Lección 3.4: Teoremas de aproximación (continuación). Extensiones.

Aproximación local por funciones suaves: $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces $u^\epsilon := \eta_\epsilon * u \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, $\epsilon > 0$ tal que $u^\epsilon \to u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $\epsilon \to 0^+$ (es decir, $u^\epsilon \to u$ en $W^{k,p}(\tilde{\Omega})$, $\forall \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$.)

Notas: $\forall\ u \in W^{k,p}(\Omega)$ $\exists$ $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\underbrace{u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega)}_{\text{por alisador.}}$ y $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\hat{\Omega})$ $\forall\ \hat{\Omega} \subset\subset \Omega$ $\forall\ |\alpha| \le k$.

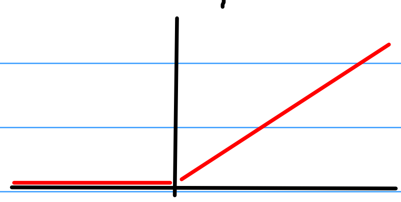
(teo. Friedrichs)

$\exists$ un resultado (teorema de Meyers-Serrin): $\forall\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, entonces $\exists$ $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $m \to \infty$ ($C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$.)

Ref. Adams, "Sobolev spaces".
Agmon.

Estos teoremas no aplican en el caso $p = \infty$.
Contraejemplo: sea $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$, sea

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$$



Claramente $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y su derivada es

$$u'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

Sea $\varphi \in C^\infty((-1,1))$ tal que $\|\varphi' - u'\|_{L^\infty} < \epsilon$ con $\epsilon > 0$. Entonces:

- si $x>0$ entonces $|\varphi'(x) - 1| < \epsilon$
- si $x<0$ " $|\varphi'(x)| < \epsilon$

Por continuidad $\varphi'(0) \begin{cases} < \epsilon \\ \geq 1-\epsilon \end{cases}$ contradicción si $\epsilon < 1/2$.

u no puede ser aproximada por funciones suaves en $W^{1,\infty}$.

Teorema (aproximación global por funciones suaves)
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $1 \leq p < \infty$. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ entonces existe una sucesión $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tales que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$.

Recordatorio: sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto tomemos $\Omega_1, \dots, \Omega_N, \dots$ cubierta abierta de K. Entonces existen funciones $\zeta_1, \dots, \zeta_N, \dots$ tales que:

- $\zeta_j \in C_0^\infty(\Omega_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$
- $0 \leq \zeta_j \leq 1$ y
- $\forall x \in K \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} \zeta_j(x) = 1.$

Demostración:

Sean $\Omega_j := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}$
$j \in \mathbb{N}$

Por lo tanto $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$

Sean $\Gamma_j := \Omega_{j+3} - \overline{\Omega_{j+1}}$ $\forall j$

y escogemos Γ_0 abierto, tal que $\Gamma_0 \subset\subset \Omega$.

Por lo tanto $\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} \Gamma_j$

ya que $\forall x \in \Omega$ $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{j+1} \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{j+3}$$

o bien, $x \in \Gamma_0 \subset \Omega$.

Sea $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ una partición de unidad asociada a la cubierta abierta $\{\Gamma_j\}_{j=0}^{\infty}$:

- $\varphi_j \in C_0^{\infty}(\Gamma_j)$ $\quad 0 \leq j$
- $0 \leq \varphi_j \leq 1$
- $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j = 1$ $\quad$ en Ω

Para cualquier función $u \in W^{k,p}(\Omega)$ sabemos que

$$\begin{cases} \varphi_j u \in W^{k,p}(\Omega), \\ \text{supp}(\varphi_j u) \subset \Gamma_j \end{cases} \quad \forall\, 0 \leq j$$

Sea $\delta>0$ fijo. Escogemos $\epsilon_j>0$ suficientemente pequeño tal que

$$u_j := \eta_{\epsilon_j} * (\zeta_j u)$$

satisface $\quad \| u_j - \zeta_j u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \dfrac{\delta}{2^{j+1}}$

$\forall\, j = 0, 1, 2, \ldots$

y además $\quad \operatorname{supp}(u_j) \subset \textcircled{H}_j \quad$ donde

$$\textcircled{H}_j := \Omega_{j+4} - \overline{\Omega_j} \supset \Gamma_j \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots$$

En efecto, la estimación se deduce del del teorema de aproximación local:

$$\| u_j - \zeta_j u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \| u_j - \zeta_j u \|_{W^{k,p}(\Gamma_j^-)}$$

$$\leq \frac{\delta}{2^{j+1}} \quad \text{arbitrariamente pequeño si } \epsilon_j \to 0^+.$$

