Curso Avanzado EDPs

2021-2

Ramón G. Plaza

Lección 3.11: Espacio dual. Cocientes en diferencias.

Lema (desigualdad de Poincaré – versión 4)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces existe $C = C(n, p, \Omega) > 0$ tal que

$$\| u - \langle u \rangle_\Omega \|_{L^p(\Omega)} \leq C \, \| Du \|_{L^p(\Omega)} \qquad \cdots \quad (1)$$

$\forall \, u \in W^{1,p}(\Omega)$, donde

$$\langle u \rangle_\Omega := \fint_\Omega u \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx$$

(promedio de u en Ω).

Nota: También se conoce como desigualdad de Poincaré-Wirtinger.

Dem. Suponiendo (1) es falsa: $\forall \, j \in \mathbb{N}$ $\exists \, u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\| u_j - \langle u_j \rangle_\Omega \|_{L^p(\Omega)} > j \, \| Du_j \|_{L^p(\Omega)} \geq 0$$

sea

$$v_j := \frac{u_j - \langle u_j \rangle_\Omega}{\| u_j - \langle u_j \rangle_\Omega \|_{L^p(\Omega)}}$$

Entonces claramente:
- $\langle v_j \rangle_\Omega = 0 \quad \forall \, j \in \mathbb{N}$
- $\| v_j \|_{L^p(\Omega)} = 1 \quad$ N

Además,
$$Dv_j = \frac{Du_j}{\| u_j - \langle u_j \rangle_\Omega \|_{L^p(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow \quad \|Dv_j\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{j} \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ v_j es acotada en $W^{1,p}(\Omega)$. Por tRK $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, y $\exists$ subsucesión v_j tal que

$$v_j \to v \text{ en } L^p(\Omega) \text{ si } j \to \infty .$$

$$\therefore \quad \|v_j\|_{L^p(\Omega)} \equiv 1 \xrightarrow[j\to\infty]{} \|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$$

Además, $\langle v \rangle_\Omega = 0$; en efecto,

$$\left| \int_\Omega v \, dx \right| = \left| \int_\Omega v \, dx - \underbrace{\int_\Omega v_j \, dx}_{=0} \right|$$

$$\leq \int_\Omega |v - v_j| \, dx$$

Hölder $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$$\leq \left(\int_\Omega |v - v_j|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega dx \right)^{1/q}$$

$$= |\Omega|^{1/q} \, \|v - v_j\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ si } j \to \infty$$

Ω acotado.

$\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene :

$$\left| \int_\Omega v \, \partial_{x_i} \varphi \, dx \right| = \left| \int_\Omega \lim_{j\to\infty} v_j \, \partial_{x_i} \varphi \, dx \right|$$

$$= \left| - \int_\Omega \lim_{j\to\infty} \partial_{x_i} v_j \, \varphi \, dx \right|$$

$$\leq \|Dv_j\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

$$< \frac{1}{j} \|\varphi\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{si } j\to\infty$$

Por ende: Dv existe como distribución y $Dv = 0$ c.d.s. en Ω conexo.

$\Rightarrow$ $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \equiv a_0$ c.d.s. en Ω.

$\langle v \rangle_\Omega = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

contradicción con $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ $\square$

Lema Si $1 \leq p < \infty$ entonces existe $C = C(n,p) > 0$ tal que

$$(2) \ldots \quad \|u - \langle u \rangle_{B_r(x)}\|_{L^p(B_r(x))} \leq C r \|Du\|_{L^p(B_r(x))}$$

$\forall\, B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$, $\forall\, u \in W^{1,p}(B_r(x))$.

Dem. Ejercicio (cf. Evans) $\square$

Espacio dual

Recordatorio: $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ es el dual de $H^s(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, s \in \mathbb{R}$, con respecto al prod. escalar en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos $H_0^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.
Espacio de Hilbert con

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle Du, Dv \rangle_{L^2(\Omega)}$$
$$= \sum_{|\alpha| \leq 1} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \cdots (1)$$

Por el teorema de Riesz: $\forall\, l \in H_0^1(\Omega)^* \; \exists!$
$v_l \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(2) \cdots \begin{cases} \langle l, u \rangle = \langle v_l, u \rangle_{H^1(\Omega)} & \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \\ \| l \| = \| v_l \|_{H^1(\Omega)} \end{cases}$$

Esta representación no es útil.

