Lección 1.5: Teorema de Babuska-Brezzi. Operadores simétricos y positivos.

Motivación: en medios continuos (fluidos, elasticidad) se tienen relaciones constitutivas + ecuaciones de movimiento.

Teorema (Babuska-Brezzi)

Sean $(H, \langle , \rangle_H)$, $(V, \langle , \rangle_V)$ dos espacios de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Sean

$$a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$b : H \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

dos formas bilineales continuas: $\exists\ \alpha_1, \alpha_2 > 0$ tales que

$$|a(u,w)| \leq \alpha_1 \|u\|_H \|w\|_H \quad \cdots (1)$$
$$|b(u,v)| \leq \alpha_2 \|u\|_H \|v\|_V$$

$\forall\, u, w \in H$, $\forall\, v \in V$. Se define el sig. subespacio vectorial

$$Z := \{ u \in H \ : \ b(u,v) = 0, \ \forall\, v \in V \} \subset H \quad \cdots (2)$$

Suponemos además que $a(\cdot,\cdot)$ es Z-elíptica: $\exists\ \beta > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \forall\, u \in Z. \quad \cdots (3)$$

Finalmente, suponemos la siguiente condición de tipo inf-sup:

(4)... $\exists\ \gamma > 0$ tal que $\displaystyle\inf_{v \in V} \sup_{u \in H} \frac{b(u,v)}{\|u\|_H \|v\|_V} \geq \gamma > 0$

Entonces, para cualesquiera $f \in H$, $g \in V$ dados existe una única solución $(\bar{u}, \bar{v}) \in H \times V$ al sistema:

$$(5)\ldots \begin{cases} a(\bar{u}, w) + b(w, \bar{v}) = \langle f, w \rangle_H & \forall w \in H \\ b(\bar{u}, v) = \langle g, v \rangle_V & \forall v \in V \end{cases}$$

Observaciones:

- La condición (4) se conoce como la condición (inf-sup) de Ladyzhenskaya - Babuska - Brezzi (LBB).

- La 1a. ec. en (5) $\leftrightarrow$ leyes de movimiento
  La 2a. " " $\leftrightarrow$ relaciones constitutivas

Ejemplo: problema de Stokes en dinámica de fluidos (fluido incompresible, estacionario):

ec. de mov. $\leftarrow$ $\qquad -\mu \Delta \bar{u} + \nabla p = f$
ley. constitutiva $\leftarrow$ $\qquad \operatorname{div} \bar{u} = 0$

$$\left.\begin{aligned} -\mu \Delta \bar{u} + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

$\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ campo de velocidades
p = presión, $\mu > 0$ viscosidad cinemática
f = densidad de fuerzas

Demostración: Para cada $u \in H$ fijo, los mapeos

$$w \mapsto a(u,w), \qquad w \in H$$
$$v \mapsto b(u,v), \qquad v \in V$$

definen funcionales lineales continuos en H y V.
Por Riesz existen únicos elementos

$$Au \in H, \quad Bu \in V$$

tales que:
$$a(u,w) = \langle Au, w\rangle_H, \quad \forall w \in H$$
$$b(u,v) = \langle Bu, v\rangle_V, \quad \forall v \in V$$

Por continuidad y linealidad de $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot)$
$A: H \to H$, $B: H \to V$ son lineales y continuos (acotados): $A \in \mathcal{B}(H,H)$, $B \in \mathcal{B}(H,V)$

El sistema (S) es equivalente a

$$(S') \cdots \begin{cases} A\bar{u} + B^*\bar{v} = f & \text{(en } H) \\ B\bar{u} = g & \text{(en } V) \end{cases}$$

$B^*: V^* \to H^*$ por Riesz se puede interpretar como $B^* \in \mathcal{B}(V,H)$ $\quad V^* \cong V$, $H^* \cong H$

Así,
$$\langle Bu, v\rangle_V = \langle u, B^*v\rangle_H \quad \forall u \in H, \ \forall v \in V$$

Nótese que: • $b(\bar{u},v) = \langle B\bar{u}, v\rangle_V$
$$= \langle g, v\rangle_V \qquad \forall v \in V$$

$$\iff B\bar{u} = g \quad \text{en } V$$

• $a(\bar{u},w) + b(w,\bar{v}) = \langle A\bar{u}, w\rangle_H + \langle Bw, \bar{v}\rangle_V$
$$= \langle A\bar{u}, w\rangle_H + \langle w, B^*\bar{v}\rangle_H$$
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$
$$= \langle A\bar{u} + B^*\bar{v}, w\rangle_H$$
$$= \langle f, w\rangle_H \qquad \forall w \in H$$

$$\iff A\bar{u} + B^*\bar{v} = f \quad \text{en } H$$

Concluimos que $(\bar{u},\bar{v}) \in H \times V$ resuelve (5) ssi resuelve (5').

