Lección 3.3: Espacios de Sobolev en dominios arbitrarios. Teoremas de aproximación.

Sección 3.2 Espacios de Sobolev en dominios arbitrarios: sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto.

Definición Sean $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, α multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$. Se dice que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de u de orden $|\alpha|$ y se denota $v = D^\alpha u$, si

$$(1) \ldots \quad \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$.

Lema Si existe, la derivada débil es única c.d.s.

Dem. Sean $v_1, v_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que $v_1 = D^\alpha u$, $v_2 = D^\alpha u$. Entonces

$$\int_\Omega (v_1 - v_2)\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \; \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

concluimos que $v_1 = v_2$ c.d.s. $\square$

Lema Suponiendo que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivadas débiles $D^\alpha u$ $\forall$ $|\alpha| \leq k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Entonces, para cualesquiera multi-índices α y β tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$ se tiene que

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$$

$(\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n).)$

Dem Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces $D^\beta \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ y por lo tanto

$$\int_\Omega D^\alpha u \, D^\beta \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^{\alpha+\beta} \varphi \, dx$$
$$= (-1)^{|\alpha|} (-1)^{|\alpha+\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta} u \, \varphi \, dx$$
$$= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^{\alpha+\beta} u \, \varphi \, dx$$

Por definición, esto implica que $D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta} u$. Intercambiando α con β obtenemos $D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ $\square$

Lema (convergencia)

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ sucesión tal que para α multi-índice, cada u_n tiene derivada débil de orden α, $v_n := D^\alpha u_n \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $u_n \to u$ y $v_n \to v$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ entonces $v = D^\alpha u$.

Dem. Para cualquier $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega v \varphi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_n \varphi \, dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_n \, D^\alpha \varphi \, dx$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \, D^\alpha \varphi \, dx$$

es decir, $v = D^\alpha u$. $\square$

Definición Sean $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Se define el espacio de Sobolev, $W^{k,p}(\Omega)$ como el conjunto de funciones medibles, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, en $L^1_{loc}(\Omega)$, tales que para cualquier multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe en sentido débil y $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Notación: Si $p = 2$ denotamos $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ para cualquier $k = 0, 1, \ldots$ Por ejemplo $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definición Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$, entonces definimos la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ mediante

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_\Omega |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}$$

Nota: Si $(\underbrace{X}_{\text{esp. vectorial}}, \underbrace{\mathcal{M}}_{\sigma\text{-álgebra}}, \underbrace{\mu}_{\text{medida}})$ entonces

$L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ se define como:

$$L^\infty = \{ f \text{ medible} : \|f\|_\infty < \infty \}$$

$$\|f\|_\infty := \inf \{ S_f(E) : E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0 \}$$

$$S_f(E) := \sup_{x \notin E} |f(x)|$$

X - esp. de funciones Lebesgue medibles
$\mathcal{M} = \mathcal{B}$ - σ-álgebra de Borel
μ - medida de Lebesgue, entonces se denota

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |f|$$

Ejercicio: Probar que $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ es una norma $\forall k$, $\forall\ 1 \le p \le \infty$.

<u>Definición</u> (convergencia)
(a) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Decimos que u_n converge a u en $W^{k,p}(\Omega)$ ($u_n \xrightarrow{W^{k,p}} u$) cuando $n\to\infty$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{W^{k,p}} = 0$$

(b) Decimos que $u_n \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $u_n \to u$ en $W^{k,p}(\tilde{\Omega})$ para cualquier $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$.

<u>Lema</u> Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces $\forall \alpha$ multi-índice $|\alpha| \le k$:
(a) para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
(b) Si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ con $\tilde{\Omega}$ abierto entonces $u, v \in W^{k,p}(\tilde{\Omega})$.

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$

Consecuencia: $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio <u>lineal</u> (o vectorial) de funciones.

