Lección 1.4: Teorema de Lax-Milgram y lemas relacionados.

Preliminares:

Def. Sea $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert. Se dice que $A \subseteq H$ es débilmente cerrado si $\forall \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ convergente débilmente a $u \in H$ ($u_n \rightharpoonup u \in H$) entonces $u \in A$.

Teorema (de separación de Hahn-Banach)
Sea $(X, \|\cdot\|)$ normado, real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Sean $A \subseteq X$, compacto y convexo, y $B \subseteq X$, cerrado y convexo tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces $\exists f \in X^*$ (funcional lineal acotado) tal que

$$\sup_{x\in A} f(x) < \inf_{x\in B} f(x)$$

Dem. ver Dunford-Schwarz, parte I, p. 417 $\square$

Lema auxiliar Sea $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real. Sea $K \subset H$ cerrado y convexo. Entonces K es débilmente cerrado.

Dem. Por contradicción: sea $u_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $u_n \rightharpoonup u \in H$, pero $u \notin K$. Sean

$A := \{u\}$ (compacto y convexo)

$B := K$ (cerrado y convexo)

Por el teo. de Hahn-Banach $\exists$ $f \in H^*$ tal que
$$\inf_{u \in B} f(u) > \sup_{u \in A} f(u)$$

$(X, <,>)$ de Hilbert : por Riesz $\exists!$ $v_f \in H$ tal que

$$\sup_{w \in A} <w, v_f> = <u, v_f> < \inf_{w \in K} <w, v_f>$$
$$\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} <u_n, v_f>$$

contradicción con $u_n \to u$ en H $\square$

<u>Teorema 1 (mínimo sobre K, convexo)</u>

Sea $(H, <,>)$ de Hilbert real. Sea $K \subseteq H$ cerrado y convexo. Entonces para cada $v \in H$ fijo existe un único $u \in K$ tal que

$$\|u - v\| = \min_{w \in K} \|v - w\| \quad \cdots (1)$$

Mas aún, podemos determinar $u \in K$ mediante

$$u \in K \text{ tal que } <v-u, w-u> \leq 0 \ \forall w \in K \quad \cdots (2)$$

<u>Dem.</u> Para cada $v \in H$ fijo:

$$d := \inf_{w \in K} \|v - w\| \geq 0$$

Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ una sucesión minimizante:

$\|u_n - v\| \to d$ si $n \to \infty$.

Entonces $\{u_n\}$ debe ser acotada:

$$\|u_n\| \leq \underbrace{\|v - u_n\|}_{\text{acotado x convergencia}} + \|v\|$$

Entonces $\exists$ u_{n_j} subsucesión tal que $u_{n_j} \to u \in H$ si $j \to \infty$. Así,

$$\|v-u\|^2 = \langle v-u, v-u\rangle$$
$$= \langle v-u, v-u_{n_j}\rangle + \underbrace{\langle v-u, u_{n_j}-u\rangle}_{\substack{0 \\ \uparrow \text{ si } j\to\infty,\ u_{n_j}\to u}}$$
$$\leq \|v-u\|\,\|v-u_{n_j}\| \longrightarrow d\,\|v-u\|$$

$$\therefore \quad \|v-u\| \leq d$$

Lema aux: K cerrado y convexo, $u_{n_j} \in K$, $u_{n_j} \to u \in H \Rightarrow u \in K$

$$\therefore \quad \|v-u\| \geq \inf_{w\in K} \|v-w\| = d.$$

Es decir, $\exists$ $u \in K$ tal que $\|u-v\| = d$.

unicidad: sup. $\exists$ $u' \in K$ tal que $\|u'-v\| = d$.

K convexo $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}(u+u') \in K$

$$\|v-\tfrac{1}{2}(u+u')\|^2 = \langle \tfrac{1}{2}(u-v)+\tfrac{1}{2}(u'-v), \tfrac{1}{2}(u-v)+\tfrac{1}{2}(u'-v)\rangle$$

$$= \tfrac{1}{4}\|u-v\|^2 + \tfrac{1}{4}\|u'-v\|^2 +$$

$$+\tfrac{1}{4}\langle u-v, \underbrace{u'-v+u-u}\rangle + \tfrac{1}{4}\langle u'-v, u-v+u'-u'\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\|u-v\|^2 + \tfrac{1}{2}\|u'-v\|^2 +$$

$$+\tfrac{1}{4}\langle u-v, u'-u\rangle + \tfrac{1}{4}\langle u'-v, u-u'\rangle$$

$$= \tfrac{1}{2}\|u-v\|^2 + \tfrac{1}{2}\|u'-v\|^2 - \tfrac{1}{4}\|u'-u\|^2$$

$$= d^2 - \|\tfrac{1}{2}(u'-u)\|^2 < d^2 \quad \text{si} \quad u' \neq u$$

contradicción con def. de d.

