Lección 2.4: Transformada de Fourier. Distribuciones temperadas.

Transformada de Fourier (repaso)

Clase de Schwarz: $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ espacio de funciones ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) que decaen a cero (ellas y todas sus derivadas) cuando $|x| \to \infty$ más rápido que cualquier potencia de x.

Def. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ssi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \cdots \quad (1)$$

para cualesquiera multi-índices α, β
$\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j, \beta_j \geq 0$

Propiedades básicas:

(i) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $p = p(x)$ polinomio entonces $p(x) f(x) \to 0$ si $|x| \to \pm\infty$.

(ii) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio lineal.

(iv) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es cerrado bajo diferenciación:
$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow D^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(v) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Dem. Ejercicio $\square$

Transformada de Fourier: para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) \, dx \quad \cdots \quad (2)$$

Nota: esta definición tiene la ventaja de que $\wedge : L^2 \to L^2$ es una isometría y es un homomorfismo $\wedge : L^1 \to L^\infty$.

$\hat{f}$ bien definida: $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$

Lema 1: Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.

Dem. Por Fubini

$$(f*g)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi} f(x-y)\,dy \times e^{-2\pi i y\cdot\xi} g(y)\,dy$$

$$= \hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) \qquad \square$$

Lema 2 Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces:

(a) Si $f_a(x) = f(x+a)$ entonces $\hat{f_a}(\xi) = e^{2\pi i a\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$

(b) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertible entonces $(f\circ T)^\wedge(\xi) = |\det T|^{-1}\hat{f}((T^{-1})^*\xi)$

(c) Si T es una rotación $T^*T = TT^* = I$ entonces $(f\circ T)^\wedge(\xi) = (\hat{f}\circ T)(\xi)$.

Dem. Ejercicio $\square$

Lema 3 Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces:

(a) $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha\hat{f}(\xi) = \left((-2\pi i x)^\alpha f\right)^\wedge(\xi)$

(b) $(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$

Dem. Ejercicio $\square$

Lema 4 Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Dem. Ejercicio (usar Lema 3) $\square$

Lema 5 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$

Dem. Con el alisador de Friedrichs: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. $1 \leq p < \infty$ $\square$

Lema 6 (de Riemann-Lebesgue)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f}$ es continua y $\hat{f} \to 0$ cuando $|\xi| \to \infty$.

Dem. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ la conclusión es automática.
Por densidad: si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists\, f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \to 0$ si $j \to \infty$.

$$\therefore \left|\hat{f}(\xi) - \hat{f_j}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x) - f(x)|\, dx$$

$$= \|f_j - f\|_{L^1} \to 0$$

$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\therefore \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi) - \hat{f_j}(\xi)\right| \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \to \infty.$$

$\therefore$ $\hat{f_j}(\xi) \to \hat{f}(\xi)$ uniformemente $\square$

Lema 7 Sea $f(x) = e^{-\pi a|x|^2}$ con $a>0$. Entonces
$$\hat{f}(\xi) = a^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|\xi|^2/a}$$

Dem. Cálculo directo: usar Fubini + integral en un contorno $\subset \mathbb{C}$. $\square$

Lema 8 Si $f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx$$

Dem. Ejercicio. $\square$

Teorema de inversión

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $(\hat{f})^{\vee} = f$, donde
$$(f^{\vee})(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)\,d\xi$$

Dem. Ejercicio: usar Lemas 7 y 8 y el alisador de Friedrichs

$\square$

Corolario: $\hat{\ }$ es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema (Plancherel)
La transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se puede extender de manera única a un isomorfismo unitario de L^2 en L^2: $\hat{\ }: L^2 \longrightarrow L^2$

Dem. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$\therefore$ $\hat{f}$ se define en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por densidad.

Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $g(x) := \overline{f(-x)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Por Lema 1 (transf. de convolución) y el teo. de inversión:

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^2 \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y) g(y) \, dy \\
&= (f * g)(0) \\
&= \left((f * g)^\wedge \right)^\vee (0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)^\wedge(\xi) \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \, d\xi \\
&= \|\hat{f}\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

$\square$

Distribuciones temperadas

$\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ funcional lineal continuo en $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Def: $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funcionales lineales continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se le llama espacio de <u>distribuciones temperadas</u>. Aqui continuidad significa:

(a) $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ cuando $j \to \infty$ ssi $x^\beta D^\alpha \varphi_j \to x^\beta D^\alpha \varphi$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$ cuando $j \to \infty$, $\forall\, \alpha, \beta$ multi-indices

(b) $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ssi ℓ es lineal y además $\ell(\varphi_j) \to \ell(\varphi)$ cuando $j \to \infty$ siempre que $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.

