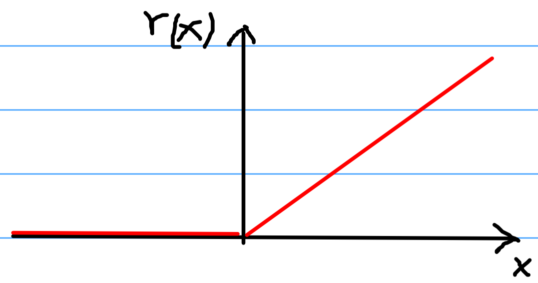
Lección 2.2: Convergencia. Operaciones con distribuciones.

Ejemplos (continuación)

(A) Función "rampa"

$$r(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



Claramente $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow \ell_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\ell_r(\varphi) = \langle r, \varphi \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} r(x)\varphi(x)\,dx$

$$= \int_0^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx$$

$$\frac{d\ell_r}{dx}(\varphi) = -\langle r, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} x\,\varphi'(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\,dx$$

con $H(x)$ función de Heaviside.

$$\Rightarrow \quad \frac{d\ell_r}{dx}(\varphi) = \ell_H(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(B) Sea $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(0) \nexists$ pero $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists\, \ell_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{d\ell_f}{dx}(\varphi) = -\langle |x|, \varphi' \rangle$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$
$$= 2\langle H(x), \varphi \rangle - \langle 1, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\ell_f}{dx} = 2H - 1 \qquad \left(= 2\ell_H - \ell_1 \right)$$

$\in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en sentido distribucional

$$\therefore \quad \frac{d^2\ell_f}{dx^2} = 2\delta_0 \qquad \text{(ejercicio)}$$

Definición Una distribución $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es constante si $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$, constante, tal que

$$\ell(\varphi) = \alpha \int_\Omega \varphi(x)\,dx, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(La función constante $f(x) \equiv \alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ y "$\ell_f = \alpha$")

Lema (a) Si $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entonces existe otra distribución $\tilde{\ell} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que

$$\frac{d\tilde{\ell}}{dx} = \ell \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

(b) Si $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tales que $\frac{d\ell_1}{dx} = \frac{d\ell_2}{dx}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entonces $\ell_1 - \ell_2$ es constante (en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Dem. (a) $\dfrac{d\tilde{\ell}}{dx} = \ell$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi

$$\tilde{\ell}(\varphi') = -\ell(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Sea $X := \{ \varphi' : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \}$.

X es un subespacio de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Mas aún,

$$\xi \in X \iff \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, dx = 0$$

Si $\xi \in X$ entonces $\xi(x) = \varphi'(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) = 0.$$

Si $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{-\infty}^{\infty} \xi(x)\, dx = 0$

entonces $\varphi(x) := \int_{-\infty}^{x} \xi(y)\, dy \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

y $\varphi'(x) = \xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $\therefore$ $\xi \in X$.

Definimos el funcional "masa" (o "media"):

$$m(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$\therefore$ $X = \ker m$

Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $m(\varphi_0) = 1$.

Entonces : $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \underline{X} \oplus \varphi_0 \mathbb{R}$

es decir, $\varphi = \zeta \oplus \alpha \varphi_0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

con $\zeta \in \underline{X}$

cierto $\alpha \in \mathbb{R}$.

Unicidad : $\zeta_1 + \alpha_1 \varphi_0 = \zeta_2 + \alpha_2 \varphi_0$, $\zeta_j \in \underline{X}$

$\alpha_j \in \mathbb{R}$

Integrando : $\alpha_1 = \alpha_2$

$\Rightarrow \quad \zeta_1 = \zeta_2$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Definimos $\alpha := m(\varphi)$.

$$\zeta(x) := \varphi(x) - \alpha \varphi_0(x)$$

$\therefore \quad \zeta \in \underline{X}$ y $m(\zeta) = 0$.