$\therefore$ $u \in K$ es único.

Finalmente (2): $\forall w \in K$, $\forall \alpha \in (0,1)$
$\alpha w + (1-\alpha)u \in K$ (por convexidad)

$$\|u-v\| = \inf_{w\in K} \|w-v\|$$

$$\leq \|(v-u) - \alpha(w-u)\|$$

$$\Rightarrow \|u-v\|^2 \leq \|(v-u)-\alpha(w-u)\|^2$$

$$= \|u-v\|^2 + \alpha^2\|w-u\|^2 - 2\alpha\langle v-u, w-u\rangle$$

$$\langle v-u, w-u\rangle \leq \frac{\alpha}{2}\|w-u\|^2 \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

Tomando lím cuando $\alpha \to 0^+$ obtenemos (2).

Análogamente, si $u \in K$ satisface (2) entonces

$$\|v-u\|^2 - \|v-w\|^2 = \underbrace{2\langle v-u, w-u\rangle}_{\leq 0 \text{ por } (2)} - \|u-w\|^2$$

$$\leq 0 \qquad \forall w \in K.$$

La igualdad se cumple ssi $u = w$. Es decir, $u \in K$ es tal que

$$\|v-u\| = \min_{w \in K} \|v-w\| \qquad \square$$

Corolario $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $K \subseteq H$ cerrado y convexo. Se define el mapeo:

$$\begin{cases} P_K : H \longrightarrow K \\ P_K(v) := u, \qquad \forall v \in H \end{cases}$$

(para cada $v \in H$ fijo, $u \in K$ es el único elemento del Teorema 1). Entonces, $\forall\, v_1, v_2 \in H$

$$\| P_K(v_1) - P_K(v_2) \| \leq \| v_1 - v_2 \|$$

Dem. Sean $v_1, v_2 \in H$ arbitrarios. Como $P_K(v_1), P_K(v_2) \in K$ entonces

$$\langle v_1 - P_K(v_1), P_K(v_2) - P_K(v_1)\rangle \leq 0$$

$$\langle v_2 - P_K(v_2), P_K(v_1) - P_K(v_2)\rangle \leq 0$$

Restando:

$$\frac{1}{2}\langle (v_1-v_2)-(P_K(v_1)-P_K(v_2)),\ P_K(v_2)-P_K(v_1)\rangle \leq 0$$

es decir,

$$\|P_K(v_1)-P_K(v_2)\|^2 \leq \langle v_1-v_2,\ P_K(v_2)-P_K(v_1)\rangle$$
$$\leq \|v_1-v_2\|\,\|P_K(v_2)-P_K(v_1)\|$$

$$\Rightarrow \quad \|P_K(v_2)-P_K(v_1)\| \leq \|v_1-v_2\|$$

$\square$

Formas bilineales

Def. Sea $(H,\langle,\rangle)$ de Hilbert sobre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Una forma bilineal es un mapeo $a(\cdot,\cdot): H\times H \to \mathbb{K}$ que satisface:

(i) $a(\lambda u+v,w) = \lambda a(u,w) + a(v,w)$
(ii) $a(u,\lambda v+w) = \bar{\lambda} a(u,v) + a(u,w)$

$\forall\, u,v,w\in H,\quad \lambda\in\mathbb{K}.$

Se dice que $a(\cdot,\cdot)$ es continua si $\exists\ \alpha>0$ constante tal que

$$|a(u,v)| \leq \alpha\,\|u\|\,\|v\| \quad \forall\, u,v\in H$$

Se dice que $a(\cdot,\cdot)$ es <u>H-elíptica</u> si $\exists\ \beta>0$ tal que

$$a(u,u) \geq \beta \|u\|^2 , \quad \forall u \in H$$

Se dice que $a(\cdot,\cdot)$ es <u>simétrica</u> si $a(u,v) = a(v,u)\ \forall\ u,v \in H$.

