Lección 1.3: Operadores lineales. Espacio dual. Alternativa de Fredholm.

1.3 Operadores lineales.

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach.
Mismo campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Def. • Un operador lineal A es un mapeo $A : D(A) \subset X \to Y$ definido en un dominio $D(A) \subset X$, subespacio vectorial de X, tal que $A(\alpha u + v) = \alpha Au + Av$, $\forall\, u, v \in D(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

• El rango de A, $R(A) := \{ w \in Y : w = Au$ para cierto $u \in D(A) \}$, es un subespacio vectorial de Y (ejercicio).

• El núcleo de A, $\ker A := \{ u \in D(A) : Au = 0 \} \subset X$ es un subespacio vectorial de X.
A es inyectivo ssi $\ker A = \{0\}$. (ejercicio).

Def. Un operador $A : D(A) \subset X \to Y$ es acotado si $\exists\, M > 0$ tal que $\|Au\|_Y \leq M \|u\|_X$ $\forall\, u \in D(A)$.
En este caso

$$\|A\|_{X \to Y} := \|A\| := \inf \{ M > 0 : \|Au\|_Y \leq M \|u\|_X \ \forall\, u \in D(A) \}$$

$$= \sup_{\substack{u \in D(A) \\ \|u\|_X \leq 1}} \|Au\|_Y < \infty \qquad \cdots (1)$$

Def. Un operador $A : D(A) \subset X \to Y$ es continuo en $\tilde{u} \in D(A)$ si: $\|u_n - \tilde{u}\|_X \to 0$, $u_n \in D(A)$, $n \to \infty$ implica que $\|Au_n - A\tilde{u}\|_Y \to 0$ si $n \to \infty$

Lema Un operador lineal $A: D(A) \subset X \to Y$ es acotado ssi es continuo.

Dem. "$\Leftarrow$" A continuo en $0 \in D(A)$ (esp. vect.). Así, $\forall u_0 \in D(A)$ con $\|u_0\| \leq 1$ la sucesión $u_n := \frac{1}{n} u_0 \in D(A)$ satisface $\|u_n\| \leq \frac{1}{n} \to 0$ si $n \to \infty$. continuidad: $\|Au_n\|_Y \to 0$ si $n \to \infty$. Entonces dado $\epsilon \equiv 1 > 0$ $\exists$ $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $\|Au_n\|_Y = \frac{1}{n}\|Au_0\|_Y \leq 1$. En particular, tomando $n \equiv N_0$ obtenemos $\|Au_0\|_Y \leq N_0$ (acotado). Así, $\|A\| < \infty$.

"$\Rightarrow$" Para cualesquiera $u_1, u_2 \in D(A)$, $u_1 \neq u_2$ tenemos

$$\|Au_1 - Au_2\|_Y = \|u_1 - u_2\|_X \left\| A\left(\frac{u_1 - u_2}{\|u_1 - u_2\|_X}\right)\right\|_Y$$

$$\leq \|A\| \, \|u_1 - u_2\|_X$$

$\therefore$ A es unif. Lipschitz continua $\square$

Def. Al conjunto de operadores $\left\{\begin{array}{l}\text{lineales} \\ \text{lineales y acotados}\end{array}\right\}$ de X en Y con dominio $D \equiv X$ lo denotamos por $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}(X, Y) \\ \mathcal{B}(X, Y)\end{array}\right\}$. Claramente $\mathcal{B}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

Lema $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio vectorial normado con norma, $\|\cdot\|_{X \to Y} = \|\cdot\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$, dada por (1)

Además es de Banach.

