Lección 3.2: Completez. Lema de Sobolev.

Se definió para $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, el espacio de Sobolev

$$H^k(\mathbb{R}^n) := \{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \forall \ |\alpha| \leq k \}$$

$D^\alpha u$ = derivada distribucional de $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Extensión: reemplazar $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ por $s \in \mathbb{R}$.
Si $u = u(\xi)$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) tal que

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} u(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

para cierto $s \in \mathbb{R}$, entonces u define una distribución temperada: $\forall \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \ell_u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2} u(\xi) \underbrace{\frac{\varphi(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \, d\xi$$

está bien definido ($u\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$).

La linealidad es obvia. La continuidad se deduce de

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow (1+|\xi|^2)^{-s/2} \varphi_j(\xi) \downarrow (1+|\xi|^2)^{-s/2} \varphi(\xi) \text{ si } j \to \infty$$

Dado que $\mathcal{F}: S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ podemos definir

$$\|u\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$$

y $H^s(\mathbb{R}^n) := \{ u \in S'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}u = \hat{u}$ es una función y $\|u\|_{H^s} < \infty \}$ ... (1)

Recordemos que si $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$ entonces $\mathcal{F}u = \hat{u}$ en $S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{u}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$$

La norma $\|\cdot\|_{H^s}$ es la norma de Sobolev de orden $s \in \mathbb{R}$.

Corolario
- $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$
- $H^s(\mathbb{R}^n) = H^k(\mathbb{R}^n)$ cuando $s = k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$.

Dem. Ejercicio. $\square$

Usando mismos argumentos del teorema de equivalencia (lección pasada) tenemos :

<u>Teorema</u> Sean $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $D^\alpha u \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, y las normas

$$u \mapsto \|u\|_{H^s}, \quad y \quad u \mapsto \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^2_{H^{s-k}} \right)^{1/2}$$

son equivalentes. En particular, cuando $|\alpha| \leq k$, D^α es un operador acotado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

<u>Dem.</u> Ejercicio $\square$

<u>Teorema</u> Para todo $s \in \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

<u>Dem.</u> Sean $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $R > 0$. Se define $u_R = u_R(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, mediante su transformada de Fourier:

$$\hat{u}_R(\xi) := \chi_{\{|\xi| \leq R\}} \hat{u}(\xi)$$

Por lo tanto:

$$\|u - u_R\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi) - \hat{u}_R(\xi)|^2 \, d\xi$$
$$= \int_{|\xi| \geq R} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$$

Por definición de H^s, el integrando está en L^1. Así, la sucesión

$$f_R(\xi) := |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)}(\xi)$$

está en $L^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall R>0$, y dominada por $|\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el teorema de convergencia dominada:

$$\lim_{R\to\infty} \|u-u_R\|_{H^s}^2 = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_R(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\lim_{R\to\infty} f_R(\xi)}_{=0}\, d\xi$$

$$= 0$$

Así, dado $\delta>0$ escogemos $R>0$ tal que

$$\|u-u_R\|_{H^s} < \frac{\delta}{3}$$

Sea η_ε el alisador de Friedrichs. Definimos v_ε mediante el alisamiento de $\hat{u}_R$:

$$\hat{v}_\varepsilon(\xi) := (\eta_\varepsilon * \hat{u}_R)(\xi)$$

Así, $\operatorname{supp}(\hat{v}_\varepsilon) \subset \{|\xi| < 1+R\}$, $\hat{v}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (tiene soporte compacto) y $v_\varepsilon \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Además,

$$(2)\ldots \quad \|v_\epsilon - u_R\|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \,|\eta_\epsilon * \hat{u}_R - \hat{u}_R|^2 \,d\xi$$
$$\leq (1+(1+R)^2)^s \int_{\{|\xi|\leq 1+R\}} |\eta_\epsilon * \hat{u}_R - \hat{u}_R|^2 \,d\xi$$

ya que $\mathrm{supp}(\hat{u}_R) \subset \{|\xi| \leq R\}$. El lado derecho de (2) tiende a cero cuando $\epsilon \to 0$: por propiedades del alisador $\eta_\epsilon * \hat{u}_R \to \hat{u}_R$ c.d.s. Por lo tanto, escogemos $0<\epsilon \ll 1$ tal que