<u>Lema.</u> Sea $(H,\langle,\rangle)$ de Hilbert, y sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal simétrica, continua y H-elíptica. Entonces $a(\cdot,\cdot)$ define un producto interno en H,

$$\begin{cases} \langle , \rangle_a : H \times H \to \mathbb{R} \\ \langle u,v \rangle_a := a(u,v) \end{cases}$$

cuya topología inducida es equivalente a la original:

$$\beta \|u\|^2 \leq a(u,u) = \|u\|_a^2$$
$$\leq \alpha \|u\|^2$$

<u>Dem.</u> Ejercicio $\square$

<u>Teorema 2 (mínimo de un funcional sobre K)</u>

Sean $(H,\langle,\rangle)$ de Hilbert real, $a(\cdot,\cdot): H\times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua, H-elíptica y simétrica. Sean $K \subseteq H$ cerrado y convexo, y $f \in H$ arbitrario.

Entonces $\exists!\ u \in K$ tal que :

(3) ... $a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\ v \in K.$

Mas aún, $u \in K$ está determinada por la fórmula variacional

(4) ... $u \in K$ tal que $J[u] = \min_{v \in K} J[v]$

donde $J : H \to \mathbb{R}$ se define mediante

$$J[v] := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v \rangle, \quad \forall\ v \in H.$$

Dem. Por hipótesis sobre $a(\cdot,\cdot)$, se induce un producto interno en H, $\langle u, v \rangle_a = a(u,v)$, $\forall u, v \in H$. $(H, \langle , \rangle_a)$ es de Hilbert.

Dado $f \in H$, fijo, el mapeo $v \mapsto \langle f, v \rangle$ es un funcional lineal continuo en $(H, \langle , \rangle_a)$. Por Riesz, $\exists!\ \tilde{f} \in H$ tal que

$$a(\tilde{f}, v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall\ v \in H.$$

Calculamos :

$$\frac{1}{2} a(v-\tilde{f}, v-\tilde{f}) = \frac{1}{2} a(v,v) - a(v,\tilde{f}) + \frac{1}{2} a(\tilde{f},\tilde{f})$$

$$= J[v] + \frac{1}{2} a(\tilde{f},\tilde{f}), \qquad \forall\ v \in H.$$

$$\min_{v\in K} J[v] + \frac{1}{2}a(\tilde{f},\tilde{f}) =$$
$$= \min_{v\in K}\left[J[v] + \frac{1}{2}a(\tilde{f},\tilde{f})\right]$$
$$= \frac{1}{2}\min_{v\in K} a(v-\tilde{f}, v-\tilde{f})$$

Minimizar J en K es equivalente a minimizar $a(\cdot-\tilde{f}, \cdot-\tilde{f})$ en K.

Aplicamos el Teorema 1 en $(H, \langle , \rangle_a)$ con K cerrado y convexo: $\exists!\, u\in K$ tal que

$$\|u-\tilde{f}\| = \min_{w\in K} \|w-\tilde{f}\|_a$$

Mas aún, $u\in K$ es tal que

$$a(\tilde{f}-u, w-u) \leq 0 \qquad \forall\, w\in K.$$

Por lo tanto:

$$\langle f, w-u\rangle = a(\tilde{f}, w-u) \leq a(u, w-u) \quad \forall w\in K$$

($\Rightarrow$ (3)) Además $u\in K$ minimiza a J en K ya que (topologías equiv.)

$$\frac{1}{2}\|\tilde{f}-u\| = \frac{1}{2}\min_{w\in K}\|\tilde{f}-w\|$$
$$= \frac{1}{2}\min_{w\in K} a(w-\tilde{f}, w-\tilde{f})$$
$$= \min_{w\in K} J[w]$$

$\blacksquare$

Nota: si $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrica no podemos identificar a la solución $u \in K$ con un mínimo.

Teorema 3 (Lax-Milgram)

Sean $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $a(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y H-elíptica. Entonces para cualquier $\ell \in H^*$ existe un único $u_\ell \in H$ tal que

(5) ... $$\ell(v) = a(u_\ell, v) \quad \forall\ v \in H$$

Nota: no se asume simetría de $a(\cdot,\cdot)$.

