Curso Avanzado EDPs
2021-2
Ramón G. Plaza

Lección 3.1: Espacios de Sobolev en Rn. Propiedades básicas.

Sección 3: Espacios de Sobolev

3.1 Espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

Recordatorio:

(a) $S(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$

(b) Teo. de Plancherel: $\wedge : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ es un isomorfismo unitario.
$f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$

(c) Si $\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi$ ($x^\beta D^\alpha \varphi_j \longrightarrow x^\beta D^\alpha \varphi$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta$ multi-índices) entonces $\|\varphi_j - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$ $\forall$ $1 \leq p < \infty$

Ejercicio:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j|^p \, dx \leq \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^{p(n+1)} \varphi_j(x) \right)}_{\to 0,\ j\to\infty,\ \varphi_j \xrightarrow{S} 0} \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{p(n+1)}}}_{\leq C_{n,p}}$$

Lema Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, f es una distribución temperada, es decir, $\exists$ $\ell_f \in S'(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) \, dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

Dem. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} < \infty$$

La linealidad es clara. Continuidad: sea $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \underset{(\ast)}{\Rightarrow} \varphi_j \to \varphi$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$\therefore \quad |\langle f, \varphi_j \rangle - \langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^2} \to 0$ si $j \to \infty$

$\therefore \quad \ell_f$ es continuo y $\ell_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$\square$

Notación: $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
$(L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$

Como $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es una distribución temperada entonces $D^\alpha f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Observación: definir $\partial_{x_j} f$ para $f \in L^2$ mediante convergencia de cocientes c.d.s. no es una buena idea: p. ej. $f \in L^2(I)$, $I \subset \mathbb{R}$,

$\exists\, g$ ("derivada en L^2 de f") tal que $g \in L^2(I)$ y

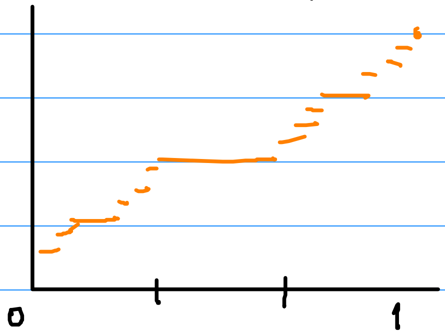
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to g \quad \text{c.d.s. en } I$$

cuando $h \to 0^+$.

Sin embargo, la función de Cantor

$F : [0,1] \to [0,1]$,

tal que para $x = \sum_i 2 \cdot 3^{-n_i}$ en el conjunto de Cantor, $F(x) := \sum 2^{-n_i}$, es continua pero no es absolutamente continua



satisface la "definición" de derivada con $g \equiv 0$

F es estrictamente monótona.

Pero, su derivada distribucional no es cero, es igual a una medida singular con respecto a la medida de Lebesgue.

Teorema Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. Entonces las sig. afirmaciones son equivalentes:

(a) (Schwartz) La derivada distribucional $\partial_{x_j} f \in S'(\mathbb{R}^n)$ está asociada a una función en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (es decir,
$$\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \forall \ \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$
para cierta función $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$).

(b) (Fourier) $\xi_j \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(c) (Newton)
$$\frac{1}{h}\Big(f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x) \Big)$$
converge en L^2 cuando $h \to 0^+$.

(d) (Friedrichs) $\exists$ una sucesión $f_m \in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_m \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\partial_{x_j} f_m$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

<u>Dem.</u> (a) $\Rightarrow$ (b) Por definición

$$\langle \partial_{x_j} \ell_f , \varphi \rangle = - \langle \ell_f , \varphi_{x_j} \rangle = \langle g, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Como $f, g \in L^2$:

$$- \langle \ell_f , \varphi_{x_j} \rangle = - \langle f, \varphi_{x_j} \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad -2\pi \int_{\mathbb{R}^n} i \xi_j \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi$$

$$\Rightarrow \quad -2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \quad \text{c.d.s. en } \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\therefore \quad \xi_j \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) : Suponiendo $\xi_j \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces podemos definir

$$\langle \ell_g , \varphi \rangle := -2\pi i \int_{\mathbb{R}^n} \xi_j \hat{f}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \, d\xi \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Se puede verificar que $\ell_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ejercicio)

Por el teorema de inversión :

$$g(x) := \left(-2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi) \right)^{\vee}(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Además, • $\langle \ell_g , \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$

• $$\langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = - \langle f, \varphi_{x_j} \rangle = - \langle \hat{f}, 2\pi i \xi_j \hat{\varphi} \rangle = \langle g, \varphi \rangle$$

concluimos que $\partial_{x_j} f \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Notación

$$D_j^h f := \frac{1}{h}\left[f(x_1, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x) \right]$$

Por demostrar : $D_j^h f$ converge en L^2 cuando $h \to 0^+$.

