Lección 2.3: Operaciones con distribuciones. Convolución.

Teorema: $\mathcal{D}'(\Omega)$ es cerrado bajo convergencia.

Corolario 1: $\ell_n \to \ell$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ entonces $D^\alpha \ell_n \to D^\alpha \ell$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall$ multi-índice α.

Corolario 2 $u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ tal que
- $u_n \to u$ c.d.s. en Ω si $n \to \infty$
- $|u_n| \leq g$, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Entonces,

$$\ell_n := \ell_{u_n} \longrightarrow \ell_u \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ cuando } n \to \infty$$

Dem. Ejercicio (aplicar teo. conv. dominada) $\square$

Corolario 3 Si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ cuando $n \to \infty$ entonces $\ell_{u_n} \to \ell_u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dem. Por Hölder, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$|\ell_{u_n}(\varphi) - \ell_u(\varphi)| = \left| \int_\Omega (u_n - u)(x)\varphi(x)\,dx \right|$$

$$\leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega)} \underbrace{\|\varphi\|_{L^q(\Omega)}}_{<\infty} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \text{Si } p = 1 \quad \|\varphi\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{L^q} < \infty$$

$\square$

Operaciones con distribuciones

Observación: el producto de dos distribuciones no tiene sentido.

Contraejemplos:

(A) Sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. $\therefore$ $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Pero no necesariamente $f^2 \in L^1_{loc}(\Omega)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \therefore \quad f^2 = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

ℓ_{f^2} no tiene sentido. No hay definición natural de $(\ell_f)^2$.

(B) Tampoco aproximando en sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ se puede definir ℓ^2.

Sea $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$

Sea $u_n(x) = n \chi_{[0, 1/n]} = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$

$u_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell_{u_n} =: \ell_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle \ell_n, \varphi \rangle = \int_0^{1/n} n \varphi(x) \, dx$$

Teo. valor medio: $\exists \ \theta_n \in (0, 1/n)$ tal que

$$\int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = \frac{\varphi(\theta_n)}{n}$$

Claramente $\theta_n \to 0$ si $n \to \infty$. Por continuidad de φ

$$\ell_n(\varphi) = n \int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = \varphi(\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(0)$$

$\therefore \quad \ell_n \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Sin embargo: claramente $u_n^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\tilde{\ell}_n := \ell_{(u_n)^2} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

$$\langle \tilde{\ell}_n, \varphi \rangle = n^2 \int_0^{1/n} \varphi(x)\,dx = n\,\varphi(\theta_n)$$

Tomando $\varphi(0) > 0 \quad \therefore \quad \langle \tilde{\ell}_n, \varphi \rangle \to \infty$ si $n \to \infty$.

$\therefore \quad \tilde{\ell}_n$ <u>no</u> converge en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Operaciones en $\mathcal{D}'(\Omega)$:

- ✓ Mult. x una función
- Composición
- Convolución

<u>Multiplicación por función:</u>

Sea $u \in C^\infty(\Omega)$, $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces $u\varphi \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$

$$\ell_f(u\varphi) = \int_\Omega f(x)\,u(x)\,\varphi(x)\,dx = \ell_{fu}(\varphi)$$

ya que $uf \in L^1_{loc}(\Omega)$

<u>Definición</u> Sean $u \in C^\infty(\Omega)$, $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Se define $u\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante:

$$(u\ell)(\varphi) = \langle u\ell, \varphi\rangle := \langle \ell, u\varphi\rangle = \ell(u\varphi)$$

$u\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$! ejercicio (linealidad obvia)

y por inducción: si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ entonces

$$D^\alpha(u\varphi_n) \longrightarrow D^\alpha(u\varphi)$$

y se aplica la continuidad de $\ell \in \mathcal{D}'$.