Por ejemplo, si $f \in L^2(\Omega)$, claramente define un elemento de $H_0^1(\Omega)^*$:

$$\langle f, u \rangle = \langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

(Por Riesz: $\exists\, v_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle f, u \rangle = \langle v_f, u \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)})$$

Definición El dual de $H_0^1(\Omega)$ se denota como
$$H^{-1}(\Omega) := H_0^1(\Omega)^*$$

Análogamente, $\forall\, k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}$
$$H^{-k}(\Omega) := H_0^k(\Omega)^*$$

$\left(k=0 : \qquad L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega). \right)$

Def: [norma negativa de Lax]

Sea $f \in H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$ se define:

$$(3)\cdots \quad \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup \left\{ |\langle f,u\rangle| : u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}$$

Caracterización de $f \in H^{-1}(\Omega)$:

Teorema Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Entonces existen funciones $f^0, f^1, \dots, f^n \in L^2(\Omega)$ tales que:

$$(4)\cdots \quad \langle f,u\rangle = \int_\Omega f^0 u\, dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega f^j \partial_{x_j} u\, dx$$

$\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$. Además:

$$(5)\cdots \quad \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \left\{ \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |g^j|^2 dx \right)^{1/2} : \begin{array}{l} f \text{ satisface (4) con} \\ g^0, g^1, \dots, g^n \in L^2(\Omega) \end{array} \right\}.$$

En particular, tenemos que $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$
y $\langle f, u \rangle = \langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)}$ $\forall f \in L^2(\Omega)$
$\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Notación: Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ entonces satisface (4) y escribimos

$$f := f^0 - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f^j$$

Demostración: Sea $f \in H^{-1}(\Omega)$. Por Riesz:
$\exists !\ v_f \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle f, u \rangle = \langle v_f, u \rangle_{H^1(\Omega)} \quad \text{-- (6)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Se definen: (7) ... $\begin{cases} f^0 := v_f \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \\ f^j := \partial_{x_j} v_f \in L^2(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq j \leq n \end{cases}$

$\Rightarrow$ (4): $\langle f, u \rangle = \langle v_f, u \rangle_{H^1(\Omega)}$.

Supongamos que $f \in H^{-1}(\Omega)$ es de la forma (4) con $g^j \in L^2(\Omega)$, $0 \leq j \leq n$. Sustituyendo $u = v_f \in H_0^1(\Omega)$ en (4):

$$\langle f, v_f \rangle = \langle v_f, v_f \rangle_{H^1(\Omega)} = \|v_f\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\text{(4)} \quad = \int_\Omega g^0 v_f \, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega g^j \partial_{x_j} v_f \, dx$$

$$\text{(7)} \quad = \int_\Omega \sum_{j=0}^{n} g^j f^j \, dx$$

$$\leq \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |g^j|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx \right)^{1/2}}_{= \|v_f\|_{H^1(\Omega)}} \underset{(*)}{\leq} \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |g^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

De (4), si $u \in H_0^1(\Omega)$ con $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ obtenemos

$$|\langle f, u \rangle| = \left| \int_\Omega f^0 u \, dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega f^j \partial_{x_j} u \, dx \right|$$

$$\leq \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

Así,

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

Tomando $w := \dfrac{v_f}{\|v_f\|_{H^1(\Omega)}} \in H_0^1(\Omega)$

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$$

$$\Rightarrow |\langle f, w \rangle| \leq \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |f^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

Ahora, dado que $\forall g = (g^0, g^1, \dots, g^n)$ que satisface (4) se tiene

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \underset{(*)}{\leq} \left(\int_\Omega \sum_{j=0}^n |g^j|^2 dx \right)^{1/2}$$

entonces el ínfimo se alcanza cuando

$g^j = f^j \quad \forall \ 0 \leq j \leq n$, $\quad \left(\begin{array}{l} g^0 = f^0 = v_f \\ g^j = f^j = \partial_{x_j} v_f \end{array} \right)$

y

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \inf \{ \ '' \ \} \quad \ldots \quad (5)$$

Esto prueba (5).