Definimos $\tilde{\ell}$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ por extensión :

$$\tilde{\ell}(\varphi) := \tilde{\ell}(\zeta) + \tilde{\ell}(\alpha \varphi_0), \quad \forall \varphi \in \underline{X} \oplus \varphi_0 \mathbb{R}$$

Si $\zeta \in \underline{X}$ entonces $\zeta = \psi'$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

y $\tilde{\ell}(\zeta) = -\ell(\psi')$

$$\psi = \int_{-\infty}^{x} \zeta(y)\, dy$$

y definimos $\tilde{\ell}(\varphi_0) := 0$

Es decir, $\forall\ \varphi = \rho \oplus \alpha\varphi_0$ se define

$$\tilde{\ell}(\varphi) := -\ell(\psi), \quad \text{con } \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(y)\,dy$$

Claramente, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces

$$\varphi' \in X \quad \text{y} \quad \tilde{\ell}(\varphi') = -\ell(\varphi).$$

Falta verificar que $\tilde{\ell} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

Linealidad:
$$\begin{aligned}\tilde{\ell}(\varphi_1 + \beta\varphi_2) &= -\ell(\psi_1 + \beta\psi_2) \\ &= -\ell(\psi_1) - \beta\,\ell(\psi_2) \\ &= \tilde{\ell}(\varphi_1) + \beta\,\tilde{\ell}(\varphi_2).\end{aligned}$$

Continuidad: Sea $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \rho_n \oplus \alpha_n\varphi_0 \\ \varphi &= \rho \oplus \alpha\varphi_0\end{aligned} \qquad \exists\ K \text{ compacto } \operatorname{supp} \varphi_n \subset K.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}\rho_n &\to \rho \\ \alpha_n &\to \alpha\end{aligned}\right\} \text{ uniformemente en } K \text{ si } n \to \infty$$

$$\therefore\ |\psi_n - \psi| = \left| \int_{-\infty}^{x} \rho_n(y) - \rho(y)\,dy \right| \le \int_K |\rho_n(y) - \rho(y)|\,dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\therefore\ \tilde{\ell}(\varphi_n) = -\ell(\psi_n) \to -\ell(\psi) = \tilde{\ell}(\varphi) \quad \text{si } n \to \infty$$

Esto prueba (a).

(b) Sea $\ell := \ell_1 - \ell_2$ con $\frac{d\ell_1}{dx} = \frac{d\ell_2}{dx}$

$\frac{d\ell}{dx} = 0$ ssi ℓ se anula en $\mathfrak{X}$.

Si ℓ se anula en $\mathfrak{X}$ entonces

$$\frac{d\ell}{dx}(\varphi) = -\ell(\underbrace{\varphi'}_{\varphi' \in \mathfrak{X}}) = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Si $\frac{d\ell}{dx}(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

entonces $-\ell(\varphi') = 0$ $\therefore$ ℓ se anula en $\mathfrak{X}$.

De este modo,

$$\begin{aligned}
\ell(\varphi) = \ell(\zeta \oplus \alpha \varphi_0) &= \ell(\alpha \varphi_0) \\
&= \alpha\, \ell(\varphi_0) \\
&= m(\varphi)\, \ell(\varphi_0) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(\varphi_0)\, \varphi(x)\, dx \\
&= \langle \underbrace{\ell(\varphi_0)}_{\text{constante}}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

$\therefore$ ℓ es la distribución constante $\ell(\varphi_0)$.
$= C_0$

$\square$

Lema Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es tal que $\partial_{x_j} \ell = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall\ 1 \leq j \leq n$ entonces ℓ es una distribución constante en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dem. Ejercicio

$\square$

Ejemplo: función "rampa" en multi-d:

$$r(x) := \begin{cases} x_1 x_2 (\cdots) x_n, & x_j \geq 0, \ \forall\ 1 \leq j \leq n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \ell_r \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Por inducción:

$$\partial^n_{x_1 x_2 \cdots x_n} \ell_r(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} H(x)\, \varphi(x)\, dx$$

donde $H(x) = \begin{cases} 1, & x_j \geq 0, \ \forall\ 1 \leq j \leq n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$

(Ejercicio)

Distribuciones vectoriales

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, definimos

$$\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\Omega)^n = \{ \vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : \varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega) \}_{1 \leq j \leq n}$$

Espacio de funciones vectoriales de prueba.

$$\vec{l} \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'(\Omega)^n$$

es un elemento $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$

Acción:

$$\vec{l}(\vec{\varphi}) = \langle \vec{l}, \vec{\varphi} \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle l_j, \varphi_j \rangle$$

Podemos definir:

- <u>Gradiente</u>: sea $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces

$$\nabla l \in \mathcal{D}'(\Omega)^n \quad \text{y se define}$$

$$\nabla l = (\partial_{x_1} l, \partial_{x_2} l, \dots, \partial_{x_n} l)$$

$$\partial_{x_j} l \in \mathcal{D}'(\Omega), \qquad 1 \leq j \leq n$$

Acción:

$$\begin{aligned} \langle \nabla l, \vec{\varphi} \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_{x_j} l, \varphi_j \rangle \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \langle l, \partial_{x_j} \varphi_j \rangle \\ &= -\langle l, \operatorname{div} \vec{\varphi} \rangle \quad \cdots (1) \end{aligned}$$

Nótese que $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)^n \Rightarrow \operatorname{div} \vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

• <u>div $\vec{l}$</u> : Sea $\vec{l} \in \mathcal{D}'(\Omega)^n$. $l_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Se define $\operatorname{div} \vec{l} := \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} l_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{div} \vec{l}, \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_{x_j} l_j, \varphi \rangle \\ &= - \sum_{j=1}^{n} \langle l_j, \partial_{x_j} \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\nabla \varphi = (\partial_{x_1} \varphi, \dots, \partial_{x_n} \varphi) \in \mathcal{D}(\Omega)^n$$

$\therefore$ por definición de $\vec{l}$:

$$\langle \operatorname{div} \vec{l}, \varphi \rangle = - \langle \vec{l}, \nabla \varphi \rangle \quad \cdots \quad (2)$$

• Operador de Laplace.

Sea $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ entonces

$$\Delta l = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 l \quad \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta l, \varphi \rangle &= \sum_{j=1}^{n} \langle \partial_{x_j}^2 l, \varphi \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \langle l, \partial_{x_j}^2 \varphi \rangle \\ &= \langle l, \Delta \varphi \rangle \end{aligned}$$

Usando (1) y (2) :

$$\langle \Delta \ell, \varphi \rangle = \langle \ell, \Delta\varphi \rangle = \langle \ell, \operatorname{div}(\nabla\varphi) \rangle$$
$$\overset{(1)}{=} -\langle \nabla \ell, \nabla\varphi \rangle$$
$$\overset{(2)}{=} \langle \operatorname{div}(\nabla \ell), \varphi \rangle$$

$\therefore \quad \Delta = \operatorname{div}(\nabla)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Aplicación : sol. fundamental del Laplaciano

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log|x|, & \text{si } n=2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$$

con $\omega_n = \int_{\partial B_1(0)} dS_x$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Φ es integrable en cualquier bola $B_r(0)$:

$$\int_{B_r(0)} |\Phi(x)|\, dx \leq \begin{cases} Cr^2 |\log r|, & n=2 \\ Cr^2, & n\geq 3 \end{cases}$$

$\therefore \quad \Phi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$\therefore \quad \exists \; \ell_\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio : $\quad -\Delta \ell_\Phi = \delta_0$

Calcular : $\langle \Phi, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x)\Delta\varphi(x)\, dx = -\varphi(0)$.

2.2 Convergencia

Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua el soporte de f es

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

$\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp}(f)$ es el abierto más grande donde $f=0$.

Def: Una distribución $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es igual a cero en un abierto $G \subset \Omega$ si

$$\ell(\varphi) = 0 \quad \forall \ \varphi \in C_0^\infty(G) \subset \mathcal{D}(\Omega).$$

Def. Sea $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Sea

$$g := \bigcup \{ G \subset \Omega : G \text{ abierto tal que } \ell = 0 \text{ en } G \}$$

g es abierto. Se define el soporte de ℓ como

$$\operatorname{supp}(\ell) := \Omega \setminus g.$$

Ejemplos:

(A) Intuitivamente $\operatorname{supp}(\delta) = \{0\}$

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad \therefore \quad \delta(\varphi) = \varphi(0)$

$\therefore$ δ es cero en cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ tal que $0 \notin G$.

$\therefore \quad \mathcal{G} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$\therefore \quad \mathrm{supp}(\delta) = \{0\}.$

(B) Sea $f \in C_0^1(\Omega)$. claramente $l_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle l_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Entonces $\mathrm{supp}(l_f) = \mathrm{supp}(f)$ (ejercicio).