Ejemplos:

(A) $u \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entonces

$$u\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$
$$\parallel$$
$$u(0)\delta$$

$$\langle u\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, u\varphi\rangle = u(0)\varphi(0)$$
$$= u(0)\langle \delta, \varphi\rangle$$
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Si $u(x) = x \in C^\infty(\mathbb{R})$, $u(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad x\delta = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Nota: la regla de Leibniz del producto funciona:

Sea $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $u \in C^\infty(\Omega)$ entonces

$$\partial_{x_j}(u\ell) = u\,\partial_{x_j}\ell + u_{x_j}\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\langle \partial_{x_j}(u\ell), \varphi \rangle = -\langle u\ell, \varphi_{x_j} \rangle$$
$$= -\langle \ell, u\varphi_{x_j} \rangle$$

Por otro lado,

$$\langle (u\,\partial_{x_j}\ell + \underbrace{u_{x_j}}_{\in C^\infty}\ell), \varphi \rangle = \langle u\,\partial_{x_j}\ell, \varphi \rangle + $$
$$+ \langle u_{x_j}\ell, \varphi \rangle$$

$$= \langle \partial_{x_j}\ell, u\varphi \rangle + \langle \ell, u_{x_j}\varphi \rangle$$

$$= -\langle \ell, \partial_{x_j}(u\varphi) \rangle + \langle \ell, u_{x_j}\varphi \rangle$$

$$= -\langle \ell, u\varphi_{x_j} \rangle$$

$$\therefore \quad \partial_{x_j}(u\ell) = u\,\partial_{x_j}\ell + u_{x_j}\ell \in \mathcal{D}'$$

Ej. $x\delta = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \quad \delta + x\delta' = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Ejercicio: verificar esto con la definición.

Por inducción se puede demostrar que

$$x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)} \qquad \forall\ m\in\mathbb{Z},\ m\geq 1$$

(ejercicio)

<u>Lema</u> $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisface $x\ell = 0$ ssi $\ell = c\delta$ con $c\in\mathbb{R}$ constante.

<u>Dem</u> "$\Leftarrow$" si $\ell = c\delta$ entonces

$$\langle x\ell, \varphi\rangle = \langle xc\delta, \varphi\rangle = c\langle \delta, x\varphi\rangle = 0 \quad \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

"$\Rightarrow$" Sup. $x\ell = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$\therefore\ \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad 0 = \langle x\ell, \varphi\rangle = \langle \ell, x\varphi\rangle$

Por demostrar: $\rho\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es de la forma $\rho = x\varphi$ con $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ si y sólo si $\rho(0) = 0$.

Si $\rho(x) = x\varphi(x)$ con $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ent. claramente $\rho(0) = 0$.

Sea $\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ y $\rho(0) = 0$. Definimos:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{\rho(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ \rho'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Claramente $\varphi\in C^\infty$ si $x\neq 0$.

Por serie de Taylor y $\varphi(0) = 0$:

$$\varphi(x) = \varphi'(0)\, x + O(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi(x)}{x} = \varphi'(0) + O(x)$$

$$\therefore \quad \frac{\psi(x) - \varphi'(0)}{x} = \frac{\varphi(x)}{x^2} - \frac{\varphi'(0)}{x}$$

$$= \frac{O(x^2)}{x^2} = O(1)$$

tiene límite si $x \to 0$

$\therefore$ $\psi'(0)$ existe.

Análogamente, $\psi^{(m)}(0)$ $\exists$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$ si

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + \frac{a_m x^m}{m!} + O(x^{m+1})$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$.

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \varphi'(0) + \varphi''(0)\frac{x}{2} + \dots$$

$$\dots + \varphi^{(m)}(0)\frac{x^{m-1}}{m!} +$$

$$+ \varphi^{(m+1)}(0)\frac{x^m}{(m+1)!} + O(x^{m+1})$$

$\therefore$ $\psi^{(m)}(0)$ $\exists$ $\therefore$ $\psi \in C^\infty$.

Además $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

mismo soporte.

Ahora sea cualquier $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\theta(0) = 1$. Entonces $\forall\, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ definimos

$$\varsigma(x) := \psi(x) - \lambda \theta(x)$$

con $\lambda = \psi(0)$.

Claramente $\varsigma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y
$$\varsigma(0) = \psi(0) - \lambda\theta(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varsigma = x\varphi \quad \text{para } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Así, para toda $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$l(\psi) = \langle l, \psi \rangle = \langle l, \varsigma + \lambda\theta \rangle$$
$$= \langle l, \varsigma \rangle + \lambda \langle l, \theta \rangle$$
$$= \underbrace{\langle l, x\varphi \rangle}_{=0} + \lambda \langle l, \theta \rangle$$
$$= \psi(0) \underbrace{\langle l, \theta \rangle}_{=:c} \quad \text{constante}$$

$$\Rightarrow \quad \langle l, \psi \rangle = c\,\psi(0)$$

$$\Rightarrow \quad l = c\delta \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \qquad \square$$

Nota: Si $x^2 l = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ entonces $x l = c_1 \delta$, $c_1 \in \mathbb{R}$ const.
En particular, $\langle l, \varsigma \rangle = \langle l, x\varphi \rangle$
$= \langle x l, \varphi \rangle = c_1 \varphi(0)$.