Dem. Sea $u \in H$, fijo. Entonces el mapeo $v \mapsto a(u,v)$ $v \in H$ es un funcional lineal continuo en H (a bilineal, $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|$)

Por Riesz: $\exists!$ $w \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle w, v \rangle \quad \forall\ v \in H.$$

Entonces el mapeo: $\begin{cases} A: H \to H \\ u := Au = w \end{cases}$

está bien definido. $\quad a(u,v) = \langle Au, v \rangle$

Además: $A \in \mathcal{B}[H,H]$:

- si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in H$ entonces

$$\langle A(\lambda u_1+u_2),v\rangle = a(\lambda u_1+u_2,v)$$
$$= \lambda a(u_1,v) + a(u_2,v)$$
$$= \lambda\langle Au_1,v\rangle + \langle Au_2,v\rangle$$
$$= \langle \lambda Au_1 + Au_2, v\rangle \quad \forall v\in H$$

$\therefore \quad A(\lambda u_1+u_2) = \lambda Au_1 + Au_2 \quad \forall\, u_1,u_2\in H$

$\therefore$ A es lineal.

- Por continuidad de $a(\cdot,\cdot)$:

$$\|Au\|^2 = \langle Au,Au\rangle = a(u,Au) \leq \alpha\,\|u\|\,\|Au\|$$

$$\therefore \quad \|Au\| \leq \alpha\|u\| \qquad \forall\, u\in H.$$

$\therefore$ A continuo. $\qquad \therefore\ A\in\mathcal{B}(H,H)$.

Veremos que:
(i) A es inyectivo ($\ker A = \{0\}$)
(ii) $R(A)$ es cerrado en H.

(i) Por H-elipticidad de $a(\cdot,\cdot)$:

$$\beta\|u\|^2 \leq a(u,u) = \langle Au,u\rangle \leq \|Au\|\,\|u\|$$

$$\therefore \quad \|Au\| \geq \beta\,\|u\| \quad \forall\, u\in H.$$

A es inyectivo.

(ii) Sea $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset R(A)$, de Cauchy.

$\Rightarrow \quad w_n = Au_n, \quad$ con $\{u_n\} \subset H$. Además,

$$0 \leq \beta \|u_n - u_m\|^2 \leq \|A(u_n - u_m)\|^2$$
$$= \|Au_n - Au_m\|^2$$
$$= \|w_n - w_m\|^2 \to 0$$

si $m, n \to \infty$

$\{w_n\}$ de Cauchy

$\Rightarrow \quad \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es de Cauchy.

$\Rightarrow \quad \exists \; u \in H$ tal que $u_n \to u \in H$ si $n \to \infty$

Por continuidad de A:

$$0 \leq \|Au_n - Au\| \leq \alpha \|u_n - u\| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

es decir, $\quad w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} Au_n = Au.$

$\therefore \quad w \in \mathcal{R}(A). \qquad \therefore \mathcal{R}(A)$ es cerrado.

Mas aún, $\mathcal{R}(A) = H$.

$\mathcal{R}(A)$ cerrado $\Rightarrow \quad H = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$

(teo. de proyección)

Si $\exists \; v \neq 0, \; v \in \mathcal{R}(A)^\perp$ entonces

$\langle v, w \rangle = 0 \quad \forall \, w \in \mathcal{R}(A) \quad (\Leftrightarrow) \quad \langle v, Au \rangle = 0$

$\forall \, u \in H$.

Como $v \in H$:

$$0 \leq \beta \|v\|^2 \leq a(v,v) = \langle Av, v \rangle$$
$$= \langle v, Av \rangle = 0$$

$\uparrow_{v \in H}$

$\Rightarrow \; v = 0. \qquad \therefore \mathcal{R}(A) = H.$

Sea $l \in H^*$ arbitrario. Por Riesz $\exists!$ $w_l \in H$ tal que

$$l(v) = \langle w_l, v \rangle \quad \forall\ v \in H$$

Pero $w_l \in H = R(A)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $u_l \in H$ tal que $w_l = A u_l$

$$\therefore \quad l(v) = \langle A u_l, v \rangle = a(u_l, v) \quad \forall\ v \in H.$$

Unicidad: sup. $\exists$ $\tilde{u} \in H$ tal que $l(v) = a(u_l, v) = a(\tilde{u}, v) \quad \forall\ v \in H$.

$$\Rightarrow \quad a(\tilde{u} - u_l, v) = 0 \quad \forall v \in H.$$

Tomando $v = \tilde{u} - u_l$:

$$0 \leq \beta \|\tilde{u} - u_l\|^2 \leq a(\tilde{u} - u_l, \tilde{u} - u_l) = 0$$

$$\therefore \quad \|\tilde{u} - u_l\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u} = u_l$$

$\square$

Teorema 4 (lema de Stampacchia)

Sean $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $a(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{R}$ continua, H-elíptica. $K \subseteq H$ convexo y cerrado. Entonces: $\forall\ f \in H$ fijo existe un único $u \in K$ tal que

$$(6) \ldots \quad a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\ v \in K.$$

<u>Dem.</u> Sea $A \in \mathcal{B}(H,H)$ el operador asociado a la forma $a(\cdot,\cdot)$ (ver Lax Milgram).