(C) Suponiendo $\mathrm{supp}(l) \cap \mathrm{supp}(\varphi) = \phi$ para cierta $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\varphi)$.

Entonces $l(\varphi) = \langle l, \varphi \rangle = 0$.

$K = \mathrm{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$ y $\mathrm{supp}(l) = \Omega \setminus \mathcal{G}$

Pero $\mathrm{supp}(l) \cap K = \phi \quad \therefore \quad K \subset \mathcal{G}.$

$\therefore \quad l(\varphi) = 0.$

<u>Definición</u> Sea $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la sucesión $\{l_n(\varphi)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ converge cuando $n \to \infty$ entonces decimos que la sucesión $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es <u>convergente</u>. En ese caso:

$$l(\varphi) := \lim_{n \to \infty} l_n(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

es un funcional lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \ell, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 \rangle$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, \varphi_1 \rangle + \alpha \lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, \varphi_2 \rangle$$
$$= \langle \ell, \varphi_1 \rangle + \alpha \langle \ell, \varphi_2 \rangle$$

Pero no es evidente que ℓ sea continuo.

<u>Teorema</u> Si $\ell_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y ℓ_n es convergente, $\ell_n \to \ell$ cuando $n\to\infty$ entonces $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$. El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es <u>cerrado</u> bajo convergencia.

<u>Dem.</u> Por linealidad basta con demostrar que

$$\langle \ell, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{si} \quad \varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \text{cuando } k\to\infty.$$

Por contradicción: sea $\varphi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que:

- $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ si $k\to\infty$
- $\langle \ell, \varphi_k \rangle \not\to 0$ si $k\to\infty$

Entonces podemos escoger una subsucesión φ_{k_j} tal que:

(a) $|\langle \ell, \varphi_{k_j} \rangle| \geq C > 0$, $j \in \mathbb{N}$ con $C>0$ uniforme.

(b) $|D^\alpha \varphi_{k_j}| \leq 1/4^j$, $\forall\ 0 \leq m \leq j$, $|\alpha| = m$

En efecto, como $\langle \ell, \varphi_k \rangle \not\to 0$ si $k \to \infty$, entonces para cada $c > 0$ fijo podemos encontrar φ_{k_j} tal que (a) se cumple.

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{supp} \varphi_k \subset K \\ D^\alpha \varphi_k \to 0 \text{ uniformemente en } K. \end{array}$$

$\therefore$ podemos escoger φ_{k_j} tal que (b) se cumple.

Así $\quad \varphi_{k_j} \equiv \varphi_j$

$$\psi_j := 2^{-j} \varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$$

claramente $\psi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ pero

$$|\langle \ell, \psi_j \rangle| \geq 2^{-j} C \longrightarrow \infty \text{ si } j \to \infty$$

Vamos a definir:

- $\{\tilde{\ell}_n\}$ subsucesión de $\{\ell_n\}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$
- $\{\tilde{\psi}_j\}$ subsucesión de $\{\psi_j\}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$

Sea $\tilde{\psi}_1$ tal que $|\ell(\tilde{\psi}_1)| > 1$

Dado que $|\langle \ell, \tilde{\psi}_1 \rangle| = |\lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, \tilde{\psi}_1 \rangle| > 1$

podemos escoger $\tilde{\ell}_1$ tal que $|\langle \tilde{\ell}_1, \tilde{\psi}_1 \rangle| > 1$.

Por inducción, suponemos que los primeros $\nu-1$ elementos, con $\nu > 1$, han sido seleccionados

$$(\tilde{\varphi}_m, \check{\ell}_m) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\text{con} \qquad 1 \leq m \leq \nu - 1$$

Entonces podemos seleccionar $\tilde{\varphi}_\nu$ un elemento de $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ con índice suficientemente alto tal que

$\rightarrow$ (i) $\quad |\langle \tilde{\ell}_j, \tilde{\varphi}_\nu \rangle| < \frac{1}{2^{\nu-j}} \qquad j = 1, \ldots, \nu-1$

y (ii) $\quad |\langle \ell, \tilde{\varphi}_\nu \rangle| > \sum_{i=1}^{\nu-1} |\langle \ell, \tilde{\varphi}_i \rangle| + \nu$

(i) es posible por que $\varphi_j \xrightarrow{\infty} 0$ y para cada $\ell_n(\varphi_j) \to 0$ si $j \to \infty$.