$\forall\ \varphi = x\psi$. Se puede probar que

$\ell = -c_1\delta' + c_2\delta$ con $c_2 \in \mathbb{R}$ const.

(ejercicio).

Convolución

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos $n, m \geq 1$

Se define

$$\mathcal{D}(\Omega \times \tilde{\Omega})$$

como el espacio de funciones de prueba

$$\varphi : \Omega \times \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi = \varphi(x,y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \tilde{\Omega}$$

tales que : • $\varphi \in C^{\infty}(\Omega \times \tilde{\Omega})$

• $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega \times \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ compacto.

Ejemplo : si $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

$$\varphi(x,y) := \varphi_1(x)\,\varphi_2(y) \in \mathcal{D}(\Omega \times \tilde{\Omega})$$

Motivación : $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $g \in L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$

si $\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$, $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

$$\langle f\otimes g, \varphi\rangle := \int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} f(x)\, g(y)\, \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, dx\, dy$$

$$= \left(\int_{\Omega} f(x)\,\varphi_1(x)\, dx\right)\left(\int_{\tilde{\Omega}} g(y)\,\varphi_2(y)\, dy\right)$$

Fubini

$$= \langle f, \varphi_1\rangle \langle g, \varphi_2\rangle$$

$$= \ell_f(\varphi_1)\, \ell_g(\varphi_2)$$

Si $\varphi = \varphi(x,y)$ entonces

$$\int_{\Omega\times\tilde{\Omega}} f(x)\, g(y)\, \varphi(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\Omega} f(x)\left(\int_{\tilde{\Omega}} g(y)\,\varphi(x,y)\, dy\right) dx$$

$$= \int_{\tilde{\Omega}} g(y)\left(\int_{\Omega} f(x)\,\varphi(x,y)\, dx\right) dy$$

es decir,

$$\langle f\otimes g, \varphi\rangle := \langle f, \langle g, \varphi(\cdot, y)\rangle\rangle$$

$$= \langle g, \langle f, \varphi(x, \cdot)\rangle\rangle$$

Notación: $= \langle f(x), \underline{\langle g(y), \varphi(x,y)\rangle}\rangle$

$$= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x,y)\rangle\rangle$$

$\otimes$ es el producto directo.

Lema Sean $\ell_1 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\ell_2 \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$.
Entonces existe una única distribución

$$\ell_1 \otimes \ell_2 \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$$

tal que :

(i) Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \tilde{\Omega})$ es de la forma

$$\varphi(x,y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$$

con $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ entonces

$$\langle \ell_1 \otimes \ell_2 , \varphi \rangle = \langle \ell_1, \varphi_1 \rangle \langle \ell_2, \varphi_2 \rangle$$

(ii) Para la forma general $\varphi = \varphi(x,y)$
$\langle \ell_1 \otimes \ell_2, \varphi \rangle$ se calcula mediante Fubini:

- Para cada $x \in \Omega$ fijo $\varphi(x,y) =: \tilde{\varphi}(y) \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$

$$\theta(x) := \langle \ell_2, \tilde{\varphi}(y) \rangle = \langle \ell_2, \varphi(x,\cdot) \rangle$$

entonces $\underline{\theta \in \mathcal{D}(\Omega)}$ y $\therefore$

(a)
$$\langle \ell_1 \otimes \ell_2, \varphi \rangle := \langle \ell_1, \theta \rangle = \langle \ell_1, \langle \ell_2, \varphi(x,\cdot) \rangle \rangle$$

- Análogamente $\forall\, y \in \tilde{\Omega}$ fijo

(b)
$$\langle \ell_1 \otimes \ell_2, \varphi \rangle := \langle \ell_2, \langle \ell_1, \varphi(\cdot,y) \rangle \rangle .$$

(a) y (b) coinciden, y también coinciden en el caso particular (i).