Lema (fórmula de Leibniz)

Sean $u \in W^{k,p}(\Omega)$, α multi-índice con $|\alpha| \leq k$. Entonces, para cada $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se tiene que:

(i) $\varphi u \in W^{k,p}(\Omega)$

(ii) $D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi \, D^{\alpha-\beta} u$

donde

- $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!}$

  con $\alpha! = \alpha_1!\,\alpha_2!\,(\cdots)\,\alpha_n!$

- $\alpha \geq \beta$ ssi $\alpha_j \geq \beta_j \quad \forall j$

Dem. Por inducción sobre $|\alpha|$.

$|\alpha| = 1$ Sean $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces

$$\int_\Omega \varphi u D^\alpha \psi \, dx = \int_\Omega \left(u D^\alpha(\varphi\psi) - u (D^\alpha \varphi)\psi\right) dx$$

$$\underset{|\alpha|=1}{=} - \int_\Omega (D^\alpha u)\varphi\psi \, dx - \int_\Omega u (D^\alpha \varphi)\psi \, dx$$

$$= - \int_\Omega \psi \left[\varphi D^\alpha u + u D^\alpha \varphi\right] dx$$

es decir, $D^\alpha(\varphi u) = \varphi D^\alpha u + u D^\alpha \varphi$

Supongamos ahora que $l < k$ y que (ii) es válida $\forall \ |\alpha| \leq l$.

Tomando $|\alpha| = l+1$, entonces $\alpha = \beta + \gamma$ con $|\beta| = l$, $|\gamma| = 1$. Así, para cualquier $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \psi u D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega \psi u D^\beta (D^\gamma \varphi) \, dx$$

hip. inducción

$$= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\sigma \psi \, D^{\beta-\sigma} u \, D^\gamma \varphi \, dx$$

$$= (-1)^{|\beta|+|\gamma|} \int_\Omega \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} D^\gamma \left(D^\sigma \psi \, D^{\beta-\sigma} u \right) \varphi \, dx$$

$\rho := \sigma + \gamma$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \sum_{\sigma \leq \beta} \binom{\beta}{\sigma} \left[D^\rho \psi \, D^{\alpha-\rho} u + D^\sigma \psi \, D^{\alpha-\sigma} u \right] \varphi \, dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \left[\sum_{\sigma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\sigma} \left(D^\sigma \psi \, D^{\alpha-\sigma} u \right) \right] \varphi \, dx$$

ya que

$$\binom{\alpha}{\sigma} = \binom{\beta}{\sigma - \gamma} + \binom{\beta}{\sigma}$$

(ejercicio).

Esto prueba (ii) en orden $|\alpha| = l+1$.

$\square$

Ejemplos : Sea $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $u(x) = \dfrac{1}{|x|^\alpha}$, con $\alpha > 0$, $x \in \Omega$, $x \neq 0$

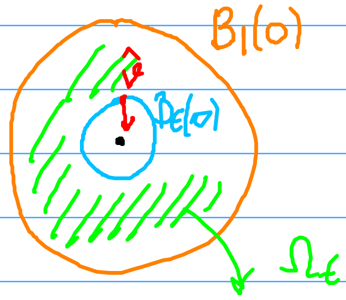
¿ Para que valores de $\alpha > 0$, n y p se tiene que $u \in W^{k,p}(\Omega)$?

Si $x \neq 0$, $\quad u_{x_j} = \dfrac{-\alpha x_j}{|x|^{\alpha+2}} \quad \forall\ 1 \le j \le n$

$$\therefore \quad |Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}$$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Sea $\epsilon > 0$, fijo.

Definimos $\Omega_\epsilon := \Omega \setminus B_\epsilon(0) = B_1(0) \setminus B_\epsilon(0)$



Entonces,

$$\int_{\Omega_\epsilon} u \varphi_{x_j}\, dx = -\int_{\Omega_\epsilon} u_{x_j} \varphi\, dx + \int_{\partial B_\epsilon(0)} u \varphi \nu_j\, dS_x$$

$$\hat{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n), \quad |\hat{\nu}| = 1$$

Si $\alpha + 1 < n$ entonces $|Du(x)| \in L^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega |Du(x)|\, dx = \int_{B_1(0)} \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}\, dx$$

$$= C\,|\alpha| \int_0^1 \frac{r^n}{r^{\alpha+1}}\, dr < \infty \quad \text{si } \alpha+1<n$$