Dem. Ejercicio (ver Bressan, p. 17) $\square$

Teorema (Banach-Steinhaus)
Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ de Banach y $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ una familia de operadores lineales acotados. Entonces:
(i) $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada, es decir,
$$\sup_{A\in\mathcal{F}} \|A\| < \infty$$
ó bien, (ii) $\exists\ S \subset \mathbb{X}$, denso en $\mathbb{X}$, tal que
$$\sup_{A\in\mathcal{F}} \|Au\|_{\mathbb{Y}} = \infty \quad \forall\ u \in S.$$

Dem. Ver Bressan, p. 61 (se aplica teo. de Baire) $\square$

Corolario (principio de acotamiento uniforme)
Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ familia de operadores tal que $\sup_{A\in\mathcal{F}} \|Au\|_{\mathbb{Y}} < \infty \quad \forall\ u\in\mathbb{X}$ con $\|u\|_{\mathbb{X}} \leq 1$. Entonces:
$$\sup_{A\in\mathcal{F}} \sup_{\substack{\|u\|\leq 1 \\ u\in}} \|Au\|_{\mathbb{Y}} = \sup_{A\in\mathcal{F}} \|A\| < \infty.$$

Teorema (mapeo abierto)
Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ de Banach. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ un operador supra yectivo: $\mathcal{R}(A) = \mathbb{Y}$. Entonces A es abierto: para cualquier $\Omega \subset \mathbb{X}$ abierto en $\mathbb{X}$, $A(\Omega)$ es abierto en $\mathbb{Y}$.

Dem. Ver Bressan, p. 63 $\square$

Def. Sean X, Y de Banach. Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to Y$ es <u>cerrado</u> si: $\forall u_n \in D(A)$ tal que $u_n \to u$ en X para cierto $u \in X$ y $Au_n \to v$ en Y, entonces $u \in D(A)$ y $Au = v$.

El conjunto de operadores cerrados de X en Y (con dominio $D \equiv X$) se denota por $\mathscr{C}(X, Y)$.

Lema Sea $A : D(A) \subset X \to Y$ acotado. Entonces: A es cerrado ssi $D(A)$ es cerrado en X.

Dem. Ver Kato, p. 164. $\square$

Corolario $\mathscr{B}(X, Y) \subset \mathscr{C}(X, Y)$ (ya que $D(A) = X$ $\forall A \in \mathscr{B}(X, Y)$ por definición).

Teorema (gráfica cerrada)
Sean X, Y de Banach, $A : D(A) \subset X \to Y$ cerrado. Si $D(A) = X$ entonces $A \in \mathscr{B}(X, Y)$.

Dem. Kato, pg. 166 $\square$

Resolvente y espectro

Sea $A : D(A) \subset X \to Y$, X, Y de Banach, cerrado y densamente definido: $\overline{D(A)} = X$. Se definen:

$\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\} \ni \begin{cases} \text{nul } A := \dim(\text{Ker } A) & \text{(nulidad)} \\ \text{def } A := \text{codim } \mathscr{R}(A) \\ \quad = \dim(Y / \mathscr{R}(A)) & \text{(deficiencia)} \end{cases}$

A se denomina semi-Fredholm si :

- $R(A)$ es cerrado en Y
- $\operatorname{nul} A < \infty$ ó $\operatorname{def} A < \infty$

En este caso : $\operatorname{ind} A := \operatorname{nul} A - \operatorname{def} A$
$\in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$

A es Fredholm si A es semi-Fredholm y $\operatorname{nul} A < \infty$, $\operatorname{def} A < \infty$.

Def. Sea $A : D(A) \subset X \to Y$, densamente definido y cerrado. Se definen :

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : A-\lambda \text{ es inyectivo}, A-\lambda \text{ es sobre y } (A-\lambda)^{-1} \in B(Y,X) \}$$

[resolvente de A]

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Lema Sea $A : D(A) \subset X \to Y$ cerrado y sobre, $R(A) = Y$. Si A es invertible entonces $A^{-1} \in B[Y,X)$.

Dem. Ver Kato, p. 167 $\square$

Lema (Weyl) Sean X, Y de Banach, $A : D(A) \subset X \to Y$ lineal, cerrado, densamente definido. Entonces :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{pt}(A)$$

donde : $\sigma_{pt}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : A-\lambda$ es Fredholm con $\operatorname{ind}(A-\lambda) = 0$ y $\ker(A-\lambda) \neq \{0\} \}$.

$\sigma_{ess}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} :$ $A-\lambda$ no es Fredholm, ó $A-\lambda$ es Fredholm con $\operatorname{ind}(A-\lambda) \neq 0 \}$.

Además $\sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{pt}(A) = \phi$.

<u>Def.</u> Si $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$ entonces $A-\lambda$ <u>no</u> es inyectivo. $\therefore$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \rho(A) = \sigma(A)$.