<u>Observación</u>: Claramente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ entonces $\ell(\varphi_j) \to \ell(\varphi)$ si $j \to \infty$ siempre que $x^\beta D^\alpha \varphi_j \to x^\beta D^\alpha \varphi$ unif. en $\mathbb{R}^n$; tomando $\beta = 0$, $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
$\therefore$ $\ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Al revés <u>no</u>: $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Contraejemplo, $f(x) = e^{x^2} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ $\therefore$ $\ell_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2} \varphi(x)\, dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Pero si tomamos $\psi(x) := e^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos que

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2}\, dx = \infty$$

$\therefore$ $\ell_f \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplos:

(a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces define $\ell_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \qquad \varphi \text{ es acotada}$$

Linealidad: clara.

continuidad: Sea $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$. Así,

$$|\langle f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi_j \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\varphi(x) - \varphi_j(x))\, dx \right|$$

$$\leq \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi_j(x) - \varphi(x)|}_{\to 0 \text{ si } j \to \infty} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx}_{= \|f\|_{L^1} < \infty}$$

$$\therefore \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \left\{\begin{matrix}\ell_f \\ f\end{matrix}\right\} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

(b) Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que además satisface

$$\int_{\{|x| \leq A\}} |f(x)|\, dx \leq C A^N$$

para $A \gg 1$ suf. grande y $C, N > 0$ constantes.

Entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)|\, dx < \infty \quad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

y $\ell_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ donde

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

(ejercicio).

(c) cualquier función uniformemente acotada define una distr. temperada:

$|f(x)| \leq C \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $\quad \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)$

$\forall\ \varphi \in S'(\mathbb{R}^n)$

Caso particular: $f(x) \equiv C_0$ constante.

$\ell_{C_0} \in S'(\mathbb{R}^n)$

(Ejercicio)

Lema Sea $\ell \in S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $\partial_{x_j} \ell \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Dem. $\ell \in S'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \therefore \quad \partial_{x_j} \ell \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \partial_{x_j} \ell, \psi \rangle = (-1) \langle \ell, \partial_{x_j} \psi \rangle \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Extendiendo a $S(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \partial_{x_j} \ell, \varphi \rangle = (-1) \langle \ell, \underbrace{\partial_{x_j} \varphi}_{\in S(\mathbb{R}^n)} \rangle \qquad \forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Sea $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$ en $S(\mathbb{R}^n)$. $l \in S'(\mathbb{R}^n)$ continua $\therefore$

$$\langle \partial_{x_j} l, \varphi_m \rangle = - \langle l, \partial_{x_j} \varphi_m \rangle$$
$$\downarrow$$
$$- \langle l, \partial_{x_j} \varphi \rangle = \langle \partial_{x_j} l, \varphi \rangle$$

ya que $\partial_{x_j} \varphi_m \xrightarrow{u} \partial_{x_j} \varphi$ y todos sus derivadas, unif. en $\mathbb{R}^n$.

$$\therefore \partial_{x_j} l \in S'(\mathbb{R}^n)$$

$\square$

<u>Corolario</u> $D^\alpha l \in S'(\mathbb{R}^n)$ si $l \in S'(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ \alpha$ multi-índice.

observación: Si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ no necesariamente $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
De hecho se puede probar que

$$\varphi, \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \equiv 0 \quad \text{(ejercicio)}.$$

<u>Definición</u> Se definen la transf. de Fourier de una distribución temperada y su inversa:

$$\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{F}^{-1} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

mediante :

para cada $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}\ell, \varphi \rangle := \langle \ell, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall \; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$\langle \mathcal{F}^{-1}\ell, \varphi \rangle := \langle \ell, \check{\varphi} \rangle \qquad \text{"}$$

Están bien definidas : $\wedge, \vee : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Ejercicio : probar continuidad, $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$
entonces $\hat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$ (usar conv. unif. y propiedades de $\wedge$).