$$\|v_\epsilon - u_R\|_{H^s} < \frac{\delta}{3}$$

Finalmente, sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi(0)=1$. Definimos:

$$\varphi_m(x) := \varphi\left(\frac{x}{m}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Como $\hat{v}_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y $^\vee : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tenemos que $v_\epsilon = (\hat{v}_\epsilon)^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se puede demostrar que

$$\varphi_m(x)\, v_\epsilon(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} v_\epsilon \quad \text{cuando } m \to \infty$$

(ejercicio: hay que calcular $x^\beta D^\alpha(\varphi_m(x)\, v_\epsilon(x))$ con α, β multi-índices. Dado que $\frac{x}{m} \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$ cuando $m \to \infty$, por lo tanto el único término que sobrevive es

$$\varphi\left(\frac{x}{m}\right) x^\beta D^\alpha v_\epsilon \longrightarrow \varphi(0)\, x^\beta D^\alpha v \quad \text{si } m \to \infty$$

uniformemenente ya que $v_\epsilon \in S(\mathbb{R}^n)$.)

Esto, a su vez, implica que $\varphi_m v_\epsilon \to v_\epsilon$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$, cuando $m \to \infty$:

$$\| \varphi\left(\frac{x}{m}\right) v_\epsilon - v_\epsilon \|^2_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\varphi\left(\frac{x}{m}\right) v_\epsilon(x)\right)^\wedge(\xi) - \hat{v}_\epsilon(\xi) \right|^2 \times (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$$

Por convergencia uniforme tomamos el límite bajo el signo de integración y

$$\| \varphi_m v_\epsilon - v_\epsilon \|^2_{H^s} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m \to \infty.$$

Escogemos $m \gg 1$ tal que

$$\| \varphi_m v_\epsilon - v_\epsilon \|_{H^s} < \frac{\delta}{3}$$

Por lo tanto obtenemos :

$$\| \varphi_m v_\epsilon - u \|_{H^s} \leq \| \varphi_m v_\epsilon - v_\epsilon \|_{H^s} + \| v_\epsilon - u_R \|_{H^s} + $$
$$+ \| u_R - u \|_{H^s}$$
$$< \delta$$

con $\varphi_m v_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$\square$

Observación : $\|u\|^2_{H^s} = \langle u, u \rangle_{H^s}$ con

$$\langle u, v \rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^n} u(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$$

Ejercicio: probar que $\langle \cdot , \cdot \rangle_{H^s}$ es un producto interno.

<u>Teorema</u> Para todo $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach en la norma $\|\cdot\|_{H^s}$.

<u>Corolario</u> $(H^s(\mathbb{R}^n), \langle , \rangle_{H^s})$ es de Hilbert.

<u>Dem. del teorema</u>: Por definición de $H^s(\mathbb{R}^n)$ la transf. de Fourier es un isomorfismo isométrico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ al espacio

$$\begin{cases} L^2_{\langle\xi\rangle}(\mathbb{R}^n) := L^2(\mathbb{R}^n; (1+|\xi|^2)^{s/2} d\xi) \\ \|u\|^2_{L^2_{\langle\xi\rangle}} := \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \end{cases}$$

$$\left(= \|u\|^2_{H^s}, \quad \times \text{ definición} \right)$$

Así, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ sí y sólo si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ está asociada a una función $\hat{u}(\xi)$ en $L^2_{\langle\xi\rangle}$, es decir, con $\|\hat{u}\|_{L^2_{\langle\xi\rangle}} = \|u\|_{H^s} < \infty$.

Ahora, sea $u_j \in H^s(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de Cauchy:

$$\|u_j - u_k\|^2_{H^s} = \|\hat{u}_j - \hat{u}_k\|^2_{L^2_{\langle\xi\rangle}} \to 0$$

si $j,k \to \infty$

Por lo tanto, $\hat{u}_j$ es de Cauchy en $L^2_{\langle\xi\rangle}$ completo. Así, existe $\hat{u} \in L^2_{\langle\xi\rangle}$ tal que $\hat{u}_j \to \hat{u}$ en $L^2_{\langle\xi\rangle}$ si $j \to \infty$.