Si $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow$ $A-\lambda$ es inyectivo, sobre ($R(A-\lambda) = Y$, cerrado)

y $\operatorname{nul}(A-\lambda) = 0$, $\operatorname{def}(A-\lambda) = 0 \Rightarrow$
A es Fredholm con $\operatorname{ind}(A-\lambda) = 0$
$\therefore$ $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}(A)$

$\therefore$ $\sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A)$.

$\Rightarrow$ $\sigma_{pt}(A) \cup \sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A)$.

Suponiendo $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \sigma_{ess}) \cap [\mathbb{C} \setminus \sigma_{pt}]$ entonces $A-\lambda$ es Fredholm con $\operatorname{ind}(A-\lambda) = 0$ y $\ker(A-\lambda) = \{0\}$. $\therefore$ $A-\lambda$ es invertible

$A-\lambda$ cerrado, $(A-\lambda)^{-1} \exists$ $\underset{\text{lema}}{\Rightarrow}$ $(A-\lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$.

Es decir, $\lambda \in \rho(A)$. Así :

$$\sigma(A) \subset \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{pt}(A) \qquad \square$$

Observación : $\sigma_{pt}(A)$ es un conjunto discreto de valores propios aislados con multiplicidad finita.

$m.g.(\lambda) := \dim \ker(A-\lambda) = \mathrm{nul}(A-\lambda)$
(mult. geométrica)

$\lambda \in \sigma_{pt}(A)$

sea $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$, si $\ker(A-\lambda) = \mathrm{span}\{u_0\}$, $u_0 \neq 0$ se dice que λ tiene multiplicidad algebraica m si podemos resolver $(A-\lambda)u_j = u_{j-1}$ con $u_j \neq 0$, para todo $1 \leq j \leq m-1$, pero no existe solución $u \neq 0$ de $(A-\lambda)u = u_{m-1}$.
Para $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$ general con $\ker(A-\lambda) = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_N\}$ ($m.g.(\lambda) = N$) la multiplicidad algebraica se define como $\sum_{j=1}^{N} m_j$
$m_j = m.a.$ de cada u_j.

Def: X, Y de Banach. Un operador $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ es compacto si para cada $u_n \in X$ acotada existe una subsucesión $u_{n_j} \in X$ tal que Au_{n_j} converge en Y.

Conjunto de operadores compactos de X en Y se le denota como $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$.

Lema $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ de Banach. Entonces:

(a) Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ tal que $\dim \mathcal{R}(A) < \infty$ entonces A es compacto.

(b) Sea $A_n \in \mathcal{K}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, suc. de operadores compactos. Si $\|A_n - A\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cierto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ entonces A es compacto.

Dem. Ver Bressan, p. 68 $\square$

Ejemplos:

- $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = C([a,b]; \mathbb{R})$, $-\infty < a < b < \infty$ en la sup norma.

  Si
  $$\begin{cases} K : [a,b) \times [a,b] \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto K(x,y) \end{cases}$$
  es continua, entonces el operador
  $$\begin{cases} A : \mathbb{X} \to \mathbb{X} \\ (Au)(x) := \displaystyle\int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy \end{cases}$$
  es lineal y compacto de $C([a,b]; \mathbb{R})$ en $C([a,b]; \mathbb{R})$.

- $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ de Banach tal que $\mathbb{X} \subset\subset \mathbb{Y}$. Entonces el operador inclusión
  $$\begin{cases} i : \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \\ u \mapsto u \end{cases}$$
  es compacto.

1.4 Espacio dual. Alternativa de Fredholm.

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Como $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es de Banach, el espacio de funcionales lineales continuos es el espacio (de Banach) de operadores lineales acotados de X en $\mathbb{K}$:

$$X^* := \{ \ell : X \to \mathbb{K} : \text{lineal y acotado} \}$$

$$= \mathcal{B}(X, \mathbb{K}) \qquad \text{espacio dual}$$

$(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es de Banach $\Rightarrow$ X^* es de Banach en la norma

$$\|\ell\|_* := \sup_{\substack{\|u\| \le 1 \\ u \in X}} |\ell(u)| .$$

X^{**} es el espacio de funcionales lineales continuos en X^*:

$$X^{**} = \{ \Phi : X^* \to \mathbb{K} : \ell \mapsto \Phi(\ell) \text{ es continuo y lineal} \}$$

con norma $\|\Phi\|_{**} = \sup_{\substack{\|\ell\|_* \le 1 \\ \ell \in X^*}} |\Phi(\ell)|$

$(X^{**}, \|\cdot\|_{**})$ es de Banach.