Supongamos por el momento que

$$R(B) = V \qquad \text{-- } (6)$$

Así, dado $g \in V$ existe al menos un elemento $\tilde{u} \in H$ tal que $B\tilde{u} = g$. Definimos $u_0 := u - \tilde{u}$ donde $u \in H$ por determinar, solución de (5'). En particular,

$$b(u,v) = \langle g, v\rangle_V \qquad \forall v \in V$$
u sol. de (5'): $Bu = g$.

Sustituyendo:
$$b(u,v) = b(u_0 + \tilde{u}, v) = b(u_0, v) + b(\tilde{u}, v)$$
$$= b(u_0, v) + \langle B\tilde{u}, v\rangle_V$$
$$= b(u_0, v) + \langle g, v\rangle_V \qquad \forall v \in V$$

condición necesaria : $b(u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V$

$\iff u_0 \in Z \subset H.$

Problema restringido :

$$a(u_0 + \tilde{u}, z) + \underbrace{b(z, \bar{v})}_{=0 \text{ si } z \in Z,\ \bar{v} \in V} = \langle f, z \rangle_H \quad \forall z \in Z \subset H$$

Aquí $\bar{v} \in V$ por determinar, $u_0 \in Z$.

$Z \subset H$ es un subespacio vectorial cerrado :

sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Z$ una sucesión de Cauchy.

$\therefore \exists\ z \in H$ tal que $z_n \to z$ en H si $n \to \infty$.

Por continuidad de $b(\cdot, \cdot)$:

$$\underset{z_n \in Z}{\underset{\downarrow}{0}} = b(z_n, v) \longrightarrow b(z, v) \quad v \in V \quad \text{si } n \to \infty$$

$$\therefore b(z, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad \text{ó} \quad z \in Z.$$

$\therefore Z$ es cerrado.

Hallar $u_0 \in Z$ tal que

$$(*) \cdots \quad a(u_0, z) = \langle f, z \rangle_H - a(\tilde{u}, z) \quad \forall z \in Z$$

Para cada $\tilde{u} \in H$ fijo, el lado derecho de $(*)$ define un funcional continuo en Z.

La linealidad es clara; continuidad:

$$|\langle f, z\rangle_H - a(\tilde{u}, z)| \leq \|f\|_H \|z\|_H + \alpha_1 \|\tilde{u}\|_H \|z\|_H$$
$$\leq C_{\alpha, f, g} \|z\|_H \quad \forall z \in Z$$

$a(\cdot,\cdot)$ es Z-elíptica en el espacio de Hilbert $(Z, \langle \cdot,\cdot\rangle_H)$. Por Lax-Milgram $\exists!$ $\overline{u}_0 \in Z$ tal que

$$a(\overline{u}_0, z) = \langle f, z\rangle_H - a(\tilde{u}, z) \quad \forall z \in Z$$

Observemos que $\ell \in H^*$, definido por

$$\begin{cases} \ell : H \longrightarrow \mathbb{R} \\ \ell(u) := \langle f, u\rangle_H - a(\overline{u}_0 + \tilde{u}, u), \quad u \in H \end{cases}$$

se anula en Z: $\ell(z) = 0 \quad \forall z \in Z$.
$(Z \subset \ker \ell)$.

Afirmación: $Z = \ker B \subset H$.

- Sea $u \in \ker B \subset H$. Entonces $\forall v \in V$

$$b(u, v) = \langle Bu, v\rangle_V = 0$$

Es decir, $u \in Z$. $\therefore$ $\ker B \subset Z$

- Si $z \in Z$ definimos $v := Bz$. Así,

$$0 = b(z, v) = \langle Bz, \underbrace{Bz}_{\in V}\rangle_V = \|Bz\|_V^2$$

es decir, $Bz = 0$ $\therefore$ $Z \subset \ker B$.

concluimos $Z = \ker B$.