Finalmente, $v \in L^2(\Omega) \Rightarrow v \in H^{-1}(\Omega)$ con

$$\langle v, u \rangle := \langle v, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

La representación es: $\quad f^0 = v \quad \in L^2(\Omega)$

$$f^j \equiv 0 \quad \forall \ 1 \leq j \leq n$$

$$\therefore \quad \langle f, u \rangle = \langle v, u \rangle = \langle v, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$\therefore \quad L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ $\qquad \blacksquare$

<u>Definición</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. $1 \leq p < \infty$.

El exp. conjugado de p es:

$$p' = \begin{cases} \infty, & \text{si } p = 1 \\ \dfrac{p}{p-1}, & \text{si } 1 < p < \infty \end{cases}$$

tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

$\forall\, k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, el dual de $W_0^{k,p}(\Omega)$ se denota como

$$W^{-k,p'}(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)^*$$

Nota: compatible con
- dual de $L^p(\Omega)$
  $L^p(\Omega)^* = L^{p'}(\Omega)$ $(k=0)$
- $H_0^k(\Omega)^* = H^{-k}(\Omega)$ $(p<2,\ p'=2)$.

Aplicando argumentos parecidos se tiene:

<u>Teorema</u> (dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$)

Sea $F \in W^{-1,p'}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)^*$, $1 \leq p < \infty$, Ω acotado. Entonces existen funciones $f^j \in L^{p'}(\Omega)$, $0 \leq j \leq n$ tales que

$$\langle F, u \rangle = \int_\Omega f^0 u \, dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega f^j \partial_{x_j} u \, dx$$

$$\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Además,
$$\|F\| = \max_{0 \leq j \leq n} \|f^j\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

<u>Dem.</u> Ejercicio (cf. Kesavan) $\square$

Observaciones:

(A) $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$
Por lo tanto, $H^{-1}(\Omega)$ es un espacio de elementos en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, si $f \in H^{-1}(\Omega)$ entonces su restricción a $\mathcal{D}(\Omega)$ es una distribución y además

$$H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

En efecto, si $f \in H^{-1}(\Omega)$ y $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ entonces $\varphi_n \to \varphi$ en $H_0^1(\Omega)$ si $n \to \infty$.

f lineal continuo en $H_0^1(\Omega) \Rightarrow f$ lineal y continuo en $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle f, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \quad \text{si } n \to \infty$$

(B) Si $f, g \in H^{-1}(\Omega)$ y $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces $f = g$.

(Por densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$).

Tenemos: $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

De hecho se tiene:

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} H_0^k(\Omega) \subset \dots \subset H_0^k(\Omega) \subset \dots \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset$$
$$\subset H^{-1}(\Omega) \subset \dots \subset H^{-k}(\Omega) \subset \dots \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} H^{-k}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

y todas las inclusiones son densas.

La dimensión importa:

(a) Si $n=1$ entonces $\delta \in H^{-1}((-a,a)) \subset \mathcal{D}'((-a,a))$ $\forall\, a>0$. En efecto,

$$\delta = \frac{dH}{dx} \quad \text{con} \quad H = H(x) \text{ Heaviside}$$

Pero claramente $H \in L^2((-a,a))$ $\forall\, a>0$.

La derivada distribucional de una función en L^2 está en H^{-1}.

$$\therefore \quad \delta \in H^{-1}((-a,a)).$$

(b) Pero si $n \geq 2$ y $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto acotado entonces $\delta \notin H^{-1}(\Omega)$.