(ii) es posible para ν suficientemente grande ya que $|\langle \ell, \varphi_j \rangle| \to \infty$ si $j \to \infty$.

Por (ii), dado que $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ se tiene que $\langle \ell_n, \varphi \rangle \to \langle \ell, \varphi \rangle$ si $n \to \infty$, entonces podemos escoger $\tilde{\ell}_\nu$ un elemento de $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con índice suficientemente grande (más grande que todos índices n's de $\tilde{\ell}_1, \ldots, \tilde{\ell}_{\nu-1}$) tal que

$$\left|\langle \tilde{\ell}_\nu, \tilde{\psi}_\nu \rangle\right| > \sum_{i=1}^{\nu-1} \left|\langle \tilde{\ell_\nu}, \tilde{\psi}_i \rangle\right| + \nu \quad \text{--- (iii)}$$

Se han definido $\{\tilde{\ell}_\nu\}$, $\{\tilde{\psi}_\nu\}$.

Ahora se define $\psi := \sum_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\psi}_\nu$

Por demostrar $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$R_N = \sum_{\nu=N}^{\infty} \tilde{\psi}_\nu \qquad \text{Residuo}$$

$$|R_N| \leq \sum_{\nu=N}^{\infty} |\tilde{\psi}_\nu| \leq \sum_{\nu=N}^{\infty} |\psi_\nu|.$$

$\{\tilde{\psi}_\nu\}$ es subsucesión $\{\psi_j\}$

$$\leq \sum_{\nu=N}^{\infty} 2^\nu |\varphi_\nu|$$

$$\leq \sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \longrightarrow 0 \quad \text{si } N \to \infty$$

(b)

Análogamente el residuo de la serie de derivadas satisface si $N > |\alpha|$

$$\left|\sum_{\nu=N}^{\infty} D^\alpha \tilde{\psi}_\nu\right| \leq \sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \longrightarrow 0 \quad \text{si } N \to \infty$$

Por convergencia uniforme $\psi \in C^\infty(\Omega)$.

Además $\quad \operatorname{supp}(\psi) \subset \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \operatorname{supp}(\tilde{\psi}_\nu) \subset K$

$$\therefore \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

Finalmente,

$$\langle \tilde{l}_\nu, \psi \rangle = \langle \tilde{l}_\nu, \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu-1} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle + \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_\nu \rangle$$

$$+ \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle$$

$$(i) \Rightarrow \left| \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle \right| < \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-\nu}} \leq 1$$

$$\therefore \quad |\langle \tilde{l}_\nu, \psi \rangle| \geq |\langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_\nu \rangle| - \left| \sum_{j=\nu+1}^{\infty} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle \right|$$

$$- \left| \sum_{j=1}^{\nu-1} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle \right|$$

$$\underset{(iii)}{\geq} \sum_{i=1}^{\nu-1} |\langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_i \rangle| + \nu - 1$$

$$- \left| \sum_{j=1}^{\nu-1} \langle \tilde{l}_\nu, \tilde{\psi}_j \rangle \right|$$

$$\geq \nu - 1$$

Tomando $\nu \to \infty$ obtenemos

$$|\langle \tilde{l}_\nu, \psi \rangle| \to \infty \quad \text{para } \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Contradicción con $\lim_{n\to\infty} \langle \ell_n, \varphi \rangle = \ell(\varphi)$ existe $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Podemos concluir que $\langle \ell, \varphi_n \rangle \to 0$ si $n \to \infty$.

$\therefore$ ℓ es continua

$\therefore$ $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\square$

<u>Corolario</u> Sea $\ell_n \to \ell$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces para cualquier multi-índice

$$D^\alpha \ell_n \longrightarrow D^\alpha \ell \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

<u>Dem.</u> $\langle \ell_n, \varphi \rangle \to \langle \ell, \varphi \rangle$ si $n \to \infty$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}$.

$D^\alpha \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\therefore \quad \langle D^\alpha \ell_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \ell_n, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$\longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle \ell, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$= \langle D^\alpha \ell, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$D^\alpha \ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$\square$