Claramente, $\hat{u} \in L^2_{\langle\xi\rangle}$ implica que $\hat{u} \in S'(\mathbb{R}^n)$, con $\|\hat{u}\|_{L^2_{\langle\xi\rangle}} < \infty$.

Por lo tanto, concluimos que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.
Además, $\|u - u_j\|_{H^s} = \|\hat{u} - \hat{u}_j\|_{L^2_{\langle\xi\rangle}} \to 0$ si $j \to \infty$

$\therefore$ $H^s(\mathbb{R}^n)$ es completo $\forall s \in \mathbb{R}$

$\square$

Ejemplos:

(A) Sean $n=1$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi x} \sin(2\pi x)$

Se puede verificar que $f(x) = \left(\chi_{[-1,1]}(\xi)\right)^{\vee}(x)$

$\therefore$ concluimos que $f \in H^s(\mathbb{R})$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

Por inducción se puede verificar que $\dfrac{d^m f}{dx^m}$ decae como $\dfrac{1}{x}$ cuando $|x| \to \infty$ $\forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$

$\therefore$ $\dfrac{d^m f}{dx^m} \in L^2(\mathbb{R})$

Moraleja: las funciones en H^s no decaen "tan" rápido cuando $|x| \to \infty$.

(b) Sea $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (delta de Dirac centrada en $x=0$)

Sabemos que $\mathcal{F}\delta = 1$. Así,

$$\|\delta\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \, d\xi$$
$$= \omega_n \int_0^\infty (1+r^2)^s r^{n-1} \, dr$$

donde $\omega_n = |\partial B_1(0)|$. La integral $\exists$ ssi $s < -n/2$ (integrando $\sim r^{2s+n-1}$ para $r \gg 1$).

Por lo tanto, $\delta \in H^{-\frac{n}{2}-\epsilon}(\mathbb{R}^n)$ $\forall \epsilon > 0$

Análogamente se puede verificar

$$\frac{\partial^k \delta}{\partial x_j^k} \in H^{-\frac{n}{2}-k-\epsilon} \qquad \forall \epsilon > 0, \ \forall k, \ j = 1, \dots, n.$$

(c) Por definición $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ es una distribución temperada tal que $\mathcal{F}u = \hat{u}$ es una función en $L^2_{\langle\xi\rangle}$.

Por lo tanto $l_1 = 1 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, cuya transformada $\mathcal{F}1 = \delta$, no pertenece a ningún $H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s \in \mathbb{R}$.

Teorema Para cualesquiera $-\infty < s < t < \infty$ se tiene que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

(las inclusiones son secuencialmente continuas).

Dem. Si $u_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ cuando $j \to \infty$, entonces para cualquier M:

$$(1+|x|^2)^n (1-\Delta)^M u_j \longrightarrow 0$$

uniformemente en $\mathbb{R}^n$ cuando $j \to \infty$.

Por lo tanto $(1-\Delta)^M u_j \to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\|(1-\Delta)^M u_j\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(1-\Delta)^M u_j|^2 (1+|x|^2)^{2n}}{(1+|x|^2)^{2n}}\, dx$$

$\longrightarrow 0$ cuando $j \to \infty$, por convergencia dominada con $g(x) = (1+|x|^2)^{-2n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Tomando transformada de Fourier

$$(1+|\xi|^2)^M \hat{u}_j(\xi) \longrightarrow 0 \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n), \ \forall M$$

Es decir, $u_j \longrightarrow 0$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $s \in \mathbb{R}$.

Esto demuestra $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Si $t>s$ entonces claramente

$$\|u\|^2_{H^t} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^t \, d\xi$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi = \|u\|^2_{H^s}$$

$$\therefore \quad H^t(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

si $t>s$.

