Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales
Métodos de Análisis Funcional en Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2020-1

Tarea 3: Formulación variacional de problemas elípticos

1. Escribe la formulación débil (o variacional) del siguiente problema elíptico:

$$\begin{aligned} (1+x^2)u'' - xu' &= \sin(2\pi x), \qquad x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

en el espacio $H_0^1(\Omega)$ con $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Demuestra que éste problema tiene una única solución débil $u \in H_0^1(0,1)$.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $\alpha > 0$. Se define

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) \, dS_x,$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$, y donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza. Si $f \in L^2(\Omega)$, demuestra que existe una única solución $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2},$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Si además u es suficientemente regular, interpreta a u como solución de un problema elíptico con condiciones de frontera en $\partial\Omega$, es decir, encuentra el sistema clásico (expresado en términos de una ecuación diferencial con condiciones de frontera) asociado al problema variacional. Demuestra que la solución débil encontrada resuelve dicho sistema en sentido distribucional.

3. Encuentra una formulación variacional para el siguiente problema

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f, \qquad \text{en } \Omega, \\ \Delta u + \alpha \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$ es constante, $f \in L^2(\Omega)$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado. Demuestra que existe una única solución débil del problema. (*Sugerencia:* El espacio adecuado de funciones es $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, es decir, el espacio de funciones en H^2 con traza igual a cero en la frontera. La forma bilineal es

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_1(v) \, dS = \int_\Omega fv \, dx,$$

donde $\gamma_1 : H^2(\Omega) \to H^{3/2}(\partial\Omega)$ es el operador de traza tal que $\gamma_1(u) = \partial_n u_{|\partial\Omega}$. Para demostrar la elipticidad de la forma bilineal, demuestra la siguiente desigualdad:

$$\|\partial_n u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)},$$

para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $C > 0$ uniforme.)

4. Problema del obstáculo. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $\Psi \in H^2(\Omega)$ tal que $\Psi \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ (es decir, $\gamma_0(\Psi) \leq 0$ a.e. sobre $\partial\Omega$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.) Se define el conjunto

$$\mathcal{K} := \{v \in H_0^1(\Omega) \,:\, v \geq \Psi \text{ a.e. en } \Omega\}.$$

(a) Demuestra que $\mathcal{K}$ es un subconjunto cerrado y convexo de $H_0^1(\Omega)$.

(b) Demuestra que existe un único elemento $u \in \mathcal{K}$ tal que

$$J[u] = \min_{v \in \mathcal{K}} J[v], \qquad J[v] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx - \int_\Omega f v\,dx,$$

con $f \in L^2(\Omega)$.

(c) Suponiendo que u es suficientemente regular, demuestra que u satisface

$$\begin{aligned} u \geq \Psi, &\quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta u = f, &\quad \text{en } \{x \in \Omega \,:\, u(x) > \Psi(x)\}, \\ u = 0, &\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nota: este problema modela el comportamiento de una membrana elástica, fija sobre $\partial\Omega$, y expandida sobre un obstáculo Ψ. La región de contacto $\mathcal{C} = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = \Psi(x)\}$ es desconocida, y en el dominio $\Omega\backslash\mathcal{C}$ (también desconocido), u satisface una ecuación diferencial. Éste es un ejemplo de un problema elíptico con *frontera libre.*

5. Considera el problema

$$\begin{aligned} -\alpha\Delta u_1 = f, &\qquad \text{en } \Omega_1, \\ -\beta\Delta u_2 = f, &\qquad \text{en } \Omega_2, \end{aligned}$$

donde $0 < \alpha < \beta$ son constantes, con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_2 = 0, &\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \\ u_1 = u_2, &\qquad \text{sobre } \partial\Omega_1, \\ \alpha\frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \beta\frac{\partial u_2}{\partial n_2}, &\quad \text{sobre } \partial\Omega_1, \end{aligned}$$

con $\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$, y $\Omega_1 \subset\subset \Omega$, abiertos, y $f \in L^2(\Omega)$. (n_j es normal unitaria exterior, y $n_1 = -n_2$ sobre $\partial\Omega_1$.) Ver figura.

(a) Encuentra la forma bilineal asociada, $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, para plantear el problema de existencia de la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } \Omega_1, \\ u_2, & \text{en } \Omega_2 \end{cases},$$

$$u_1 = u_2 \quad \text{sobre } \partial\Omega_1.$$

Sugerencia: Calcula

$$-\alpha \int_{\Omega_1} v\Delta u \, dx - \beta \int_{\Omega_1} v\Delta u \, dx.$$

(b) Verifica que $a(\cdot,\cdot)$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram. (*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$: $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}$.)

