Lección 1.6: Espacio de energía. Métodos de la base ortonormal y de Ritz.

Sea $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $D_A \subset H$ denso en H, subespacio, $A : D_A \subset H \to H$, lineal, definido positivo en D_A.

Mínimo del funcional cuadrático en D_A: $u_0 \in D_A$ es solución de $Au = f$ en D_A, con $f \in H$ dado ssi $F[u_0] = \min_{u \in D_A} F[u]$ con

$$F[u] = \langle Au, u \rangle - 2\langle f, u \rangle$$

Nota: es posible que no exista el mínimo de $F[\cdot]$ en D_A [$\equiv$ no existe solución $u_0 \in D_A$ de $Au = f$).

Ejemplo: $H = L^2(0,1)$

$$D_A = \{ u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0 \}$$

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

D_A denso en H
A pos. def.

Pero
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1/2) \\ 0, & x \in [1/2, 1) \end{cases} \in L^2(0,1).$$

Claramente no existe solución $u_0 \in D_A$ al problema
$$\underbrace{Au}_{\in C[0,1]} = -\frac{d^2 u}{dx^2} = f$$

Es necesario extender el dominio de A de manera apropiada.

Norma y espacio de energía

Con mismas hipótesis, se define el producto de energía como

(1) ... $\langle u,v\rangle_A := \langle Au, v\rangle, \quad \forall\, u,v \in D_A$

Lema $\langle\, ,\rangle_A$ es un producto interno en el subespacio $D_A \subset H$. ($(D_A, \langle\, ,\rangle_A)$ es pre-Hilbert).

Dem. Ejercicio. $\square$

Ejemplos:

- $H = L^2(a,b)$

  $D_A = \{ u \in C^2([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \}$

  $A = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ def. positivo

$$\langle u,v\rangle_A = \langle Au, v\rangle_{L^2} = -\int_a^b u''(x)\, v(x)\, dx$$
$$= \int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx$$
$$= \langle u_x, v_x\rangle_{L^2}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$

  $H = L^2(\Omega)$, $D_A = \{ u \in C^2(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0 \}$

  $A = -\Delta$ pos. def. en D_A

$$\langle u,v\rangle_A = \langle Au, v\rangle_{L^2} = -\int_\Omega v\,\Delta u\,dx$$
$$= \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx$$
$$= \langle \nabla v, \nabla u\rangle_{L^2}$$

La <u>norma de la energía</u> se define como

$$\begin{cases} \|\cdot\|_A : D_A \to [0,\infty) \\ \|u\|_A^2 = \langle u,u\rangle_A = \langle Au, u\rangle, \ \forall u\in D_A \end{cases}$$

El <u>espacio de energía</u> se define como la completación de D_A con respecto a $\|\cdot\|_A$:

(2) ... $$H_A := \overline{D_A}^{\|\cdot\|_A}$$

$(H_A, \langle\,,\,\rangle_A)$ es de Hilbert.

Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D_A$ es una sucesión $\begin{Bmatrix} \text{de Cauchy en } D_A \\ \text{convergente en } D_A \end{Bmatrix}$

entonces $\begin{Bmatrix} \text{es de Cauchy en } H \\ \text{converge en } H \end{Bmatrix}$.

Por ejemplo, si $\|u_n - u_m\|_A \to 0$ si $m,n\to\infty$ entonces, como A es definido positivo,

$$\|u_n-u_m\|^2 \le \frac{1}{C}\langle A(u_n-u_m), u_n-u_m\rangle$$
$$= \frac{1}{C}\|u_n-u_m\|_A^2 \to 0 \quad \text{si } m,n\to\infty$$

Las afirmaciones inversas <u>no</u> son ciertas.

<u>Lema</u> D_A es denso en H_A (en la norma $\|\cdot\|_A$)

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$

Mínimo del funcional cuadrático en H_A:

$$F[v] = \langle Av, v\rangle - 2\langle f, v\rangle, \qquad v \in D_A$$

$f \in H$ dada.

Como A es definido positivo, consideramos $(H_A, \langle , \rangle_A)$ cuyo producto interno es la extensión de

$$\langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle, \qquad u, v \in D_A$$

a todo H_A. Podemos extender el funcional cuadrático a H_A:

$$\tilde{F}[u] := \langle u, u\rangle_A - 2\langle f, u\rangle, \qquad u \in H_A$$

Si $u \in D_A$, $\tilde{F}[u] = F[u]$.