En ese caso:

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(0)} u \varphi \nu_j\, dS_x \right| \le \sup_{B_1(0)} |\varphi| \int_{\partial B_\epsilon(0)} \epsilon^{-\alpha}\, dS_x$$

$$\le C\, \epsilon^{n-1-\alpha} \longrightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \to 0^+,\ \alpha+1<n$$

Por lo tanto:

$$\int_{B_1(0)} u \varphi_{x_j} \, dx = - \int_{B_1(0)} u_{x_j} \varphi \, dx$$

si $\alpha+1 < n$, $\alpha > 0$.

Análogamente, $|Du(x)| = \dfrac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}} \in L^p(\Omega)$

sólo si $(\alpha+1)p < n$.

Concluimos que $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ sólo si

$$0 \leq \alpha < \frac{n-p}{p}$$

$\left(\alpha+1 < \dfrac{n-p}{p} + 1 = \dfrac{n}{p} \leq n \text{ si } p \geq 1 \right)$

En particular

$$u \notin W^{1,p}(B_1(0)) \quad \text{si } p \geq n.$$

<u>Definición</u> Se define el espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ mediante

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$$

Interpretación: $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ssi $\exists$ $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$ si $n \to \infty$. En particular

- $u \in W^{k,p}(\Omega)$
- "$D^\alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega$" $\forall\, |\alpha| \leq k-1$.

Teorema (completez de $W^{k,p}(\Omega)$)

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

(a) El espacio $W^{k,p}(\Omega)$ es completo en la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

(b) El espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{k,p}(\Omega)$ (es de Banach en la misma norma).

(c) En particular, los espacios $H^k(\Omega)$ y $H_0^k(\Omega)$ son espacios de Hilbert.

Dem. (a) Sabemos que $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio lineal y $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ es una norma.

Así, si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces claramente

$$\|\lambda u\|_{W^{k,p}} = |\lambda| \, \|u\|_{W^{k,p}}$$

Además, $\|u\|_{W^{k,p}} \geq \|u\|_{L^p} \geq 0$ y la igualdad ocurre ssi $u = 0$ c.d.s.

Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$. Por la desigualdad de Minkowski:

$$\|u+v\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$$

$$\leq \left[\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\|D^\alpha u\|_{L^p} + \|D^\alpha v\|_{L^p} \right)^p \right]^{1/p}$$

Minkowski discreto: $\left(\sum |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p}$

$1 \leq p < \infty$

$$\leq \|u\|_{W^{k,p}} + \|v\|_{W^{k,p}} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty$$

Si $p = \infty$ entonces

$$\|u+v\|_{W^{k,\infty}} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} + \|D^\alpha v\|_{L^\infty}$$

$$= \|u\|_{W^{k,\infty}} + \|v\|_{W^{k,\infty}}$$

Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ una sucesión de Cauchy. Entonces, $\forall$ multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $\{D^\alpha u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\Omega)$ (por las desigualdades anteriores).

$L^p(\Omega)$ completo $\Rightarrow$ $\exists$ u, u_α tales que

$$\|u_n - u\|_{L^p} \to 0$$

si $n \to \infty$

$$\|D^\alpha u_n - u_\alpha\|_{L^p} \to 0$$

Por el lema de convergencia: $u_\alpha = D^\alpha u$

$\therefore$ $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, $\forall\ |\alpha| \leq k$

Es decir, $\|u_n - u\|_{W^{k,p}} \to 0$ si $n \to \infty$.

$u \in L^p(\Omega)$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ $\therefore$ $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

concluimos que $W^{k,p}(\Omega)$ es completo.