Contraejemplo: $n=2$, $B_1(0)$.
Suponiendo que $\delta \in H^{-1}(B_1(0))$ entonces $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq C\, \|\varphi\|_{H^1(B_1(0))}$$

$C_0^\infty(B_1(0))$ denso en $H_0^1(B_1(0))$ entonces:

$$|v(0)| \leq C\, \|v\|_{H^1(B_1(0))} \quad \forall\, v \in H_0^1(B_1(0))$$

Pero esto no es cierto:

$$v(x) = (-\log|x|)^a \quad \text{con} \quad 0<a<1/2$$

$v(0) = \infty$ y se puede probar que

$$v \in H^1(B_{1/2}(0)).$$

$\therefore$ $v \in H_0^1(B_1(0))$. contradicción.

Conclusión : $\delta \notin H^{-1}(B_1(0))$.

El siguiente resultado es muy útil : relaciona elementos del dual con elementos en L^2.

<u>Teorema</u> (lema de Lions)

Sea $\Omega = \begin{cases} \mathbb{R}^n & (i) \\ \mathbb{R}^n_+ & (ii) \\ \text{abierto acotado con } \partial\Omega \in C^1 & (iii) \end{cases}$

Si $u \in H^{-1}(\Omega)$ es tal que $\partial_{x_j} u \in H^{-1}(\Omega)$ $\forall$ $1 \leq j \leq n$ entonces $u \in L^2(\Omega)$.

Esbozo de dem. :

$$X(\Omega) := \{ u \in H^{-1}(\Omega) ; \ \partial_{x_j} u \in H^{-1}(\Omega) \ \forall j \}$$

Por dem. $X(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Caso (i) : $\Omega = \mathbb{R}^n$ $\quad u, \partial_{x_j} u \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$

$$(1+|\xi|^2)^{-1/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$(1+|\xi|^2)^{-1/2}\xi_j\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{-1}(1+\sum|\xi_j|^2)|\hat{u}|^2\, d\xi$$

$$= \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

(iii) Se usa (ii) $L^2(\mathbb{R}^n_+) = \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n_+)$

$\partial\Omega \in C^1$ se aplica el mapeo local de $\partial\Omega$ a un plano.

Así $u \in \mathfrak{X}(\Omega) \Rightarrow u \in L^2(\Omega)$

(ii) caso difícil (ver Duvaut, Lions Springer)

Se usa
- reflexión de orden alto en $\mathbb{R}^n_+$
- teo. de extensión
- $L^2(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.
- Hahn - Banach. $\square$

Nota: Lions prueba que

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \partial_{x_j}u \in H^{-1}(\Omega) \Rightarrow u \in L^2(\Omega)$$

Desigualdad de Korn

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.
Sea el espacio

$$V := \left(H^1(\Omega)\right)^n \quad \cdots \quad (1)$$

$v \in V$ ssi $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $v_j \in H^1(\Omega)$. $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

$\|\cdot\|_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ son norma y prod. interno:

$$\|v\|_V = \left(\sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^2_{H^1(\Omega)} \right)^{1/2}$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j, v_j \rangle_{H^1(\Omega)}$$

Se define el tensor: para cada par $1 \leq i, j \leq n$

$$\varepsilon_{ij}(v) := \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j \right) \quad \cdots \quad (2)$$

$$\forall\, v \in V, \quad 1 \leq j, i \leq n.$$

<u>Teorema</u> (desigualdad de Korn)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Entonces $\exists\ C = C(\Omega) > 0$ tal que:

(3) ...
$$\|v\|_V^2 \leq C\left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

$\forall\, v \in V = H^1(\Omega)^n$. Aquí:

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} := \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)} := \sum_{i,j=1}^{n} \|\varepsilon_{ij}(v)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Nota: este resultado no es trivial. El lado derecho de (3) sólo involucra algunas derivadas de v.

$$\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\left(\nabla v + \nabla v^T \right)$$

parte simétrica de ∇v.

Dem. Sea el espacio:

$$E := \left\{ v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n : \varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega) \ \forall\ 1 \leq i,j \leq n \right\}$$

E es un espacio de Hilbert con respecto a la norma

$$\|v\|_E^2 := \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon(v)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

(Ejercicio.)

