, traza en $\partial\Omega$.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y *conexo* con $\partial\Omega \in C^1$. Aplica el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov para demostrar las siguientes afirmaciones.

(a) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^k(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k} \left(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} u(x)\, dx \right)^2 \right),$$

para toda $u \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

(b) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)^2\, dS_x \right),$$

para toda $u \in H^2(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es una porción de la frontera que tiene superficie positiva $|\Gamma| > 0$, y que **no** es un pedazo de hiperplano.

[1] es decir, $\|u\|_{C^r} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}$ para toda $u \in W^{k,p}$ si $k > r + [n/p]$.

(c) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|^2_{H^3(\Omega)} \le C \left(\sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2 \, dS_x \right),$$

para toda $u \in H^3(\Omega)$ siempre que Ω **no sea un elipsoide**. Analiza el contraejemplo $u = x^2 + y^2 - 1$ para el caso del disco unitario (elipsoide) en $\mathbb{R}^2$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$ y orientable. Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ una porción de la frontera con superficie positiva,

$$|\Gamma| = \int_\Gamma dS_x > 0.$$

Demuestra que, para cada $g \in L^2(\Gamma)$, el mapeo

$$u \mapsto \int_\Gamma g(x)(\gamma_0 u)(x) \, dS_x, \qquad u \in H^1(\Omega),$$

define un elemento del espacio dual, $H^1(\Omega)^*$ (el dual de $H^1(\Omega)$), donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Total: 10 pts.