Para cada $f \in H$ fijo, el mapeo

$$u \mapsto \langle f, u\rangle, \qquad u \in H_A$$

es un funcional lineal continuo en H_A, es decir, es un elemento de H_A^*.

La linealidad es clara. La continuidad es consecuencia de A definido positivo:

$$|\langle f,u\rangle| \leq \|f\|\,\|u\| \leq \frac{1}{c}\|f\|\,\|u\|_A \quad \forall u \in H_A.$$

Por el teorema de rep. de Riesz: $\exists!\ u_0 \in H_A$ tal que

$$\langle f,u\rangle = \langle u_0,u\rangle_A, \quad \forall u \in H_A \quad \cdots(3)$$

Así,

$$\begin{aligned}\tilde{F}[u] &= \langle u,u\rangle_A - 2\langle f,u\rangle \\ &= \langle u,u\rangle_A - 2\langle u_0,u\rangle_A \\ &= \|u-u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \geq -\|u_0\|_A^2 = \tilde{F}[u_0]\end{aligned}$$

La igualdad ocurre ssi $u = u_0 \in H_A$.

Hemos demostrado:

<u>Teorema</u> Bajo las hipótesis anteriores, el funcional $\tilde{F}[\cdot]$ tiene un único mínimo $u_0 \in H_A$ determinado por (3).

<u>Definición</u> El elemento $u_0 \in H_A$ que satisface (3) se denomina <u>solución generalizada de $Au=f$</u>.

<u>Definición</u> Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_A$ se denomina <u>minimizante</u> del funcional $\tilde{F}[\cdot]$ si

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{F}[u_n] = \tilde{F}[u_0] = -\|u_0\|_A^2$$

Lema $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_A$ es una sucesión minimizante ssi $\|u_n - u_0\|_A \to 0$ si $n\to\infty$.

Dem. $\|u_n - u_0\|_A^2 = \tilde{F}[u_n] + \|u_0\|_A^2 \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$

$\square$

Observación Si $u_0 \in H_A$ está en D_A entonces minimiza a $F[\cdot]$ en D_A, y es solución de $Au = f$ en D_A.

Pero, si $u_0 \notin D_A$ entonces la ecuación $Au = f$ no tiene solución en D_A. Por contradicción: sea $v \in D_A$ solución de $Au = f$ en D_A y $u_0 \in H_A$, $u_0 \notin D_A$ el mín. de $\tilde{F}[\cdot]$.
Por el teorema, v minimiza $F[\cdot]$ en D_A.

$$F[v] = \min_{w\in D_A} F[w] = \min_{w\in D_A}\left(\langle Aw, w\rangle - 2\langle f, w\rangle\right)$$
$$= \min_{w\in D_A}\left(\|w - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2\right)$$
$$= \|v - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 \underset{v\neq u_0}{>} \tilde{F}[u_0]$$

Sea $\epsilon := F[v] - \tilde{F}[u_0] > 0$. D_A denso en H_A: $u_n \in D_A$ tal que $\|u_n - u_0\|_A^2 < \frac{\epsilon}{2}$

$$\therefore F[u_n] = \|u_n - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 < \frac{\epsilon}{2} - \|u_0\|_A^2$$
$$< \epsilon - \|u_0\|_A^2 = F[v]$$

contradicción con v mínima de F en D_A.

Lema H separable $\Rightarrow$ H_A separable.

Dem. Por el teorema anterior: $\exists \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H.

$D_A \subset H$ denso en H. Sea $0<\epsilon<1/2$ fijo pero arbitrario; $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists$ $\psi_n \in D_A$ tal que $\|\psi_n - \varphi_n\| < \epsilon$.

A pos. def. $\Rightarrow$ $\langle \psi_n, \psi_n\rangle_A = \langle A\psi_n, \psi_n\rangle \geq c\,\|\psi_n\|^2$
$$c>0$$

claramente:
$$\|\psi_n\| \geq \|\varphi_n\| - \|\psi_n - \varphi_n\| \geq 1-\epsilon > 0$$
$$\|\psi_n\| \leq \|\varphi_n - \psi_n\| + \|\varphi_n\| \leq 1+\epsilon < 2$$
$$\|\psi_n\|_A^2 \leq \|A\|\,\|\psi_n\|^2 \leq 4\,\|A\|$$

$\therefore$ $\psi_n \in D_A$, $\psi_n \neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Basta con demostrar que $\{\psi_n\}$ es cerrado en H_A: si $\langle u, \psi_n\rangle_A = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ entonces $u=0$ en H_A.