Aquí $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ se entiendo en sentido distribucional, es decir, existen funciones $\varepsilon_{ij}(v) \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v)\varphi \, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (v_i \partial_{x_j}\varphi + v_j \partial_{x_i}\varphi)\, dx \quad \forall\ 1 \le i,j \le n$$

Si $\{v^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ sucesión en E de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_E$ entonces existen funciones

$$v_j \in L^2(\Omega) \qquad 1 \le i,j \le n$$
$$w_{ij} \in L^2(\Omega)$$

tales que

$$v_j^{(m)} \longrightarrow v_j \quad \text{en } L^2(\Omega) \qquad m \to \infty$$
$$\varepsilon_{ij}(v^{(m)}) \longrightarrow w_{ij} \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

ya que $L^2(\Omega)$ es completo.

Así, $\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_\Omega \varepsilon_{ij}(v^{(m)})\varphi \, dx & = & \displaystyle -\frac{1}{2}\int_\Omega v_i^{(m)}\partial_j\varphi + v_j^{(m)}\partial_i\varphi \\ \downarrow & & \downarrow \\ \displaystyle\int_\Omega w_{ij}\varphi & & \displaystyle -\frac{1}{2}\int_\Omega v_i\partial_j\varphi + v_j\partial_i\varphi \end{array}$$

$$m \to \infty$$

Esto demuestra que $w_{ij} = \varepsilon_{ij}(v) = \varepsilon_{ji}(v)$.

Claramente $V = (H^1(\Omega))^n \subset E$

Por demostrar $E \subset V$.

Sea $v \in E$. Entonces para cualquiera $1 \leq i, j, k \leq n$ se tiene :

- $\partial_{x_k} v_i \in H^{-1}(\Omega)$
- $\partial_{x_j}(\partial_{x_k} v_i) = \partial_{x_j} \varepsilon_{ik}(v) + \partial_{x_k} \varepsilon_{ij}(v)$
$- \partial_{x_i} \varepsilon_{jk}(v) \in H^{-1}(\Omega)$

Por el lema de Lions :

$$\left.\begin{array}{l} \partial_{x_j}(\partial_{x_k} v_i) \in H^{-1}(\Omega) \\ \partial_{x_k} v_i \in H^{-1}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \partial_{x_k} v_i \in L^2(\Omega) \\ \forall\ 1 \leq i, k \leq n \end{array}$$

Esto implica $v \in (H^1(\Omega))^n = V$

$\Rightarrow E = V$

Así, el mapeo identidad

$$i : (V, \|\cdot\|_V) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_E)$$

es inyectivo, continuo $(\|v\|_E \leq c\|v\|_V)$ y suprayectivo (por $E = V$).

Por el teorema del mapeo abierto,

$$i^{-1}: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (V, \|\cdot\|_V)$$

también es continuo, es decir, $\exists\, C>0$ tal que

$$\|v\|_V \leq C \|v\|_E \Rightarrow \underline{\underline{\text{Korn}}}.$$

$\square$

Cocientes en diferencias

Idea: aproximar derivadas débiles mediante cocientes en diferencias

$$\partial_{x_j} v \approx \frac{v(x+h\hat{e}_j) - v(x)}{h}$$

$v \in H^1(\Omega) \longrightarrow v \in H^2(\Omega)$

sol. débil $\qquad$ sol. fuerte

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ con $V \subset\subset \Omega$. El i-cociente de tamaño h es:

$$D_i^h u(x) := \frac{u(x+h\hat{e}_i) - u(x)}{h}$$

$\forall\, 1 \leq i \leq n$, $x \in V$, $h \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial\Omega)$. Asimismo,

$$D^h u(x) := \begin{pmatrix} D_1^h u(x) \\ \vdots \\ D_n^h u(x) \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

(a) Suponiendo $1 \leq p < \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$

Entonces $\forall\ V \subset\subset \Omega$ se tiene

$$\| D^h u \|_{L^p(V)} \leq C \, \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$

con $C > 0$ const. y $\forall\, h \in \mathbb{R}$ tal que

$0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$

(b) Si $1 < p < \infty$, $u \in L^p(V)$ y $D^h u$ es uniformemente acotado en $L^p(V)$,

$$\| D^h u \|_{L^p(V)} \leq \bar{C}$$

$\forall\ 0 < |h| < \frac{\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)}{2}$ entonces

$u \in W^{1,p}(V)$ con $\| Du \|_{L^p(V)} \leq \bar{C}$.