Finalmente, si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$|\langle u,\varphi\rangle| = |\langle \hat{u},\hat{\varphi}\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi)| \, (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} |\hat{\varphi}(\xi)|$$

$$\leq \|u\|_{H^s} \underbrace{\|\varphi\|_{H^{-s}}}_{<\infty}$$

Así, si $u_j \to 0$ en $H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces $u_j \to 0$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Esto demuestra $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$\square$

Dualidad

$H^s(\mathbb{R}^n)$ es de Hilbert $\Rightarrow$ es naturalmente isomorfo a su dual

$$(H^s)^* \cong H^s$$

(teo. de Representación de Riesz).

$\ell \in (H^s(\mathbb{R}^n))^* \iff \exists! \, v_\ell \in H^s$ t.q. $\ell(u) = \langle v_\ell, u\rangle_{H^s}$.

Existe, sin embargo, otro isomorfismo natural dado por el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sean $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.
Entonces,

$$\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} = (1+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi)\,(1+|\xi|^2)^{-s/2}\,\overline{\hat{v}(\xi)}$$

$$\in L^1(\mathbb{R}^n)$$

y
$$\langle u, v\rangle_{L^2} = \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} < \infty$$

El mapeo $u \mapsto \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2}$ con $v \in H^{-s}$ fijo define un funcional lineal continuo en $H^s(\mathbb{R}^n)$:

$$|\langle \hat{u}, \hat{v}\rangle_{L^2}| \leq \|u\|_{H^s}\,\|v\|_{H^{-s}}$$

La igualdad ocurre sólo si $\hat{u}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s}\hat{v}(\xi)$ y por ser $L^2(\mathbb{R}^n)$ auto-dual, todo funcional lineal continuo en $H^s(\mathbb{R}^n)$ (todo elemento de $H^s(\mathbb{R}^n)^*$) es de esta forma.

Así, tenemos:

Lema El mapeo que lleva $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ al funcional lineal continuo $u \mapsto \langle \hat{u}, \hat{v}\rangle$ define un isomorfismo isométrico entre $H^s(\mathbb{R}^n)^*$ y $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema (lema de Sobolev)

Si $s > k + \frac{1}{2}n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ entonces

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$$

y existe una constante $C = C(s,k) > 0$ tal que

$$\sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u| \leq C \|u\|_{H^s}$$

Dem. Si suponemos que $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces por el teorema de inversión:

- $D^\alpha u$ es continua
- $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha u(x)| \leq \|(D^\alpha u)^\wedge(\xi)\|_{L^1}$

Basta con probar que

$$\|(D^\alpha u)^\wedge(\xi)\|_{L^1} \leq C \|u\|_{H^s} < \infty$$

siempre que $|\alpha| \leq k$.

Por propiedades de $\wedge$: $(D^\alpha u)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$

así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi)| \, d\xi \underset{|\alpha| \leq k}{\leq} (2\pi)^k \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k/2} |\hat{u}(\xi)| \, d\xi$$

$$= (2\pi)^k \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\hat{u}(\xi)| (1+|\xi|^2)^{(k-s)/2} \, d\xi$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} (2\pi)^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} \times$$

$$\times \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k-s} \, d\xi \right)^{1/2}}$$

$$= \omega_n \int_0^\infty (1+r^2)^{k-s} r^{n-1} \, dr < \infty$$

ssi $s > k + \frac{1}{2}n$

$$\therefore \quad \| (D^\alpha u)^\wedge(\xi) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(k,s) \, \|u\|_{H^s} .$$

$\square$

<u>Corolario</u> Si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ para <u>toda</u> $s \in \mathbb{R}$ entonces $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio: el lema de Sobolev se puede refinar: si $s = k + \alpha + \frac{1}{2}n$ con $0 < \alpha < 1$ entonces $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$

Ejemplo: Sea $u(x) = e^{-2\pi|x|}$. Verificamos que

$$\hat{u}(\xi) = \frac{C}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}, \quad C \text{ constante}$$

Así, claramente, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ si $s < \frac{1}{2}n + 1$.

Sin embargo, $u \notin H^{\frac{1}{2}n+1}(\mathbb{R}^n)$ (ejercicio) lema de Sobolev garantiza que u es continua, pero no es C^1.