Como $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es continua

$$\langle \mathcal{F}\ell, \varphi_j \rangle = \langle \ell, \hat{\varphi}_j \rangle \longrightarrow \langle \ell, \hat{\varphi} \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}\ell, \varphi \rangle$$

<u>Ejemplos</u> :

(a) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

¿ Es $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$?

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0) \qquad \forall \; \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

δ es un funcional lineal en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
Si $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ $\left(x^\beta D^\alpha \varphi_j \xrightarrow{u} x^\beta D^\alpha \varphi \right)$
en particular $\lim_{j \to \infty} \varphi_j(0) = \varphi(0)$

$$\Rightarrow \langle \delta, \varphi_j \rangle = \varphi_j(0) \longrightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \text{ si } j \to \infty$$

concluimos que $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$

$\delta \in S'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{F}\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx$$
$$= \langle l_1, \varphi \rangle$$

$l_1 \in S'(\mathbb{R}^n)$ $\therefore$ $\mathcal{F}\delta = 1 \in S'(\hat{\mathbb{R}}^n)$

(b) $\delta \in S'(\mathbb{R})$. $\frac{d\delta}{dx} \in S'(\mathbb{R})$

$$\left\langle \mathcal{F}\frac{d\delta}{dx}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{d\delta}{dx}, \hat{\varphi} \right\rangle$$
$$= -\langle \delta, \hat{\varphi}' \rangle$$
$$= -\langle \delta, (-2\pi i x\, \varphi(x))^{\wedge}(\xi) \rangle$$
$$= -\left(\int_{\mathbb{R}} (-2\pi i x)\, \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi}\, dx \right)\Big|_{\xi=0}$$
$$= 2\pi i \int_{\mathbb{R}} x\, \varphi(x)\, dx$$
$$= 2\pi i \langle l_{\langle x \rangle}, \varphi \rangle$$

$$l_{\langle x \rangle}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} x\, \varphi(x)\, dx$$

$l_{\langle x \rangle} \in S'(\mathbb{R})$ distr. temperada asociada a la función x.

$l_{\langle x \rangle} = \mathcal{F}\frac{d\delta}{dx} \in S'(\mathbb{R})$

$\therefore \quad \mathcal{F}\,\dfrac{d\delta}{dx} = 2\pi i\, x \in S'(\mathbb{R})$

generalización :

(i) $\ell \in S'(\mathbb{R})$, $p = p(x)$ polinomio
entonces

$$\langle p\ell, \varphi\rangle := \langle \ell, p\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R})$$

Entonces, $p\ell \in S'(\mathbb{R})$ (ejercicio)

(ii) $\forall\, m \geq 0$

$$\mathcal{F}\,\frac{d^m\delta}{dx^m} = (2\pi i x)^m \in S'(\mathbb{R})$$

(inducción)

Teorema $\forall\, \ell \in S'(\mathbb{R})$ se tiene que :

(a) $\mathcal{F}\,\dfrac{d^m \ell}{dx^m} = (2\pi i \xi)^m (\mathcal{F}\ell)(\xi) \quad \forall\, m \geq 0$

(b) $\mathcal{F}\left((-2\pi i x)^m \ell\right) = \dfrac{d^m}{d\xi^m}\left(\mathcal{F}\ell(\xi)\right)$

Dem. Ejercicio : aplicar estas propiedades de $\wedge$ en $S(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Teorema $\mathcal{F}1 = \delta$ en $S'(\mathbb{R})$

Dem. Por definición, si $1 = l_1 \in S'(\mathbb{R})$ entonces

$$\left\langle \frac{d1}{dx}, \varphi \right\rangle = -\left\langle 1, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = 0$$

$\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R})$

$\therefore\ \dfrac{d1}{dx} = 0$ en $S'(\mathbb{R})$

Por teorema anterior (a):

$$\mathcal{F}\frac{d1}{dx} = \mathcal{F}0 = 0$$

y $\mathcal{F}\dfrac{d1}{dx} = 2\pi i \xi\, \mathcal{F}1$

$\therefore\ 0 = 2\pi i \xi\, \mathcal{F}1$ en $S'(\mathbb{R})$

$\therefore\ l_1 = 1 \in S'(\mathbb{R})$ es una distr. temperada tal que

$$\xi \mathcal{F}(1) = 0 \quad \text{en } S'(\mathbb{R})$$

(Recordatorio: $xl = 0$ en $\mathcal{D}'$ con $l \in \mathcal{D}'$ entonces $l = c\delta$)

$\therefore\ \mathcal{F}(1) = c\delta$ con c constante.