Sea $u\in H_A$ tal que $\langle u, \psi_n\rangle_A = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Por contradicción supongamos que $u\neq 0$ (podemos tomar $\|u\|_A = 1$). Entonces existe $v\in D_A$ tal que $\|u-v\|_A < \epsilon$. Así,

$$\|v\|_A \geq \|u\|_A - \|v-u\|_A = 1-\epsilon > \tfrac{1}{2} \quad \therefore \quad v\neq 0.$$
$$\|v\| \leq \frac{1}{c}\,\|v\|_A \leq \frac{1}{c}(1+\epsilon)$$

Calculamos, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
|\langle \varphi_n, Av \rangle| &\le |\langle \varphi_n - \psi_n, Av \rangle| + |\langle \psi_n, Av \rangle| \\
&\le \|\varphi_n - \psi_n\| \, \|A\| \, \|v\| + \\
&\quad + |\langle A\psi_n, v-u \rangle| + |\langle A\psi_n, u \rangle| \\
&\le \epsilon \|A\| \frac{1}{c}(1+\epsilon) + \underbrace{|\langle \psi_n, v-u \rangle_A|}_{\le 4\|A\| \|v-u\|_A} \\
&\quad + \underbrace{|\langle \psi_n, u \rangle_A|}_{=0 \ \forall n} \\
&\le \epsilon C_{\|A\|} + O(\epsilon^2) \qquad \forall \ 0 < \epsilon < 1/2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad \langle \varphi_n, Av \rangle = 0 \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$

$\{\varphi_n\}$ es base de H $\therefore$ $Av = 0$ en H

$$\Rightarrow \quad \|v\|^2 \le \frac{1}{c} \|v\|_A^2 = \frac{1}{c} \langle Av, v \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $v = 0$ en H contradicción.

$\therefore$ $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es cerrado en H_A

$\therefore$ H_A es separable $\square$

<u>Observación</u> $\{\psi_n\}$ se puede ortonormalizar para obtener una base ortonormal de H_A.

<u>Método de la base ortonormal</u>

Sean $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real, $A : D_A \subset H \to H$ lineal, definido positivo, $\overline{D_A} = H$.

Si H es separable $\Rightarrow$ H_A separable

$\therefore$ Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormal de H_A:

- $\forall u\in H_A$, $\forall \epsilon>0$ $\exists$ $N=N(\epsilon)$ y α_j^N tales que
$$\left\| u-\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^N \varphi_j \right\|_A < \epsilon$$
- $$\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle_A = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} = \delta_j^i$$

El mínimo $u_0\in H_A$ del funcional cuadrático (dado $f\in H$) tiene una única expansión en serie de Fourier:

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \varphi_j \quad \in H_A$$

donde $\beta_j = \langle u_0, \varphi_j\rangle_A$, $\forall j\in\mathbb{N}$.

Observamos que

$$\langle u_0, u\rangle_A = \langle f, u\rangle, \qquad \forall u\in H_A$$

por ser mínimo del funcional cuadrático.
Sustituyendo $u\equiv\varphi_j\in H_A$ obtenemos

$$\beta_j = \langle u_0, \varphi_j\rangle_A = \langle f, \varphi_j\rangle$$

Los coeficientes de Fourier están determinados y la solución del problema es calculable:

$$u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

Nótese que la convergencia de la serie en H_A implica convergencia en H:

sea $u_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j$ con $\beta_j = \langle f, \varphi_j \rangle$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

A positivo definido:

$$\| u_n - u_0 \| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j - u_0 \right\|_A \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

u_n es una sucesión minimizante.

$u_n \to u_0$ en H.

Teorema Bajo hipótesis anteriores, si $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base ortonormal de H_A entonces la solución generalizada $u_0 \in H_A$ de $Au = f$ (con $f \in H$ dado) está determinada por la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j = u_0$$

La serie converge a u_0 en H_A (y en H).

Ejemplo: $\Omega = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$
$H = L^2(\Omega)$, $A = -\Delta = -(\partial_x^2 + \partial_y^2)$

una base de $L^2(\Omega)$ es

$$\varphi_{n,m}(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$$

base ortogonal.

Ejercicio: • Demostrar que $\{\varphi_{n,m}\}$ base de H_A y

$$\left\{ \frac{\varphi_{n,m}}{\|\varphi_{n,m}\|_A} \right\}$$ es base ortonormal.

• Encontrar la solución de $-\Delta u = k$ con k constante en Ω, con $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Observaciones:
La dificultad del método consiste en encontrar la base ortonormal. Si el operador o la geometría no son sencillos hallar una base es complicado. Incluso teniendo la base, ortonormalizarla puede ser numéricamente costoso.