Teorema Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces multiplicar por φ es un operador acotado en $H^s(\mathbb{R}^n)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Dem. Por definición:

$$\mathcal{F}(\varphi u)(\xi) = (\varphi u)^\wedge(\xi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\,\hat{u}(\eta)\, d\eta$$

$(f*g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$

y ocurre también para distribuciones: si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con $\hat{u}(\xi)$ es una función (tal que $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$), entonces: $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}(\varphi u), \psi \rangle = \langle \varphi u, \hat{\psi} \rangle$$
$$= \langle u, \varphi \hat{\psi} \rangle$$
$$= \langle \hat{u}, \hat{\varphi} \psi \rangle$$
$$= \langle \hat{\varphi}\hat{u}, \psi \rangle$$
$$= \langle (\varphi * u)^\wedge, \psi \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}(\varphi * u), \psi \rangle$$

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \leq C_N (1+|\xi-\eta|^2)^{-N}$ $\forall N$

Ahora, $\forall s \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\eta|^2)^s} \leq C_s (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}, \quad \cdots (4)$$

con $C_s > 0$

Si $s>0$ entonces

$$|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta| \Rightarrow |\xi|^2 \leq 2(|\eta|^2+|\xi-\eta|^2)$$

$$\Rightarrow (1+|\xi|^2)^s \underset{s>0}{\leq} 2^s\left((1+|\eta|^2)(1+|\xi-\eta|^2)\right)^s$$

Si $s<0$ entonces intercambiamos ξ por η:

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s}\left((1+|\xi|^2)(1+|\eta-\xi|^2)\right)^{-s}$$

$$\therefore \frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\eta|^2)^s} \leq C_s\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{|s|} \Rightarrow (4).$$

Por lo tanto:

$$|(\varphi u)^\wedge(\xi)|(1+|\xi|^2)^s \leq C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s(1+|\xi-\eta|^2)^{-N}|\hat{u}(\eta)|\,d\eta$$

$$= C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\eta|^2)^s}(1+|\xi-\eta|^2)^{-N}(1+|\eta|^2)^s|\hat{u}(\eta)|\,d\eta$$

Tomando $N>|s|+n+1$ y aplicando Cauchy-Schwarz:

$$|(\varphi u)^\wedge(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{2s} \leq C\left|\int_{\mathbb{R}^n}[\dots]\,d\eta\right|^2$$

$$\underset{N>|s|+n+1}{\leq} C\left|\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi-\eta|^2)^{-(n+1)/2}\frac{(1+|\eta|^2)^s|\hat{u}(\eta)|}{(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,d\eta\right|^2$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\eta}{(1+|\xi-\eta|^2)^{n+1}}\right)}_{\leq C_1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\eta|^2)^{2s}\,|\hat{u}(\eta)|^2}{(1+|\eta-\xi|^2)^{n+1}}\,d\eta\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n}|(\varphi u)^\wedge(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{2s}\,d\xi$$

$$\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+|\eta|^2)^{2s}\,|\hat{u}(\eta)|^2}{(1+|\xi-\eta|^2)^{n+1}}\,d\eta\,d\xi$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\leq} C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\eta|^2)^{2s}\,|\hat{u}(\eta)|^2\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d\xi}{(1+|\eta-\xi|^2)^{n+1}}\right)d\eta$$

$$\leq C\,\|u\|_{H^{2s}} \qquad \forall s\in\mathbb{R}$$

Tomando $\tilde{s} = 2s$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|(\varphi u)^\wedge(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{\tilde{s}}\,d\xi \leq C\,\|u\|_{H^{\tilde{s}}}$$

$\square$

Consecuencias: los espacios de Sobolev se preservan al multiplicar por funciones cut-off suaves.

Definición Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, abierto.

Definimos: $u\in H^s_{loc}(\Omega)$ si y sólo si

$$\varphi u\in H^s(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\ \varphi\in C_0^\infty(\Omega)=\mathcal{D}(\Omega).$$

Lema $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^s_{loc}(\Omega)$, $\forall s \in \mathbb{R}$
$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

Dem. Claramente $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Por el teorema anterior, si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Concluimos que $u \in H^s_{loc}(\Omega)$ $\square$