(c) Concluye que el problema tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.

6. Considera el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$:

$$\mathcal{H} = \{u \in H^1(\Omega) \, : \, \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx = 0\}.$$

(a) Demuestra que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle u, v\rangle_\nabla = \int_\Omega Du \cdot Dv \, dx.$$

(*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Poincaré vista en clase,

$$\|u - |\Omega|^{-1} \int_\Omega u \, dx\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

para demostrar que $\mathcal{H}$ es cerrado. Demuestra que $\mathcal{H}^\perp$ es el espacio de funciones constantes en $H^1(\Omega)$.)

(b) ¿Cuál es el problema con valores en la frontera cuya formulación débil en $\mathcal{H}$ está asociada a la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_\Omega Du \cdot Dv \, dx = \langle u, v\rangle_\nabla,$$

es decir,

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

con $f \in L^2(\Omega)$, para todo $v \in \mathcal{H}$? (*Sugerencia:* Como $\mathcal{H}$ es cerrado, escribe $H^1(\Omega) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$. Integra por partes.)

(c) Demuestra que si $f \in L^2(\Omega)$ entonces el problema tiene una única solución débil $u \in \mathcal{H}$. (*Sugerencia:* Escribe

$$a(u, u) = \lambda\|Du\|_{L^2}^2 + (1-\lambda)\|Du\|_{L^2}^2,$$

para todo $\lambda > 0$, aplica Poincaré y escoge λ adecuadamente. Aplica Lax-Milgram.)

(d) Deduce que dos soluciones al problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

con $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$, difieren sólo por una constante.

7. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto, con frontera suave. En clase se demostró que

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma |\gamma_0(u)|^2 \, dS_x\big),$$

para todo $\Gamma \subset \partial\Omega$, con $|\Gamma| > 0$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ denota el operador de traza.

(a) Usa la desigualdad de traza anterior para demostrar que

$$\langle u, v\rangle_{1,\partial} := \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\, \gamma_0(v)\, dS_x + \int_\Omega Du \cdot Dv\, dx, \qquad u, v \in H^1(\Omega),$$

es un producto interno en $H^1(\Omega)$, cuya norma asociada $\|\cdot\|_{1,\partial}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

(b) Si $g \in \mathcal{R}(\gamma_0) = H^{1/2}(\Omega)$ (rango de la traza), definimos el espacio

$$\mathcal{X}_g := \{v \in H^1(\Omega) \,:\, \gamma_0(v) = g \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Demuestra el siguiente teorema conocido como *principio de Dirichlet*: de todas las funciones $v \in \mathcal{X}_g$, la función armónica con valor g en la frontera (la cual es única), minimiza el funcional de Dirichlet

$$J[v] := \int_\Omega |Dv|^2 \, dx.$$

(*Sugerencia:* Minimizar $J(v)$ sobre $\mathcal{X}_g$ es equivalente a minimizar $\|v\|^2_{1,\partial}$ por la equivalencia probada en (a). Sea $u \in \mathcal{X}_g$ la función armónica en Ω. Si $v \in \mathcal{X}_g$ escribe $v = u + w$, con $w \in H^1_0(\Omega)$. Demuestra que $\langle u, w\rangle_{1,\partial} = 0$, y concluye que $\|u\|^2_{1,\partial} \leq \|v\|^2_{1,\partial}$.)

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Estudia la solvabilidad en sentido débil (en $H^1_0(\Omega)$) del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + f, \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$. Examina, en particular, los casos $f = 0$ y $f = 1$. (*Sugerencia:* Analiza los casos $\lambda \in \Sigma(-\Delta)$ y $\lambda \notin \Sigma(-\Delta)$ separadamente. Aplica la alternativa de Fredholm y los teoremas de existencia demostrados en clase. Nota que el operador es autoadjunto.)

9. Principio minimax de Courant. Sea el operador uniformemente elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j},$$

donde $a^{ij} = a^{ji}$ (operador simétrico). Suponiendo que el operador L con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera tiene valores propios

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

demuestra que

$$\lambda_k = \max_{S \in \mathcal{M}_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} a(u,u),$$

para todo $k = 1, 2, \ldots$, donde $a(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal asociada al operador L y $\mathcal{M}_{k-1}$ es la colección de todos los subespacios de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión $k-1$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto, con frontera suave. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} = 0, \qquad \text{en } \Omega,$$

donde L es uniformemente elíptico. Sea

$$v := |Du|^2 + \lambda u^2.$$

Demuestra que $Lv \leq 0$ en Ω si $\lambda > 0$ es suficientemente grande. Deduce la desigualdad

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\big(\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\big).$$

Total: 10 pts.