Para evaluar c: $\quad \varphi(\xi) = e^{-\pi\xi^2} \in \mathcal{S}_\xi(\mathbb{R})$

$$\hat{\varphi}(x) = e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}_x(\mathbb{R})$$

$$\therefore \quad \langle \mathcal{F}1, e^{-\pi\xi^2} \rangle = \langle 1, e^{-\pi x^2} \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$$

$$\therefore \quad \langle c\delta, e^{-\pi\xi^2} \rangle = 1$$

Pero $\langle \delta, e^{-\pi\xi^2} \rangle = 1 \quad \therefore \quad c \equiv 1$.

Concluimos $\mathcal{F}1 = \delta$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

<u>Corolario</u> $\mathcal{F}^{-1}1 = \delta$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

<u>Definición</u> Se dice que $\ell_j \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ converge a $\ell \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ cuando $j \to \infty$ si

$$\ell_j(\varphi) \longrightarrow \ell(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

cuando $j \to \infty$.

<u>Teorema</u> $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es cerrado bajo convergencia.

<u>Dem.</u> Análoga a la cerradura de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (Ejercicio) $\square$

Lema Si $\ell_j \to \ell$ en $S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{F}\ell_j \to \mathcal{F}\ell$ en $S'(\mathbb{R}^n)$.

Dem. $\varphi \in S(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}\ell_j, \varphi \rangle = \langle \ell_j, \hat{\varphi} \rangle \underset{\hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \langle \ell, \hat{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}\ell, \varphi \rangle$$

si $j \to \infty$

$\square$

Teorema (de inversión)

$\mathcal{F}$ es inyectivo y sobre como mapeo de $S'(\mathbb{R}^n)$ en $S'(\mathbb{R}^n)$. Además

$$(\mathcal{F})^{-1} = \mathcal{F}^{-1} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$$

Dem. Sea $\ell \in S'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}\ell = 0$.

$\therefore \langle \mathcal{F}\ell, \varphi \rangle = \langle \ell, \hat{\varphi} \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

Como $\hat{\ } : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ es un mapeo inyectivo y sobre deducimos que $\ell \equiv 0$ en $S'(\mathbb{R}^n)$.

$\therefore \mathcal{F}$ es inyectivo.

Sea $\ell \in S'(\mathbb{R}^n)$. Definimos $\Phi(\ell) \in S'(\mathbb{R}^n)$ mediante:

$$\langle \Phi(\ell), \hat{\varphi} \rangle := \langle \ell, \varphi \rangle \quad \forall \hat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$$

Es fácil verificar que Φ es lineal y continua en $S(\mathbb{R}^n)$ (es decir, $\Phi(\ell) \in S'(\mathbb{R}^n)$)

Así, si $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$,

$$< \mathcal{F}\,\Phi(\ell), \varphi > \; = \; < \Phi(\ell), \hat{\varphi} > \; = \; < \ell, \varphi >$$

Es decir, $\forall\, \ell \in S'(\mathbb{R}^n)$ existe $\Phi(\ell) \in S'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}\Phi(\ell) = \ell$ en $S'(\mathbb{R}^n)$.

$$\therefore \quad \mathcal{F} \text{ es sobre.}$$

$$\therefore \quad \mathcal{F}(S'(\mathbb{R}^n)) = S'(\mathbb{R}^n)$$

$$(\mathcal{F})^{-1} : S'(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{existe.}$$

Por el teorema de inversión:

$$< \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\ell, \varphi > \; = \; < \mathcal{F}\ell, \check{\varphi} >$$
$$= \; < \ell, (\check{\varphi})^\wedge >$$

teo. inversión $= \; < \ell, \varphi > \quad \forall\, \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\therefore \quad \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\,\ell = \ell \quad \forall\, \ell \in S'(\mathbb{R}^n)$$

Análogamente $\quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\ell = \ell \quad \forall\, \ell \in S'(\mathbb{R}^n)$

unicidad de la inversa:

$$(\mathcal{F})^{-1} = \mathcal{F}^{-1}$$

$\square$