(b) $W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Lambda)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}}}$

es de Banach en la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$

$u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ ssi $\exists$ $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$ $\therefore$ $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

$$\therefore \begin{cases} W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Lambda) \\ (W_0^{k,p}, \|\cdot\|_{W^{k,p}}) \text{ es de Banach.} \end{cases}$$

(c) Basta con probar que

$$\langle u,v \rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2}$$

es un producto interno (ejercicio). $\square$

Teorema Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, y $1 \leq p < \infty$. Si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces:

(a) La restricción de u a cualquier conjunto abierto $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ pertenece a $W^{k,p}(\tilde{\Omega})$.

(b) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$

(c) Si $\eta \in C^k(\Omega)$ entonces $\eta u \in W^{k,p}(\Omega)$. Mas aún existe $C>0$ constante que depende de Ω y $\|\eta\|_{C^k}$ (pero no de u) tal que $\|\eta u\|_{W^{k,p}} \leq C \|u\|_{W^{k,p}}$

(d) Sea $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $h : \Omega' \longrightarrow \Omega$ una función de clase C^k, invertible, cuya matriz jacobiana tiene inversa uniformemente acotada, $|(Dh)^{-1}| \leq C$. Entonces la composición, $u \circ h \in W^{k,p}(\Omega')$. Mas aún, existe $C > 0$ constante que depende de Ω', $\|h\|_{C^k}$ (pero no de u) tal que

$$\|u \circ h\|_{W^{k,p}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

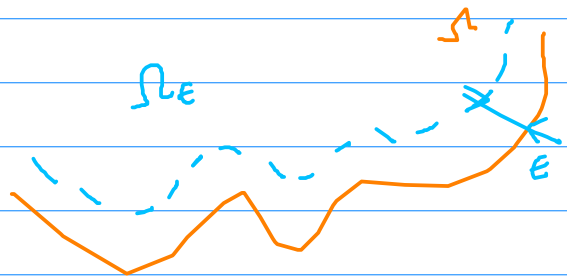
__Dem.__ Ejercicio (ver Bressan). $\square$

__Teoremas de aproximación__

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto. $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

$1 \leq p < \infty$

Para $\epsilon > 0$ $\Omega_\epsilon := \{ x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon \}$



Teorema (aproximación local por funciones suaves)

Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ y sea $u^\epsilon := \eta_\epsilon * u$, en Ω_ϵ, (alisamiento), con $\epsilon > 0$. Entonces:

(a) $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, $\forall \epsilon > 0$

(b) $u^\epsilon \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $\epsilon \to 0^+$.

Dem. (a) Se deduce de propiedades básicas del alisador de Friedrichs.

(b) Vamos a verificar que

$$D^\alpha u^\epsilon = \eta_\epsilon * D^\alpha u \quad \text{en } \Omega_\epsilon$$

para cualquier α multi-índice, $|\alpha| \leq k$.

Sea $x \in \Omega_\epsilon$. Entonces

$$D^\alpha u^\epsilon(x) = D^\alpha_x \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \int_\Omega D^\alpha_x \eta_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$\operatorname{supp} \eta_\epsilon \subset B_\epsilon(y)$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha_y \eta_\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

Para cada $x \in \Omega_\epsilon$ fijo, $\varphi(y) := \eta_\epsilon(x-y)$ es de clase $C_0^\infty(\Omega)$. Así, por definición de derivada débil:

$$D_x^\alpha u^\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y)\, D^\alpha u(y)\, dy$$
$$= (\eta_\epsilon * D^\alpha u)(x)$$

Sea $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, $\tilde{\Omega}$ abierto. ($\exists$ K compacto tal que $\tilde{\Omega} \subset K \subset \Omega$.)

Por propiedades del alisador de Friedrichs sabemos que $D^\alpha u^\epsilon \to D^\alpha u$ en $L^p(\tilde{\Omega})$ $\forall\ |\alpha| \leq k$ si $\epsilon \to 0^+$.

Por lo tanto,

$$\|u^\epsilon - u\|^p_{W^{k,p}(\tilde{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \underbrace{\|D^\alpha u^\epsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(\tilde{\Omega})}}_{\downarrow\, 0} \quad \text{si } \epsilon \to 0^+.$$

Es decir, $u^\epsilon - u \to 0$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $\epsilon \to 0^+$.

$\square$