(6) es equivalente a

$$(6') \cdots \quad \langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in K$$

Sea $\rho > 0$. Hallar $u \in K$ tal que ocurra (6') es equivalente a encontrar $u \in K$ tal que

$$(6'') \cdots \quad \langle \rho f - \rho Au + u - u, v-u \rangle \leq 0 \quad \forall\, v \in K$$

(6') cierta : $\forall\, \rho > 0$, $\frac{u}{\rho} \in K$, $\frac{v}{\rho} \in K$ $\forall v \in K$

$$\tilde{v} := \frac{1}{\rho}(v-u) + u \in K \quad \text{(convexidad)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq \langle f - Au, \tilde{v} - u \rangle = \langle f - Au, \tfrac{1}{\rho}(v-u) + u - u \rangle$$

$$\Rightarrow (6'')$$

Análogamente, si (6'') es cierta entonces $\forall\, v \in K$, $\tilde{v} := \rho(v-u) + u \in K \Rightarrow$ (6').

Por Teorema 1 y Corolario, hallar $u \in K$ que cumpla con (6'') es equivalente a encontrar $u \in K$ tal que

$$u = P_K(\rho f - \rho Au + u).$$

Definimos : $\left\{\begin{array}{l} F : H \to H \\ v \mapsto P_K(\rho f - \rho A v + v) \end{array}\right.$

Nótese $R(F) \subset K$. Por el corolario, F es continuo :

$$\|F(v_1) - F(v_2)\| = \|P_K(\rho f - \rho A v_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho A v_2 + v_2)\|$$

corolario $\leq \|(v_1 - v_2) - \rho A(v_1 - v_2)\|$

$$\leq C_{\rho, \|A\|} \|v_1 - v_2\|$$

Además,

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|^2 \leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 \|Av_1 - Av_2\|^2 + - 2\rho \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle$$

$$\leq (1 + \rho^2 \alpha^2) \|v_1 - v_2\|^2 + - 2\rho\, a(v_1 - v_2, v_1 - v_2)$$

$$\leq (1 - 2\rho\beta + \rho^2 \alpha^2) \|v_1 - v_2\|^2$$

Escogiendo $\rho > 0$ tal que

$$0 < \rho < \frac{2\beta}{\alpha^2}$$

obtenemos $\|F(v_1) - F(v_2)\| \leq M \|v_1 - v_2\|$

con $0 < M < 1$

$\therefore \quad F : K \to K$ es un mapeo continuo y contractivo.

Por el teorema de punto fijo de Banach existe un único $u \in K$ tal que

$F(u) = u$ ssi $u = P_K(\rho f - \rho A u + u)$

ssi $u \in K$ satisface (6'')

ssi $u \in K$ satisface (6)

$\square$

Observaciones:

(A) Si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica,
$J[v] := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v \rangle \quad v \in H, \; f \in H$ dado

entonces $\exists!$ mínimo global $u \in H$ que satisface

$$(7) \cdots \begin{cases} a(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H - (7a) \\ J[u] = \min_{v \in H} J[v] \quad \cdots (7b) \end{cases}$$

(7a) equivalente a Euler-Lagrange de J
problema de optimización sin constricciones.

Dem. Aplicación directa del teorema 2 ($K \equiv H$) y del teo. de Lax-Milgram

$\square$

(B) cuando: optimizar J sobre K (con constricciones) y si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, por el teorema 2 $\exists!\ u \in K$ que minimiza J pero que no satisface ecuaciones "exactas" sino la desigualdad $a(u,v-u) \leq \langle f, v-u \rangle$ $\forall\ v \in K$.

Desigualdades variacionales

(C) si $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrica (mayoría de los casos) tenemos:

- Teo. Lax-Milgram: $\exists!\ u \in H$ global que satisface la "ecuación" $a(u,v) = \langle f, v \rangle$ $\forall\ v \in H$. u no se asocia al mínimo de un funcional en gral.

- Lema de Stampacchia: $\exists!\ u \in K$ que satisface una desigualdad variacional sobre K, no una ecuación. Tampoco u se asocia al mínimo de un funcional.