Se requieren otros métodos.

Método de Ritz

Mismas hipótesis : $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real separable, $A : D_A \subset H \to H$, definido positivo

Sea $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de H_A, no necesariamente ortogonal.

Idea: $u_0 \in H_A$ mínimo del funcional cuadrático

$$\tilde{F}[u_0] = \min_{w \in H_A} \left(\langle w, w \rangle_A - 2 \langle f, w \rangle \right)$$

Todo elemento $u \in H_A$ se puede aproximar por

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j$$

$\{\varphi_n\}$ es denso en H_A. Para el caso de $u_0 \in H_A$, los coeficientes van a estar determinados por la condición :

$$(A) \ldots \quad \tilde{F}[u_n] = \min_{w \in E_n} \tilde{F}[w]$$

$$E_n = \text{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset H_A$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Se espera que si a_j's se selecionan por (4) entonces u_n aproxima a u_0.

Calculando:

$$\tilde{F}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\right] = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j, \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\rangle_A - 2\left\langle f, \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_A - 2\sum_{j=1}^{n} a_j \langle f, \varphi_j \rangle$$

$$=: G(a_1, \dots, a_n)$$

Forma cuadrática acotada por abajo:

$$\tilde{F}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\right] = G(a_1, \dots, a_n) \geq \tilde{F}[u_0]$$

G tiene un mínimo global en $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\frac{\partial G}{\partial a_j} = 0 \quad \forall \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{n} a_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_A - 2\langle f, \varphi_j \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ sistema de ecuaciones:

$$(S) \begin{cases} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle_A a_1 + \dots + \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle_A a_n = \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle_A a_1 + \dots + \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_A a_n = \langle f, \varphi_n \rangle \end{cases}$$

$$(5) \Leftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = b$$

$$M \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad M_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_A = M_{ji}$$

M es simétrica

$$b \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad b_j = \langle f, \varphi_j \rangle \qquad \forall\ 1 \leq j \leq n$$

$\{\varphi_n\}$ es base $\Rightarrow$ M es invertible $\forall n \in \mathbb{N}$

(5) tiene una única solución

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \cdots \quad (6)$$

Sea $a_1, \ldots, a_n$ la solución de (6). Se define la aproximación de Ritz:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j \qquad \cdots \quad (7)$$

Lema u_n es una sucesión minimizante.

Dem. Aplicando Gram-Schmidt al conjunto finito $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, base de $E_n = \text{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ obtenemos una base ortonormal $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ de E_n tal que $\langle \tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j \rangle_A = \delta_i^j$

Sea $\quad w_n := \sum_{j=1}^{n} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \tilde{\varphi}_j$

sucesión minimizante del método de la base ortonormal.

$\Rightarrow$ w_n es la proyección ortogonal de $u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \tilde{\varphi}_j \rangle \tilde{\varphi}_j$ sobre E_n, $\forall n \in \mathbb{N}$

Por construcción de u_n (minimiza $\tilde{F}$ sobre E_n) :

$$\tilde{F}[u_n] = \min_{u \in E_n} \tilde{F}[u] \leq \tilde{F}[w_n]$$

$\downarrow$ $w_n \in E_n$

Por otro lado, w_n minimiza $\|u - u_0\|_A$ para $u \in E_n$.

$$\therefore \quad \tilde{F}[u] = \tilde{F}[u_0] + \|u - u_0\|_A^2 \qquad \forall\, u \in E_n$$

$$\Rightarrow \min_{u \in E_n} \tilde{F}[u] = \tilde{F}[u_0] + \min_{u \in E_n} \|u - u_0\|_A^2$$

ocurre en $w_n \in E_n$.

Por unicidad de la proyección ortogonal $u_n = w_n \in E_n$. $\quad \therefore$ u_n es sucesión minimizante $\blacksquare$

Hemos demostrado :

__Teorema__ Mismas hipótesis. Si $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de H_A entonces la sucesión de Ritz:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j$$

donde a_j, $1 \leq j \leq n$, está definido en (6) $\forall n \in \mathbb{N}$, converge en H_A a la solución generalizada $u_0 \in H_A$ de $Au = f$ en H_A.

__Observaciones__: Ritz ofrece la misma solución __sin__ necesidad de ortonormalizar la base. Para resolver (6) nótese que M es simétrica.

Se puede demostrar que aunque $u_n \to u_0$ en H_A, __no__ necesariamente $Au_n \to f$ en H.