Z cerrado : por el teorema de proyección

$$H = (\ker B) \oplus (\ker B)^{\perp}$$

Definimos entonces : $\bar{u} := \bar{u}_0 + \tilde{u} \in H$.
(elemento buscado)

Así, $B\bar{u} = B\bar{u}_0 + B\tilde{u} = B\tilde{u} = g \in V$
$\bar{u}_0 \in Z = \ker B$
(2a. ec. de (S')).

Por otra parte,

$$f - A\bar{u} = f - A(\bar{u}_0 + \tilde{u}) \in (\ker B)^{\perp}$$

En efecto, sea $z \in Z = \ker B$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle f - A(\bar{u}_0 + \tilde{u}), z \rangle_H &= \langle f, z \rangle_H - \langle A(\bar{u}_0 + \tilde{u}), z \rangle_H \\ &= \langle f, z \rangle_H - a(\bar{u}_0 + \tilde{u}, z) \\ &= \ell(z) \\ &= 0 \qquad \forall z \in Z \end{aligned}$$

ya que ℓ se anula en Z.

$$\therefore \quad f - A(\bar{u}_0 + \tilde{u}) \in (\ker B)^{\perp} = R(B^*)$$

$\therefore$ $\exists$ al menos $\bar{v} \in V$ tal que

$$f - A\bar{u} = B^* \bar{v} \qquad (\text{1a. ec. de } (S''))$$

El par $(\bar{u}, \bar{v}) \in H \times V$ es solución de (S')
Para cualquier $v \in V$ arbitrario:

$$\begin{aligned} b(\bar{u}, v) &= b(\bar{u}_0 + \tilde{u}, v) \\ &= \langle \underbrace{B\bar{u}_0}_{=0,\ \bar{u}_0 \in Z}, v \rangle_V + \langle \underbrace{B\tilde{u}}_{=g}, v \rangle_V \\ &= \langle g, v \rangle_V \qquad \forall v \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, w) + b(w, \bar{u}) &= \langle A\bar{u}, w \rangle_H + \langle Bw, \bar{v} \rangle_V \\ &= \langle f - B^*\bar{v} + B^*\bar{v}, w \rangle_H \\ &= \langle f, w \rangle_H \\ &\qquad \forall w \in H \end{aligned}$$

(Nota: $\tilde{u}$ (x ende, $\bar{u}$) y $\bar{v}$ podrían no ser únicos.)

Unicidad: Sean $(\bar{u}_1, \bar{v}_1), (\bar{u}_2, \bar{v}_2) \in H \times V$ dos soluciones de (S).

Definimos
$$u' := \bar{u}_1 - \bar{u}_2 \in H$$
$$v' := \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \in V$$

Por linealidad: $a(u', w) + b(w, v') = 0, \ \forall w \in H$
$b(u', v) = 0, \ \forall v \in V$

$\therefore$ $u' \in Z = \ker B$.

Sustituyendo $w = u'$:

$$0 = a(u',u') + \underbrace{b(u',v')}_{=0 \quad u' \in Z}$$

$$= a(u',u') \underset{\substack{\downarrow \\ a(\cdot,\cdot) \text{ es } Z \text{ elíptica}}}{\geq} \beta \|u'\|_H^2 \geq 0$$

$\therefore \ u' = 0.$ Así, $b(w,v') = 0 \quad \forall w \in H$

$$b(w,v') = \langle Bw, v' \rangle_V$$

Pero $\underbrace{R(B) = V}$ $\therefore$ $\langle v, v' \rangle_V = 0 \quad \forall v \in V$

$$\Rightarrow \|v'\|_V^2 = 0 \Rightarrow v' = 0.$$

$\therefore$ unicidad.