Por otro lado sabemos que

$$\operatorname{supp}(u_j) = \operatorname{supp}(\eta_{\epsilon_j} * \zeta_j u)$$
$$\subset \Gamma_{j\epsilon_j} := \{ x \in \Gamma_j : \operatorname{dist}(x, \partial\Gamma_j) > \epsilon_j \}$$

Así, si $x \in \operatorname{supp}(u_j)$ entonces

$$x \in \Gamma_j = \Omega_{j+3} - \overline{\Omega_{j+1}} \subset \Omega_{j+4}$$

$$\therefore \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{j+4}$$

Además, $\epsilon_j < \operatorname{dist}(x, \partial\Gamma_j) < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$

$$\underset{x\in\Gamma_j}{\leq} \frac{1}{j+1} < \frac{1}{j}$$

$$\therefore \quad \operatorname{supp}(u_j) \subset \Omega_{j+4} - \overline{\Omega_j}$$

Claramente $\Gamma_j = \Omega_{j+3} - \overline{\Omega_{j+1}}$

$$\subset \Omega_{j+4} - \overline{\Omega_j}$$

ya que $\frac{1}{j+4} < \frac{1}{j+3} < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \leq \frac{1}{j+1} < \frac{1}{j}$

Por lo tanto, concluimos que $\forall\, \Gamma_0 \subset\subset \Omega$, Γ_0 abierto, existe una sucesión $u_j \in C^\infty$, $u_j = \eta_{\epsilon_j} * \xi_j u$ tales que

$$\| u_j - \xi_j u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{j+1}}$$

y $\operatorname{supp}(u_j) \subset \textcircled{H}_j$.

Ahora, sea $v := \sum_{j=0}^{\infty} u_j$.

$v \in C^\infty(\Omega)$: en efecto, dado que $\Gamma \subset\subset \Omega$ y $\exists$ K compacto tal que $\Gamma \subset K \subset \Omega$ podemos extraer una subcubierta abierta finita

$\therefore$ $\exists$ un número finito de elementos en la suma.

Dado que $u = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j u$ se tiene que

$$\|u-v\|_{W^{k,p}(\Gamma)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|u_j - \zeta_j u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$
$$\leq \delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \delta$$

Tomando el supremo sobre todos los abiertos $\Gamma \subset\subset \Omega$ obtenemos

$$\|v-u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta$$

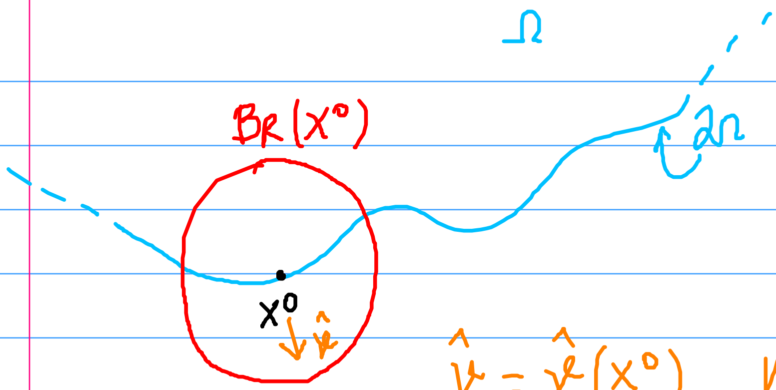
Concluimos que u se puede aproximar arbitrariamente por una función en $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$.

$\square$

Nota: no hemos requerido información sobre $\partial\Omega$. Si queremos aproximar por funciones en $C^\infty(\bar{\Omega})$ es necesario requerir cierta regularidad.

Recordatorio: $\partial\Omega$ es de clase C^r si para cada $x^0 \in \partial\Omega$ existen $R>0$ y una función $\gamma \in C^r(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R})$ tales que (módulo una reorientación de $\partial\Omega$ y un cambio de variables invertible):

$$\Omega \cap B_R(x^0) = \{ x \in B_R(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \}$$



$\hat{\nu} = \hat{\nu}(x^0)$ normal exterior unitario

"localmente" $\partial\Omega = \{ x_n = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \}$

Si $\partial\Omega$ es de clase C^1, la normal unitaria exterior en $x^0 \in \partial\Omega$ es $\hat{\nu}(x^0) = (\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_n)$ y para cada $u \in C^1(\bar{\Omega})$