<u>Dem</u>. Ejercicio (ver Schwarz)

$\square$

<u>Lema</u> El soporte de $\ell_1 \otimes \ell_2 \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$ es $\mathrm{supp}(\ell_1) \times \mathrm{supp}(\ell_2) \subset\subset \Omega \times \tilde{\Omega}$

<u>Dem</u>. Ejercicio

$\square$

Propiedades del producto directo:

(a) $D_x^\alpha D_y^\beta (\ell_1 \otimes \ell_2) = (D_x^\alpha \ell_1) \otimes (D_y^\beta \ell_2)$

$\forall$ multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$

(b) $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in \tilde{\Omega}$

$\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\delta_{y_0} \in \mathcal{D}'(\tilde{\Omega})$

Entonces, $\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} \in \mathcal{D}'(\Omega \times \tilde{\Omega})$

y $\delta_{x_0} \otimes \delta_{y_0} = \delta_{(x_0, y_0)}$

Ejercicio.

Convolución de dos distribuciones:

Sean $l_1, l_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La convolución $l_1 * l_2$ es una nueva distribución en $\mathbb{R}^n$, se define como

(1) ... $\langle l_1 * l_2, \varphi \rangle := \langle l_1 \otimes l_2, \varphi(x+y) \rangle$

si existe.

Nota: $l_1 \otimes l_2$ siempre existe.

$\text{supp}(l_1 \otimes l_2) = \text{supp}(l_1) \times \text{supp}(l_2)$

Pero, si $x \in \text{supp}(l_1)$, $y \in \text{supp}(l_2)$, $\varphi(x+y)$ está bien definida, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ pero no necesariamente tiene soporte compacto. Ejemplo: $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\text{supp}(\varphi) = [a,b]$; entonces $\varphi(x+y)$ tiene soporte en $\mathbb{R}^2$ no acotado $a \leq x+y \leq b$.

Sin embargo, el lado derecho de (1) tiene sentido si $\text{supp}(l_1 \otimes l_2) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y $\text{supp}(\varphi(x+y)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tienen una intersección acotada.

Dado que $\langle l_1 * l_2, \varphi \rangle$ debe estar definido $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in \text{supp}(l_1),\ y \in \text{supp}(l_2),\ x+y \in \text{supp}(\varphi)\}$$

debe ser acotado <u>independientemente de φ</u>.

<u>Teorema</u> La convolución $\ell_1 * \ell_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ está bien definida mediante (1) si los soportes, $\operatorname{supp}(\ell_1) \subset \mathbb{R}^n$, y $\operatorname{supp}(\ell_2) \subset \mathbb{R}^n$ son tales que:

para $x \in \operatorname{supp}(\ell_1)$ y $y \in \operatorname{supp}(\ell_2)$
$x+y$ puede permanecer acotado sólo si x y y permanecen acotados.

En este caso la convolución es conmutativa: $\ell_1 * \ell_2 = \ell_2 * \ell_1$.

<u>Dem.</u> Ejercicio (Schwarz)

$\square$

<u>Ejemplos</u>:

(a) Si al menos una distribución tiene soporte compacto entonces la convolución siempre existe.

Sup. $K_1 = \operatorname{supp}(\ell_1)$ compacto.
$\therefore$ $x \in K_1$ está acotado.

si $x+y$ es acotado entonces
$y = (x+y) - x$ está acotado.
Así, si $x+y \in K = \operatorname{supp}(\varphi)$, K compacto y $x \in K_1$, concluimos y es acotado.

(b) Si $n=1$ $\quad \mathrm{supp}(l_1) \subset (0,\infty)$
$\mathrm{supp}(l_2) \subset (0,\infty]$

entonces $l_1 * l_2$ existe.

Si $x+y$ es acotada entonces $x+y \leq C$ con C constante. Como $x \geq 0 \Rightarrow y \leq C$. Igualmente, $x \leq C$.

$\therefore$ $x \in \mathrm{supp}(l_1)$, $y \in \mathrm{supp}(l_2)$ $\quad x+y$ acotado sólo si x, y acotados $\in [0,C]$.

$\therefore$ $l_1 * l_2$ existe.

Nota: si $\mathrm{supp}(l_1) \subset (0,\infty)$
$\mathrm{supp}(l_2) \subset (-\infty, 0)$
no necesariamente $l_1 * l_2$ existe.
Ejercicio: construir contraejemplo.