Nota: todo $u \in X$, fijo, define un elemento en X^{**}:

$$\begin{cases} \ell \xmapsto{\Phi_u} \ell(u) \\ \Phi_u(\ell) := \ell(u) \qquad \forall\, \ell \in X^* \end{cases}$$

Teo. extensión X Banach. Entonces $\forall u \in X$ $\exists$ $\ell \in X^*$ tal que $\|u\|_X = \ell(u)$ y $\|\ell\|_* = 1$

Dem. Bressan, p. 30 $\square$

Así,
$$\|\Phi_u\|_{**} = \sup_{\substack{\|\ell\|_* \leq 1 \\ \ell \in X^*}} |\ell(u)| \underset{\text{teo. ext.}}{=} \|u\|_X$$

Inclusión isométrica:
$$\begin{cases} i : X \to X^{**} \\ i : u \mapsto \Phi_u \end{cases}$$
$$\|u\|_X = \|\Phi_u\|_{**} = \|i(u)\|_{**}$$

Podemos escribir $X \subset X^{**}$ $\left(i(X) \subset X^{**} \right)$

Def. X es reflexivo si $X \simeq X^{**}$
(todo funcional lineal continuo en X^* es de la forma Φ_u para cierto $u \in X$).

Def: X Banach, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es débilmente convergente si $\exists\, u \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} l(u_n) = l(u) \qquad \forall\, l \in X^*$$

u es el límite débil de u_n: $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \\ w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u. \end{cases}$

Riesz, (esp. Hilbert) : $\underbrace{\langle u_n, v\rangle}_{l(u_n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\langle u, v\rangle}_{l(u)}$ $\forall v \in X$.

El límite débil (si $\exists$) es único (ejercicio).

$i : X \to X^{**}$ induce una topología débil en X^*:

Def: $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$, X Banach converge débilmente-* a $l \in X^*$ si

$$\lim_{n\to\infty} l_n(u) = l(u) \qquad \forall\, u \in X$$

Notación: $\begin{cases} l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l \\ w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} l_n = l \in X^* \end{cases}$

$l_n \overset{*}{\rightharpoonup} l$ ssi $|l_n(u) - l(u)| \to 0$ si $n\to\infty$ $\forall u \in X$

$l_n \to l$ en X^* ssi $\|l_n - l\|_* = \sup\limits_{\substack{u\in X \\ \|u\|\le 1}} |l_n(u) - l(u)| \xrightarrow{\text{si } n\to\infty} 0$

Teo. clase pasada : si $\dim X^* = \infty$ entonces $\overline{B_1(0)} = \{ \ell \in X^* : \|\ell\|_* \leq 1 \}$ no es compacta.

Teorema (Banach - Alaoglu)

X Banach, separable. Entonces toda sucesión $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ acotada tiene una subsucesión ℓ_{n_j} convergente débilmente $-*$: $\exists$ $\ell = w^* - \lim_{j\to\infty} \ell_{n_j}$, $\ell \in X^*$.

Dem. Ver Bressan, p. 34 $\square$

Lema (caracterización de conv. débilmente $-*$)

X Banach. Entonces $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ converge débilmente $-*$ ssi :

(i) $\{ \|\ell_n\|_* : n\in\mathbb{N} \}$ es acotado

y (ii) $\lim_{n\to\infty} \ell_n(u) = \ell(u)$ $\forall u \in D \subset X$

con D denso en X.