Para verificar $R(B) = V$ usamos (LBB):

$$\inf_{v \in V} \sup_{u \in H} \frac{b(u,v)}{\|v\|_V \|u\|_H} \geq \gamma > 0$$

Así,
$$\sup_{u \in H} \frac{b(u,v)}{\|u\|_H} \geq \gamma \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Sea $u \in H$, $u \neq 0$; entonces

$$\frac{b(u,v)}{\|u\|_H} = \frac{\langle Bu, v \rangle_V}{\|u\|_H} = \frac{\langle u, B^* v \rangle_H}{\|u\|_H}$$

$$\leq \|B^* v\|_H \quad \forall v \in V$$

Tomando sup :

(7) ... $\gamma \|v\|_V \leq \sup_{u \in H} \frac{b(u,v)}{\|u\|_H} \leq \|B^* v\|_H \quad \forall v \in V$

$\therefore$ B^* es inyectivo $(\ker B^* = \{0\})$.

$$\overline{R(B)} = (\ker B^*)^\perp = \{0\}^\perp = V$$

Más aún : $R(B^*)$ es cerrado.

Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset R(B^*)$ de Cauchy.

$\therefore$ $\exists\, u \in H$ tal que $u_n \to u$ si $n \to \infty$

$u_n = B^* v_n \longrightarrow u$ si $n \to \infty$
para $v_n \in V$.

(7) $\Rightarrow$ $\|v_n - v_m\|_V^2 \leq \frac{1}{\gamma} \|B^* v_n - B^* v_m\|_H$

$= \frac{1}{\gamma} \|u_n - u_m\|_H \to 0$
si $n, m \to \infty$

$\therefore$ $\{v_n\}$ es de Cauchy en V.

$\therefore$ $v_n \to v \in V$ si $n \to \infty$.
Por continuidad de $B^* \in \mathcal{B}(V, H)$

$u \leftarrow u_n = B^* v_n \longrightarrow B^* v$ si $n \to \infty$

$\Rightarrow$ $u = B^* v$

$\therefore \quad u \in \mathcal{R}(B^*) \quad \therefore \quad \mathcal{R}(B^*)$ es cerrado.

$\mathcal{R}(B^*)$ cerrado ssi $\mathcal{R}(B)$ cerrado
(ejercicio: teo. de la gráfica cerrada)

$$\therefore \quad \mathcal{R}(B) = \overline{\mathcal{R}(B)} = V$$

$\square$

1.6 Métodos de aproximación

Observación: por Lax-Milgram, $\forall u \in H$ fijo $\exists !\ w = Au \in H$, $A \in \mathcal{B}(H, H)$ tal que

$$\bullet\ a(u,v) = \langle w, v\rangle_H = \langle Au, v\rangle_H \quad \forall v \in H$$

$\therefore$ $\forall$ forma bilineal continua y H-elíptica ésta se puede representar

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle_H$$

con $A \in \mathcal{B}(H,H)$, con $\underline{D(A) \equiv H}$.

Definición Sea $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real. Sea $D_A \subset H$ un subespacio denso en H ($\overline{D_A} = H$). y $A : D_A \subset H \to H$ un operador lineal. Se dice que A es simétrico en D_A si:

$$\langle Au, v\rangle_H = \langle u, Av\rangle_H \quad \forall u, v \in D_A$$

Nota: Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle Au, v\rangle_H = \overline{\langle u, Av\rangle_H}$

Ejemplos:

- $H = L^2(a,b)$, real. $D_A = \{ u \in C^2[a,b] : u(a) = u(b) = 0 \}$

  D_A es denso en $L^2(a,b)$ (ejercicio)

  $$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_a^b u(x)v(x)\, dx$$

  Sea $A := -\dfrac{d^2}{dx^2}$. Entonces A es simétrico en D_A.

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$

  $H = L^2(\Omega)$, $D_A = \{ u \in C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$

  $A := -\Delta$ es simétrico en D_A (ejercicio).

Definición Sean $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real y $A : D_A \subset H \longrightarrow H$, $\overline{D_A} = H$, un operador lineal. Se dice que A es positivo en D_A si:

(a) A es simétrico en D_A

(b) $\langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in D_A$

$\langle Au, u \rangle = 0$ ssi $u = 0 \in D_A$

Si adicionalmente se cumple:

(c) $\exists\, C > 0$ tal que $\langle Au, u \rangle \geq C \|u\|^2 \quad \forall\, u \in D_A$

entonces A se denomina definido positivo en D_A

Nota: esta definición se extiende naturalmente cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle Au, u\rangle \geq 0$ se deduce de la simetría $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$.