Teorema Sean $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, tales que $\mathrm{supp}(f) = A$, $\mathrm{supp}(g) = B$ satisfacen:

{ Para $x \in A$, $y \in B$, $x+y$ acotado sólo si x y y están acotados

Entonces la convolución $l_f * l_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ $(f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$ satisface:

$$l_f * l_g = l_h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ con } h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

donde $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy \quad \cdots (2)$

<u>Demostración</u>

Por definición:

$\langle l_f * l_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) f(\eta) \varphi(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta$

Por las hipótesis: $f(\eta) g(\xi) \varphi(\xi+\eta)$

$\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

con soporte compacto

$(\therefore$ la doble integral $\exists)$

En efecto: sabemos que

$\xi \in B,\ \eta \in A,\ \xi+\eta$ acotado

$\Rightarrow$ ξ acotado
η acotado

$\therefore\ f(\eta) g(\xi) \varphi(\xi+\eta) \neq 0$ solo cuando
$\eta \in A,\ \xi \in B$
y $\eta+\xi$ acotado

$\underset{\text{hipótesis}}{\Rightarrow}$ ξ acotado
η acotado

$\therefore\ f(\eta) g(\xi) \varphi(\xi+\eta)$ tiene sop. compacto
y claramente está en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $x = \xi + \eta$, $y = \xi$. $dx\,dy = d\xi\,d\eta$

y

$$\langle \ell_f * \ell_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \varphi(x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) \varphi(x)\, dx$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, \varphi(x)\, dx$$

con $h(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy$

definido c.d.s. en $\mathbb{R}^n$.

Por las hipótesis sobre A y B,
$\langle \ell_f * \ell_g, \varphi \rangle$ existe $\underline{\forall \varphi \in} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$\therefore$ $h(x)\varphi(x)$ es integrable $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$\therefore$ $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Además, $\langle \ell_f * \ell_g, \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle$

Notación: $\langle \ell_f * \ell_g, \varphi \rangle = \langle f * g, \varphi \rangle$

$\square$

Ejemplos :

(A) $\delta * \ell = \ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

δ es la unidad de la convolución.

$\delta * \ell$ siempre existe ya que
$supp(\delta) = \{0\}$ compacto.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\langle \delta * \ell, \varphi \rangle = \langle \delta_y \otimes \ell_x, \varphi(x+y) \rangle$$
$$= \langle \ell_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle$$
$$= \langle \ell_x, \varphi(x) \rangle = \langle \ell, \varphi \rangle$$

$$\therefore \quad \delta * \ell = \ell$$

Si $\ell = \ell_f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,\delta(y)\,dy$$

(B) Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, fijos.

$$\delta_{(a)} * \delta_{(b)} = \delta_{(a+b)}$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \delta_{(a)} * \delta_{(b)}, \varphi \rangle = \langle \delta_{(a)_x} \otimes \delta_{(b)_y}, \varphi(x+y) \rangle$$
$$= \langle \delta_{(b)_y}, \langle \delta_{(a)_x}, \varphi(x+y) \rangle\rangle$$

$= \langle \delta_{(b)y}, \varphi(a+y) \rangle = \varphi(a+b)$

(c) Sean $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

entonces $\delta' * \ell = \ell'$

$$\langle \delta' * \ell, \varphi \rangle = \langle \delta'_x \otimes \ell_y, \varphi(x+y) \rangle$$
$$= \langle \ell_y, \langle \delta'_x, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$
$$= - \langle \ell_y, \varphi'(y) \rangle$$
$$= - \langle \ell, \varphi' \rangle$$
$$= \langle \ell', \varphi \rangle$$

$$\therefore \quad \delta' * \ell = \ell' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Análogamente: $\delta^{(m)} * \ell = \dfrac{d^m \ell}{dx^m} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\forall \ m \geq 1, \ m \in \mathbb{N}$.

Nota: $\delta' * \ell = \ell'$ aparece como

$$\int_{\mathbb{R}} \delta'(x-y) f(y)\, dy = f'(x)$$

(D) Para $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$\partial_{x_j} \delta * \ell = \partial_{x_j} \ell \quad \Rightarrow \quad D^\alpha \delta * \ell = D^\alpha \ell$

(Ejercicio)

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 , \qquad \Box = \partial_t^2 - \Delta$$

$$\Delta\delta * \ell = \Delta \ell \quad \forall \ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\Box\delta * \ell = \Box \ell \quad \forall \ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$$

Clase de Schwarz

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ clase de Schwarz ssi

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty$$

$\forall\ \alpha, \beta$ multi-índices.

Claramente $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Conjunto de funcionales lineales continuas en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Distribuciones temperadas