Dem. "$\Rightarrow$" si $\ell_n \overset{*}{\rightharpoonup} \ell$ entonces (ii) es inmediato. Además por convergencia

$$\|\ell_n\|_* = \sup_{\substack{\|u\|\leq 1 \\ u\in X}} |\ell_n(u)| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ $\exists$ $C>0$ tal que $\|\ell_n\|_* \leq C$ $\forall n$ $\Rightarrow$ (i)

"$\Leftarrow$" Suponemos (i) y (ii). Sea $D \subset X$, denso, $\overline{D} = X$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ y $u \in X$ $\exists$ $v \in D$ tal que $\|u - v\| < \varepsilon$

Así,

$$|l_n(u) - l(u)| \leq |l_n(v) - l_n(u)| + |l_n(v) - l(v)| + |l(v) - l(u)|$$

$$\leq \underbrace{\|l_n\| \|u - v\| + \|l\| \|u - v\|}_{\leq C \|u-v\| \leq C\varepsilon} + \underbrace{|l_n(v) - l(v)|}_{\leq \tilde{C}\varepsilon \text{ si } n \gg 1}$$

Así, $l = w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} l_n$, $l_n \xrightarrow{*} l$ $\square$

<u>Lema</u> Sea X Banach, reflexivo, $X \cong X^{**}$. Entonces $\forall \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ acotada existe subsucesión u_{n_j} que converge débilmente en X ($u_{n_j} \rightharpoonup u$ en X).

<u>Dem</u>. Ejercicio. $\square$

<u>Lema</u>, Sea $(H, \langle , \rangle)$. Entonces:

(a) Si $u_n \rightharpoonup u$ en H entonces u_n es acotada.

(b) Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es acotada entonces $\exists$ subsucesión $u_{n_j} \rightharpoonup u$ si $j\to\infty$ para cierto $u\in H$.

Dem. Ejercicio (usar Banach-Alaoglu) $\square$

Operador adjunto

X, Y Banach. Sea $A\in \mathcal{B}(X,Y)$

Entonces $\forall\, \ell\in Y^*$ se puede definir

$$\begin{cases} \psi_A \in X^* \\ \psi_A : X \longrightarrow \mathbb{K} \\ \psi_A(u) := \ell(Au) \end{cases}$$

ψ_A es lineal y continuo (ejercicio).

Definimos:
$$\begin{cases} A^* : Y^* \to X^* \\ A^*\ell := \psi_A \end{cases}$$

operador adjunto de A

Lema $A\in \mathcal{B}(X,Y) \Rightarrow A^*\in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$

Dem. Ejercicio $\square$

Además, $(A^*\ell)(u) = \varphi_A(u) = \ell(Au)$
$\forall u \in X$

Si X, Y son de Hilbert, por Riesz

$$\langle A^* v, u\rangle_X = \langle v, Au\rangle_Y \quad \forall u\in X \quad \forall v \in Y$$

Lema. X, Y Banach, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$
$A^* \in \mathcal{B}(Y^*, X^*)$

Entonces: (a) $\|A^*\| = \|A\|$

(b) $\ker A = \mathcal{R}(A^*)^\perp$
$\ker A^* = \mathcal{R}(A)^\perp$

Nota: X Banach, $M \subset X$ subespacio

$$M^\perp := \{ \ell \in X^* : \ell(u) = 0 \quad \forall u \in M \}$$

es un espacio lineal cerrado.

Dem. $\|A\| = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} \|Au\|_Y$

$$= \sup_{\substack{\|u\|\leq 1 \\ \|\ell\|_{Y^*}\leq 1}} |\ell(Au)| \quad \text{ejercicio}$$

$$= \sup_{\substack{\|u\|\leq 1 \\ \|\ell\|_{*}\leq 1}} |(A^*\ell)(u)|$$

$$= \sup_{\|\ell\|_* \leq 1} \|A^*\ell\|_* = \|A^*\|$$

(b) $u \in \operatorname{Ker} A \iff Au = 0$

$\iff \ell(Au) = 0 \quad \forall \ell \in Y^*$

$\iff (A^*\ell)(u) = 0 \quad \forall \ell \in Y^*$

$\underset{\text{def}}{\iff} u \in \mathcal{R}(A^*)^\perp$

Análogamente $\operatorname{Ker} A^* = \mathcal{R}(A)^\perp$ $\square$

Lema Todo H de Hilbert es reflexivo: $H^{**} = H$

Dem. Aplicar Riersz (Kato, p. 252) $\square$

Lema Sea H de Hilbert. $K \in \mathcal{K}(H, H)$ compacto. Si $u_n \rightharpoonup u$ en H entonces $Ku_n \to Ku$ en H.

