CURSO AVANZADO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES HIPERBÓLICAS NOLINEALES

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

(9 CRÉDITOS)

RAMÓN G. PLAZA

Información general

Horario.

Martes y jueves, 15:00 - 17:30hrs.
Salón 204, edificio anexo, IIMAS

Contacto.

Ramón G. Plaza
Oficina 225, segundo piso, IIMAS.
E-mail: `plaza@mym.iimas.unam.mx`

Horas de oficina.

Martes, 12:00 - 13:00 hrs. o mediante cita.

Página del curso.

https://mym.iimas.unam.mx/ramon/AvanzadoEDPs-2020-2.html

Evaluación.

Se evaluará al alumno con una presentación oral del contenido de un artículo de investigación.

Calendario.

- Periodo de clases: 27 de enero al 22 de mayo, 2020.
- Periodo de exámenes: 25 de mayo al 5 de junio, 2020.
- Días inhábiles: 3 de febrero, 16 de marzo, 1 y 15 de mayo, 2020.

Objetivo. El curso tiene dos objetivos principales: presentar al alumno los resultados básicos sobre existencia de soluciones a ecuaciones de onda nolineales (sección 1), así como dar una introducción a la teoría de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación nolineales (secciones 2 y 3). Asimismo, se presentará una panorámica de la teoría de Kreiss-Lopatinski para sistemas hiperbólicos con valores iniciales y de frontera (sección 4), si el tiempo lo permite.

Pre-requisitos. Un curso de posgrado de Análisis Real es indispensable. Los cursos básicos de Ecuaciones Diferenciales Parciales y de Análisis Funcional son deseables pero no estrictamente necesarios.

Temario

1. Ecuación de onda nolineal
   1.1 Introducción: espacios dependientes del tiempo. Teorema de Bochner.
   1.2 Conservación de energía y velocidad finita de propagación
   1.3 Existencia local de soluciones
   1.4 Ecuación de onda semilineal y nolinealidad subcrítica
   1.5 Nolinealidad crítica
   1.6 No existencia de soluciones
   1.7 Ecuación de Klein-Gordon nolineal
2. Ley de conservación escalar
   2.1 Soluciones débiles. Condiciones de entropía.
   2.2 Solución entrópica para flujo convexo: la fórmula de Lax. Ondas N.
   2.3 El problema de Riemann
   2.4 Teoría de Kružkov-Oleinik
   2.5 Varias dimensiones espaciales
3. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en una dimensión espacial
   3.1 Invariantes de Riemann.
   3.2 Ondas de rarefacción y discontinuidades de contacto.
   3.3 Ondas de choque. Condiciones de entropía de Lax, Oleinik y Liu-Oleinik.
   3.4 Solución al problema de Riemann.
   3.5 El teorema de representación de Lax.
   3.6 El esquema de Glimm.
   3.7 El método de aproximación viscosa: Teoría de Bianchini-Bressan.
4. Introducción a la teoría de Kreiss-Lopatinski*
   4.1 Sistemas simétricos hiperbólicos en sentido de Friedrichs
   4.2 Estimaciones de energía
   4.3 Problemas con valores iniciales y de frontera
   4.4 Lema de Hersh y la condición débil de Lopatinski
   4.5 Condición uniforme de Lopatinski
   4.6 Aplicaciones: estabilidad de ondas de choque no viscosas en varias dimensiones espaciales

Bibliografía

Bibliografía básica. La sección 1 tendrá como guía el último capítulo de la segunda edición del libro de Evans [7] (capítulo 12). Las secciones 2 y 3 estarán basadas principalmente en el libro de Dafermos [6]. Todo el material que se cubrirá en la sección 4 (y mucho más) se encuentra en el libro de Benzoni-Gavage y Serre [2].

Bibliografía complementaria. Aparte del libro de Evans, la sección 1 presentará material de los libros de Strauss [22] (secciones 1.3, 1.4), Kenig [12] (sección 1.5) y John [11] (sección 1.6). Asimismo, el estudiante puede complementar con lecturas de los textos de Cazenave y Haraux [5], Hörmander [10], Shatah y Struwe [20] y Taylor [23].

El material de las secciones 2 y 3 estará basada en muchas referencias. Aparte del ya mencionado libro de Dafermos [6], son importantes los textos de Smoller [21], los dos volúmenes

*si el tiempo lo permite

del libro de Serre [18, 19] y el libro de Majda [16]. Como textos introductorios al tema el estudiante puede consultar el capítulo 11 del libro de Evans [7], así como los capítulos dedicados al tema en los textos de Alinhac [1], Renardy y Rogers [17]. De manera especial recomiendo el libro de Godlewski and Raviart [8]. Más específicamente, la sección 3.7 estará basada enteramente en el libro de Bressan [4] y en el artículo original que dio lugar a la teoría [3].

Para la sección 4, consultaremos también el segundo tomo del libro de Serre [19], el artículo revisionista de Higdon [9], así como las monografías de Majda [15, 14] sobre ondas de choque en varias dimensiones espaciales. Recomiendo leer el artículo original de Kreiss [13] sólo después del curso.

Referencias

[1] S. Alinhac, *Hyperbolic partial differential equations*, Universitext, Springer, Dordrecht, 2009.

[2] S. Benzoni-Gavage and D. Serre, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.

[3] S. Bianchini and A. Bressan, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 1, pp. 223–342.

[4] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws: The one-dimensional Cauchy problem*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000.

[5] T. Cazenave and A. Haraux, *An introduction to semilinear evolution equations*, vol. 13 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors.

[6] C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, fourth ed., 2016.

[7] L. C. Evans, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.

[8] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.

[9] R. L. Higdon, *Initial-boundary value problems for linear hyperbolic systems*, SIAM Review **28** (1986), no. 2, pp. 177–217.

[10] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, vol. 26 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[11] F. John, *Nonlinear wave equations, formation of singularities*, vol. 2 of University Lecture Series, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. Seventh Annual Pitcher Lectures delivered at Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, April 1989.

[12] C. E. Kenig, *Lectures on the energy critical nonlinear wave equation*, vol. 122 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[13] H.-O. Kreiss, *Initial boundary value problems for hyperbolic systems*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), pp. 277–298.

[14] A. Majda, *The existence of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **43** (1983), no. 281, pp. v + 93.

[15] ——, *The stability of multi-dimensional shock fronts*, Mem. Amer. Math. Soc. **41** (1983), no. 275, pp. iv + 95.

[16] ——, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.

[17] M. Renardy and R. C. Rogers, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 2004.

[18] D. Serre, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

[19] ——, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

[20] J. Shatah and M. Struwe, *Geometric wave equations*, vol. 2 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[21] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, vol. 258 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, New York, second ed., 1994.

[22] W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, vol. 73 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[23] M. E. Taylor, *Partial differential equations III. Nonlinear equations*, vol. 117 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1997.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)
Email address: plaza@mym.iimas.unam.mx