CURSO AVANZADO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MÉTODOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

(9 CRÉDITOS)

RAMÓN G. PLAZA

Información general

Horario.

Martes y jueves, 16:00 - 18:30hrs.
Salón 203, edificio anexo, IIMAS

Contacto.

Ramón G. Plaza
Oficina 225, segundo piso, IIMAS.
E-mail: `plaza@mym.iimas.unam.mx`

Horas de oficina.

Martes, 12:00 - 13:00 hrs. o mediante cita.

Página del curso.

`http://mym.iimas.unam.mx/ramon/AvanzadoEDPs-2020-1.html`

Evaluación.

Se evaluará al alumno con 4 tareas.

Calendario.

- Periodo de clases: 5 de agosto al 22 de noviembre, 2019.
- Periodo de exámenes: 26 de noviembre al 6 de diciembre, 2019.
- Días inhábiles: septiembre 16; noviembre 1 y 18, 2019.

Objetivo. Introducir al estudiante a la teoría lineal de ecuaciones diferenciales parciales basada en espacios de Sobolev. Se discutirán: espacios de Hilbert y de Banach, teoría de distribuciones, espacios de Sobolev, ecuaciones elípticas, ecuaciones hiperbólicas y ecuaciones de tipo parabólico.

Pre-requisitos. Un curso de posgrado de Análisis Real es indispensable. Los cursos básicos de Ecuaciones Diferenciales Parciales y de Análisis Funcional son deseables pero no estrictamente necesarios.

Temario

1. Espacios de Hilbert y de Banach (2 semanas)
   - 1.1 Propiedades básicas
   - 1.2 El teorema de proyección, teorema de Riesz
   - 1.3 Operadores lineales: breve introducción a teoría espectral
   - 1.4 Espacio dual, alternativa de Fredholm
   - 1.5 Lema de Lax-Milgram y teoremas relacionados
   - 1.6 Métodos de aproximación
2. Teoría de distribuciones (2 semanas)
   - 2.1 Funciones de prueba y espacio de distribuciones
   - 2.2 Convergencia
   - 2.3 Cálculo de distribuciones: multiplicación, composición, convolución
   - 2.4 Distribuciones temperadas
   - 2.5 Transformadas de Fourier y de Laplace
3. Espacios de Sobolev (4 semanas)
   - 3.1 Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$. Definición y propiedades básicas.
   - 3.2 El teorema de traza. Completez.
   - 3.3 Espacios de Sobolev en dominios arbitrarios: definición y propiedades elementales
   - 3.4 Aproximaciones, extensiones, trazas
   - 3.5 Desigualdades de Sobolev y teoremas de encaje
   - 3.6 Compacidad: el teorema de Rellich-Kondrachov
   - 3.7 Desigualdades tipo Poincaré
   - 3.8 El espacio dual
   - 3.9 Espacios dependientes del tiempo
4. Formulación variacional para problemas elípticos (3 semanas)
   - 4.1 Operadores elípticos
   - 4.2 Formulación variacional: existencia y unicidad de soluciones débiles
   - 4.3 Teoría de regularidad para operadores elípticos de segundo orden
   - 4.4 Principio del máximo
   - 4.5 Teoría espectral
   - 4.6 Introducción al método de elemento finito
5. Formulación débil para problemas parabólicos (2.5 semanas)
   - 5.1 Existencia de soluciones débiles: aproximación de Galerkin
   - 5.2 Estimaciones de energía y unicidad
   - 5.3 Regularidad
   - 5.4 Principios del máximo
   - 5.5 Introducción a la teoría de semigrupos
6. Formulación débil para problemas hiperbólicos (2.5 semanas)
   - 6.1 Soluciones débiles
   - 6.2 Existencia: el método de Faedo-Galerkin
   - 6.3 Unicidad: estimaciones de energía
   - 6.4 Propagación de perturbaciones y estabilidad
   - 6.5 Sistemas simétricos hiperbólicos: estimaciones de energía
   - 6.6 Introducción a problemas mixtos (valores iniciales y de frontera)

7. Introducción a ecuaciones no lineales*
   7.1 Cálculo de las variaciones
   7.2 Ecuaciones de reacción-difusión
   7.3 Ecuaciones de onda no lineales
   7.4 Ecuaciones elípticas no lineales
   7.5 Leyes de conservación

Bibliografía

Bibliografía básica. Los textos centrales para este curso son el libro de Salsa [26] y la segunda parte del libro de Evans [11].