Dem. Ver Bressan $\square$

Teorema Sea H de Hilbert. Si $K \in \mathcal{K}(H, H)$ entonces $K^* \in \mathcal{K}(H, H)$.

Dem. $H \supset \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotada. Lema (b)

$\Rightarrow \exists\ u_{n_j} \rightharpoonup u$ en H

$$\|K^* u_{n_j} - K^* u\|^2 = \langle K^*(u_{n_j} - u), K^*(u_{n_j} - u)\rangle$$
$$= \langle KK^*(u_{n_j} - u), u_{n_j} - u\rangle$$

Además, $\forall v \in H$:

$$\langle K^* u_{n_j}, v\rangle = \langle u_{n_j}, Kv\rangle \longrightarrow \langle u, Kv\rangle$$
$$= \langle K^* u, v\rangle$$
si $j \to \infty$

es decir, $K^* u_{n_j} \rightharpoonup K^* u$ débilmente en H.

Por lema : $KK^* u_{n_j} \to KK^* u$ en H

Así, $\|K^* u_{n_j} - K^* u\|^2 \leq \underbrace{\|KK^* u_{n_j} - KK^* u\|}_{\xrightarrow[j\to\infty]{} 0} \times \underbrace{\|u_{n_j} - u\|}_{\leq C}$

$\therefore K^* u_{n_j} \to K^* u$ si $j \to \infty$

$\therefore K^*$ es compacto. $\square$

Teorema (alternativa de Fredholm)

Sea H de Hilbert real. Sea $K \in \mathcal{L}(H, H)$ compacto. Entonces :

(a) $\dim \operatorname{Ker}(I-K) < \infty$
(b) $R(I-K)$ es cerrado
(c) $R(I-K) = \left(\operatorname{Ker}(I-K^*)\right)^\perp$
(d) $\operatorname{Ker}(I-K) = \{0\}$ ssi $R(I-K) = H$
(e) $\dim \operatorname{Ker}(I-K) = \dim \operatorname{Ker}(I-K^*)$.

Nota: Tenemos dos posibilidades:

(I) $\ker(I-K)=\{0\}$. Si queremos hallar $u\in H$ a $(I-K)u=f$ con $f\in H$ dado (K compacto) entonces (d) $R(I-K)=H$, $I-K$ es inyectivo, sobre.

$\therefore\ \forall f\in H\ \exists!$ solución $u=(I-K)^{-1}f$

(II) $\ker(I-K)\neq\{0\}$.

La ecuación homogénea $(f=0)$ tiene al menos una solución no trivial

$\ker(I-K)\ni u_0\neq 0$ Entonces el problema tiene soluciones ssi $f\in R(I-K)$

$$\overset{\shortparallel}{(\ker(I-K^*))^{\perp}}$$

ssi $\langle f,u\rangle=0\quad\forall\ u\in H$ tal que $(I-K^*)u=0$

Dem. (a) Por contradicción: $\dim\ker(I-K)=\infty$

$\Rightarrow\exists$ conjunto infinito ortonormal

$\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\ker(I-K)$

$\|\varphi_j\|=1$, $\quad\langle\varphi_j,\varphi_i\rangle=0\quad\forall\ i\neq j$

$\therefore \quad K\varphi_j = \varphi_j \quad \forall j$

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|^2 = \|\varphi_j\|^2 + \|\varphi_k\|^2 - 2\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle$$

$$= 2 \quad \text{si } j \neq k$$

$$\Rightarrow \quad \|K\varphi_j - K\varphi_k\|^2 = 2 \quad \forall j \neq k$$

No $\exists$ subsucesión convergente.
contradicción con K compacto.

(c) $(I-K)^* = I - K^*$

$\therefore \quad R(I-K) = \left(\ker\,(I-K)^*\right)^\perp$

$= \left(\ker\,(I-K^*)\right)^\perp$

(b), (d), (e) ver Bessan p. 102
Evans, p. 729

$\square$