Por Plancherel, es suficiente demostrar que

$g_h(\xi) := (D_j^h f)^\wedge(\xi)$ converge en L^2 si $h \to 0^+$

Calculamos :

$$g_h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{1}{h}\left[f(\dots, x_j + h, \dots) - f(x) \right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \frac{1}{h} f(\dots, x_j + h, \dots)\, dx - \frac{1}{h}\hat{f}(\xi)$$

$y_j = x_j + h$
$y_k = x_k$
$j \neq k$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{h} e^{-2\pi i (y_1\xi_1 + \dots + y_j\xi_j - h\xi_j + \dots + y_n\xi_n)} f(y)\, dy - \frac{1}{h}\hat{f}(\xi)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{e^{2\pi i h\xi_j} - 1}{h\xi_j} \right)}_{\longrightarrow \left.\frac{d e^{2\pi i\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 2\pi i \text{ cuando } h\to 0^+} \xi_j \hat{f}(\xi)$$

$\therefore \quad g_h(\xi) \to 2\pi i\, \xi_j \hat{f}(\xi)$ c.d.s. en $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|g_h(\xi)| \leq 2\pi\, |\xi_j \hat{f}(\xi)|$$

Por el teo. de convergencia dominada

$$g_h \to 2\pi i\, \xi_j \hat{f} \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}^n)$$

(c) $\Rightarrow$ (a) : Ejercicio : probar que $\forall f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$D_j^h f \to \partial_{x_j} f \quad \text{en } S'(\mathbb{R}^n).$$

Sea $g \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ el límite de $D_j^h f$

por unicidad del límite $\partial_{x_j} f = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(d) $\Rightarrow$ (a) : Sea $f_m \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, con $f_m \in S(\mathbb{R}^n)$

Entonces, $f_m \to f$ en $S'(\mathbb{R}^n)$. En efecto, sea $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, entonces:

$$|\langle f_m, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_m - f||\varphi|\, dx$$

$$\leq \|f_m - f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \to 0 \text{ si } m \to \infty$$

Además, por hipótesis, $\partial_{x_j} f_m$ converge en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} \partial_{x_j} f_m = g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Así,

$$|\langle \partial_{x_j} f, \varphi\rangle - \langle g, \varphi\rangle| =$$

$$= |\langle \partial_{x_j} f, \varphi\rangle - \langle \partial_{x_j} f_m, \varphi\rangle + \langle \partial_{x_j} f_m, \varphi\rangle - \langle g, \varphi\rangle|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_m||\varphi_{x_j}|\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_j} f_m - g||\varphi|\, dx$$

$$\leq \underbrace{\|f - f_m\|_{L^2}}_{\downarrow 0} \|\varphi_{x_j}\|_{L^2} + \underbrace{\|\partial_{x_j} f_m - g\|_{L^2}}_{\downarrow 0} \|\varphi\|_{L^2}$$

$$\therefore \quad (a): \quad \partial_{x_j} f = g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$(a) \Rightarrow (d)$: Ejercicio. $\square$

Definición (espacio de Sobolev en $\mathbb{R}^n$; $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$)
Para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, se define el espacio $H^k(\mathbb{R}^n)$ como el conjunto de funciones $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ($\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) cuyas derivadas distribucionales, $D^\alpha u$, con $|\alpha| \leq k$, están asociadas a funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$H^k(\mathbb{R}^n) := \{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall |\alpha| \leq k \}$$

Teorema $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $(1+|\xi|^2)^{k/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Además las siguientes normas:

$$(*) \quad u \mapsto \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big)^{1/2}, \quad u \mapsto \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^k \, d\xi \Big)^{1/2}$$

son equivalentes.

Dem. Ejercicio: probar que ambas funciones en (*) son normas.

Por Plancherel:

$$(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$$

$$\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^2}^2 \underset{\text{Plancherel}}{=} \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 \, |(2\pi\xi)^\alpha|^2 \, d\xi$$

Basta con demostrar que $\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2$ y $(1+|\xi|^2)^k$ son "comparables", es decir, c/ una está acotada por un múltiplo de la otra.

Claramente:
- $|\xi^\alpha| \le 1$ si $|\xi| \le 1$
- $|\xi^\alpha| \le |\xi|^{|\alpha|} \le |\xi|^k$ si $|\xi| \ge 1$, $|\alpha| \le k$

Por lo cual:

$$\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|^2 \le C_1 \max(1, |\xi|^{2k}) \le C_1 (1+|\xi|^2)^k$$

para cierta $C_1 > 0$, uniforme.

Por otro lado, $|\xi|^{2k}$ y $\sum_{j=1}^n |\xi_j^k|^2$ son funciones homogéneas de grado k.

$\therefore$ se puede verificar que

$$|\xi|^{2k} \leq C_2 \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2$$

donde $$C_2 = \left(\min_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2 \right)^{-1}$$

Así,

$$\underbrace{(1+|\xi|^2)^k} \leq 2^k \max\left(1, |\xi|^{2k}\right)$$
$$\leq 2^k \left(1+|\xi|^{2k}\right)$$
$$\leq 2^k C_2 \left(1+\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^k|^2\right) \leq 2^k C_2 \underbrace{\sum_{|\alpha|\leq k} |\xi^\alpha|^2}$$

$\therefore$ las normas son equivalentes y
$u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ ssi $(1+|\xi|^2)^{k/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$\square$