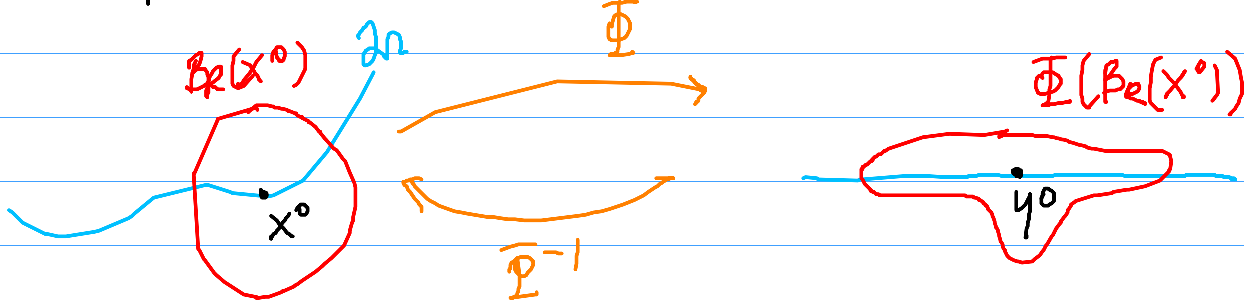
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \hat{\nu}$$

Sean $\partial\Omega \in C^r$, $x^0 \in \partial\Omega$. Se definen:

$$y_j = x_j =: \Phi^j(x), \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) =: \Phi^n(x)$$

El cambio de variables $y = \Phi(x)$ es de clase C^r, es invertible y "aplasta" la frontera:



Teorema (aproximación global por funciones suaves hasta la frontera)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y $\partial\Omega \in C^1$. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, $1 \leq p < \infty$. Entonces existe $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que

$$u_m \longrightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega) \text{ si } m \to \infty.$$

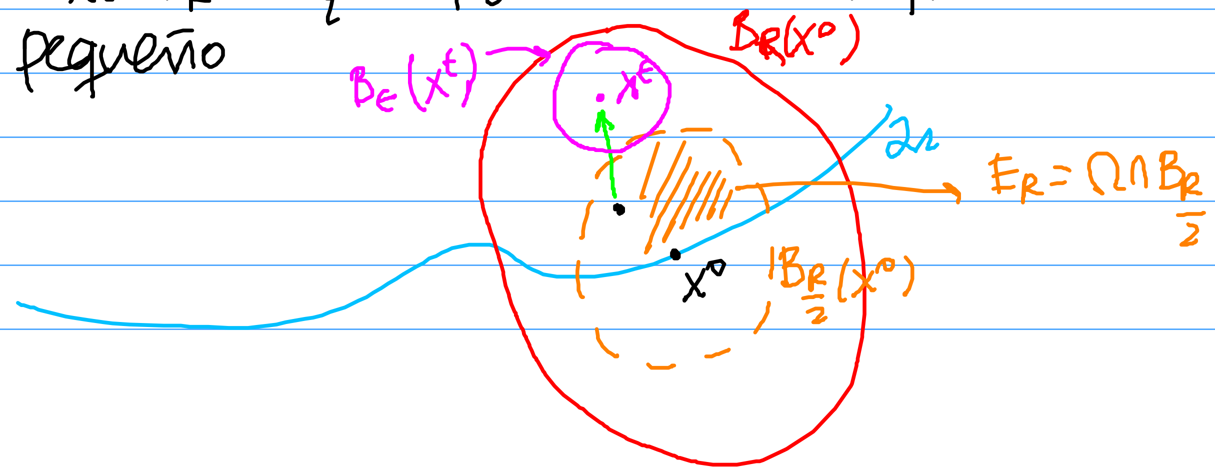
Demostración Sea $x^0 \in \partial\Omega$. Dado que $\partial\Omega \in C^1$ existe $R>0$ y una función $\gamma \in C^1$ tales que

$$B_R(x^0) \cap \partial\Omega = \left\{ x \in B_R(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots x_{n-1}) \right\}$$

Sea $E_R := \Omega \cap B_{R/2}(x^0)$. Definimos

$$x^\epsilon := x + \lambda\epsilon\, \hat{e}_n, \quad \forall\, x \in E_R,\ \epsilon > 0,\ \lambda > 0.$$

Entonces para un cierto valor $\lambda > 0$ fijo suficientemente grande, la bola $B_\epsilon(x^\epsilon)$ se queda contenida en $\Omega \cap B_R(x^0)$, para todo $x \in E_R$ y todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño



Sea $u^\epsilon(x) := u(x^\epsilon) = u(x + \lambda\epsilon\,\hat{e}_n)$
para $x \in E_R$. Sea

$$v^\epsilon := \eta_\epsilon * u^\epsilon$$

mismo $\epsilon > 0$
η_ϵ alisador de Friedrichs

Claramente $v^\epsilon \in C^\infty(\overline{E_R})$

Por demostrar: $v^\epsilon \to u$ en $W^{k,p}(E_R)$
si $\epsilon \to 0^+$.