Nota: (b) no se cumple si $p = 1$.

<u>Dem.</u> (a) $\forall\ x \in V$, $1 \leq i \leq n$,

$0 < |h| < \frac{1}{2} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$ se tiene :

$$u(x+h\hat{e}_i) - u(x) = h\int_0^1 \partial_{x_i} u(x+sh\hat{e}_i)\,ds$$

$$\Rightarrow \quad |u(x+h\hat{e}_i) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |Du(x+s\hat{e}_i h)|\,ds$$

Así,

$$\int_V |D^h u|^p dx \leq c \int_V \int_0^1 \sum_{i=1}^n |Du(x+sh\hat{e}_i)|^p ds\,dx$$

$$\leq \tilde{C} \int_\Omega |Du|^p\,dx$$

Por el teo. de aproximación local ($\bar{V}$ compacto) la desigualdad es válida $\forall\ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$\Rightarrow$ (a)

(b): Sea $\varphi \in C_c^\infty(V)$. Para $|h| \ll 1$:

$$\int_V \frac{u(x)}{h}\left(\varphi(x+h\hat{e}_i) - \varphi(x)\right) dx$$

$$= -\int_V \frac{u(x)\varphi(x)}{h}\,dx + \int_V u(x)\frac{(\varphi(x+h\hat{e}_i))}{h}\,dx$$

$$\underset{y = x+h\hat{e}_i}{=} -\int_V \frac{u(x)\varphi(x)}{h}\,dx + \int_V \frac{u(y-h\hat{e}_i)\varphi(y)}{h}\,dy$$

$$= -\int_V \left(\frac{u(x) - u(x-h\hat{e}_i)}{h}\right)\varphi(x)\,dx.$$

Así,

$$\int_V u(D_i^h \varphi)\,dx = -\int_V (D_i^{-h} u)\varphi\,dx$$

Recordatorio: $X^{**} = X$, sup $\{u_n\} \subset X$ acotada $\exists$ subsuc. u_{n_j} tal que $u_{n_j} \rightharpoonup u \in X$

$$\forall \ell \in X^*: \langle \ell, u_{n_j} \rangle \to \langle \ell, u \rangle \quad j \to \infty$$

$$L^p(\Omega)^* = L^{p'}(\Omega)$$

$1 < p < \infty \Rightarrow L^p(\Omega)$ es reflexivo.

La estimación

$$\sup_{0<|h|<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(V,\partial\Omega)} \| D_i^{-h} u \|_{L^p(V)} < \infty$$

implica que $\exists$ $v_i \in L^p(V)$ y una subsucesión $h_j \to 0$ tal que

$$D_i^{-h_j} u \rightharpoonup v_i \quad \text{débilmente en } L^p(V)$$

Así, por convergencia débil:

$$\int_V u\,\partial_{x_i}\varphi\,dx = \lim_{h_j \to 0} \int_\Omega u\, D_i^{h_j}\varphi\,dx$$

$$= -\lim_{h_j \to 0} \int_V D_i^{-h_j} u \, \varphi \, dx$$

$$= -\int_V v_i \varphi \, dx$$

$$= -\int_\Omega v_i \varphi \, dx$$

Es decir, $v_i = \partial_{x_i} u$ en sentido débil

con $v_i \in L^p(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad Du \in L^p(\Omega)$$

$$\therefore \quad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

$$\Rightarrow (b)$$

$\square$

<u>Teorema</u> (caso $p < \infty$)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.
Entonces, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es Lipschitz continua si y sólo si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

<u>Dem.</u> Ejercicio (Evans)

$\square$