Observación: D_A denso, subespacio vectorial $\Rightarrow$ $(D_A, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Así, todo operador $A : D_A \subset H \longrightarrow H$ lineal, positivo definido, determina una forma bilineal

$$a(u,v) := \langle Au, v\rangle_H \quad \forall\ u, v \in D_A$$

que es D_A-elíptica, y simétrica.

Si además A es continuo (acotado) entonces $a(\cdot,\cdot)$ es continua.

Definición $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Hilbert real, $A : D_A \subset H \to H$ lineal y positivo. Entonces el funcional

$$(1) \ldots \quad F[u] := \langle Au, u\rangle - 2\langle f, u\rangle, \quad u \in D_A$$

con $f \in H$ fijo, se denomina funcional cuadrático en D_A.

Ejemplo: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$

Problema de Dirichlet
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$ dado. Si $H = L^2(\Omega)$
definimos $A = -\Delta$, $D_A = \{ C^2(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$

El funcional cuadrático es

$$F[u] = \langle -\Delta u, u \rangle_{L^2} - 2 \langle f, u \rangle_{L^2}$$
$$= - \int_\Omega u \Delta u \, dx - 2 \int_\Omega f u \, dx$$

Lema $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $A : D_A \subset H \to H$ positivo en D_A. Entonces para cada $f \in H$ fijo, la ecuación $Au = f$, $u \in D_A$ tiene a lo más una solución en D_A.

Dem. Sean $u_1, u_2 \in D_A$ dos soluciones.
$\therefore$ $A(u_1 - u_2) = 0$. D_A subespacio, $u_1 - u_2 \in D_A$,
A positivo $\Rightarrow$ $\langle A(u_1 - u_2), u_1 - u_2 \rangle = 0$
ssi $u_1 - u_2 = 0 \in D_A$

$\square$

Teorema (mínimo del funcional cuadrático)
$(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real,
$A : D_A \subset H \to H$ lineal y positivo en D_A
$f \in H$ fijo. Entonces:

$u_0 \in D_A$ solución de $Au = f$ en D_A $\iff$ $F[u_0] = \min_{u \in D_A} F[u]$

Dem. "$\Rightarrow$" Sea $u_0 \in D_A$ solución de $Au_0 = f$, Entonces, $\forall u \in D_A$:

$$\begin{aligned} F[u] &= \langle Au, u\rangle - 2\langle f, u\rangle \\ &= \langle Au, u\rangle - 2\langle Au_0, u\rangle \\ &= \langle A(u-u_0), u-u_0\rangle - \langle Au_0, u_0\rangle \end{aligned}$$

como $u-u_0 \in D_A$, entonces

$$\begin{aligned} F[u] &= \underbrace{\langle A(u-u_0), u-u_0\rangle}_{\geq 0} - \langle Au_0, u_0\rangle \\ &\geq -\langle Au_0, u_0\rangle \qquad \forall u \in D_A. \end{aligned}$$

Además, $\langle A(u-u_0), u-u_0\rangle = 0$ ssi $u = u_0$

$\therefore$ $F[u] = F[u_0]$ ssi $u = u_0$.

Concluimos $F[u_0] = \min\limits_{u \in D_A} F[u]$

"$\Leftarrow$" $\forall v \in D_A$, $u_0 + tv \in D_A$ $\forall t \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $F[u_0 + tv] \geq F[u_0]$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$, $\forall v \in D_A$

$$\begin{aligned} F[u_0 + tv] &= \langle A(u_0 + tv), u_0 + tv\rangle - 2\langle f, u_0 + tv\rangle \\ &= t^2\langle Av, v\rangle - 2t\langle f, v\rangle + \\ &\quad + 2t\langle Au_0, v\rangle + \langle Au_0, u_0\rangle - 2\langle f, u_0\rangle \end{aligned}$$

tiene un mínimo local en $t = 0$.

$$\left.\frac{d}{dt} F[u_0+tv]\right|_{t=0} = -2\langle f, v\rangle + 2\langle Au_0, v\rangle$$

$$= 0 \qquad \forall\, v \in D_A$$

$\overline{D_A} = H$ (denso)

$$\langle Au_0 - f, v\rangle = 0 \qquad \forall\, v \in D_A$$

$$\Rightarrow \quad Au_0 - f = 0 \text{ en } H \quad \therefore \quad Au_0 = f$$

$\square$