Bibliografía complementaria. La primera sección tiene como objetivo recordar material básico y estándar de Análisis Funcional en espacios de Hilbert y de Banach, con especial énfasis en el lema de Lax-Milgram y sus variaciones (lema de Stampacchia, lema de Babuska-Brezzi) y los métodos variacionales de aproximación (Galerkin, Ritz, Courant). El estudiante puede consultar cualquier libro de Análisis Funcional (recomiendo, sin embargo, libros con orientación a EDPs tales como Bressan [5], Brezis [6] y Rektorys [24], por citar algunos). Una introducción a la teoría espectral de operadores en espacios de Banach y de Hilbert se puede encontrar en los textos de Kato [16], Akhiezer y Glazman [2] y el cuarto volumen de Reed y Simon [23]. La sección dedicada a teoría de distribuciones se basará en los contenidos de los libros de Salsa [26] y Eskin [10]. Para profundizar en el tema recomiendo los clásicos textos de Schwartz [27] y Zemanian [32], así como el libro de Strichartz [29].

La parte central del curso está dedicada a desarrollar la teoría de espacios de Sobolev. Los temas se basarán fundamentalmente en la segundas partes de los libros de Salsa [26] y Evans [11]. Sin embargo, no todo el material que cubriremos está contenido en dichos textos. Invito al estudiante a que complemente con lecturas de otros textos como los libros de Eskin [10], Leoni [20], Folland [12], Kesavan [17] y Brézis [6]. Es necesario también mencionar la referencia canónica sobre el tema: el libro de Adams [1].

Para profundizar en el estudio de ecuaciones elípticas el clásico texto de Gilbarg y Trudinger [14] es una excelente opción. La segunda edición del texto de Renardy y Rogers [25] es una buena referencia para problemas elípticos que contiene, además, un capítulo muy bien escrito sobre problemas nolineales para aquél que desee iniciarse en ese tema. Un libro clásico es, por supuesto, el segundo tomo de Courant y Hilbert [7]. El libro de Showalter [28] es muy didáctico y recomendable (además de gratuito).

Para complementar el material dedicado a ecuaciones parabólicas recomiendo ampliamente los textos de Lieberman [21], Friedman [13], y Ladyzhenskaya *et al.* [18]. Asimismo, para la teoría de semigrupos, el texto de Renardy y Rogers [25] es una buena introducción, mientras que los libros clásicos de Pazy [22], Yosida [31] y Engel y Nagel [8, 9] son esenciales para quien desee profundizar. Lecturas complementarias de la sección dedicada a problemas hiperbólicos incluyen los libros de Ladyzhenskaya [19], Alinhac [3] y Benzoni-Gavage y Serre [4].

Finalmente, como complemento para todo el material de este curso y otros temas, véanse los textos de Jost [15] y Taylor [30].

*si el tiempo lo permite

Referencias

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1975.

[2] N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[3] S. Alinhac, *Hyperbolic partial differential equations*, Universitext, Springer, Dordrecht, 2009.

[4] S. Benzoni-Gavage and D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.

[5] A. Bressan, *Lecture Notes on Functional Analysis*, vol. 143 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[6] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

[7] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[8] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.

[9] ——, *A short course on operator semigroups*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2006.

[10] G. Eskin, *Lectures on linear partial differential equations*, vol. 123 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[11] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.

[12] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, second ed., 1995.

[13] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964.

[14] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[15] J. Jost, *Partial differential equations*, vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, second ed., 2007.

[16] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[17] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[18] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural′ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[19] O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, vol. 49 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1985.

[20] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, vol. 181 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2017.

[21] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.

[22] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[23] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1978.

[24] K. Rektorys, *Variational methods in mathematics, science and engineering*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, second ed., 1980. Translated from the Czech by Michael Basch.

[25] M. Renardy and R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 2004.

[26] S. Salsa, *Partial differential equations in action. From modelling to theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
[27] L. Schwartz, *Mathematics for the physical sciences*, Hermann, Paris, 1966.
[28] R. E. Showalter, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Electronic Monographs in Differential Equations, San Marcos, TX, 1994. Electronic reprint of the 1977 original; available at http://ejde.math.swt.edu/mtoc.html.
[29] R. S. Strichartz, *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
[30] M. E. Taylor, *Partial differential equations. Basic theory*, vol. 23 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.
[31] K. Yosida, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Sixth ed., 1980.
[32] A. H. Zemanian, *Distribution theory and transform analysis*, Dover Publications, Inc., New York, second ed., 1987. An introduction to generalized functions, with applications.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)
E-mail address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`