Sea α multi-índice, $|\alpha| \le k$. Entonces

$$\| D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u \|_{L^p(E_R)} \le \| D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u^\epsilon \|_{L^p(E_R)} + \underbrace{+ \| D^\alpha u^\epsilon - D^\alpha u \|_{L^p(E_R)}}_{\to 0 \text{ si } \epsilon \to 0^+}$$

Trasladar una variable es una operación continua en L^p:

$$\| u - u^\epsilon \|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega \left| u(x) - u(x + \varepsilon\,\hat{e}_n) \right|^p dx$$

suponiendo $\varepsilon \sim 0^+$, $x + \varepsilon\,\hat{e}_n \in \Omega$
Por convergencia dominada $|w_\varepsilon| = |u - u(x + \varepsilon\,\hat{e}_n)|$
$\le 2|u|$

y el límite de w_ε es cero.

Así, $\| D^\alpha u - D^\alpha u^\epsilon \|_{L^p(E_R)} \to 0$ si $\epsilon \to 0^+$.

El primer término también tiende a cero:

$$\| D^\alpha v^\epsilon - D^\alpha u^\epsilon \|_{L^p(E_R)} \to 0 \quad \text{si } \epsilon \to 0^+$$

Ejercicio: argumento similar a la demostración de aproximación local por funciones suaves

$$v^\epsilon = \eta_\epsilon * u^\epsilon$$

$$v^\epsilon(x) = \int_{E_R} \eta_\epsilon(x-y)\, u(y + \epsilon \hat{e}_n)\, dy$$

con $\epsilon \sim 0^+$ tal que $y + \epsilon \hat{e}_n \in E_R$.

y $D^\alpha v^\epsilon \to D^\alpha u(\cdot + \epsilon \hat{e}_n)$ en $L^p(E_R)$

Así, $v^\epsilon \to u$ en $W^{k,p}(E_R)$ si $\epsilon \to 0^+$.

Sea $\delta > 0$. Ω acotado, $\partial\Omega$ es compacto y de clase C^1. Podemos hallar un número finito de puntos $x_i^0 \in \partial\Omega$, $1 \le i \le N$, y radios $R_i > 0$ tales que

$$E_{R_i} =: E_i = \Omega \cap B_{R_i/2}(x_i^0), \quad i = 1, \dots, N$$

y sus correspondientes funciones v_i^ϵ son tales que:

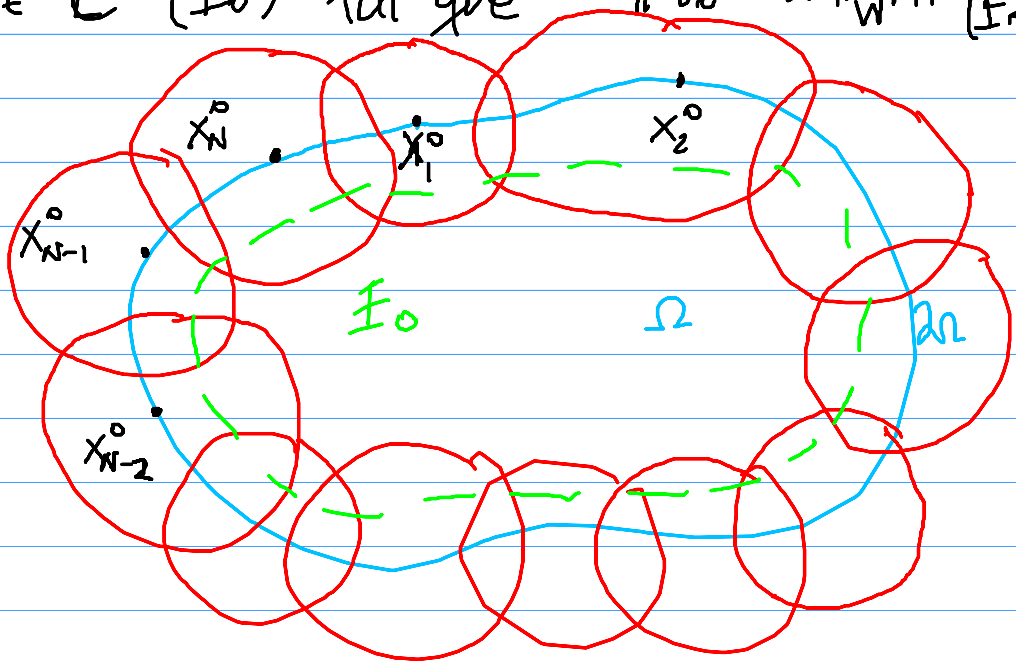
$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{R_i/2}(x_i^0)$$

y $\quad \|v_i^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(E_i)} \leq \delta \qquad \forall\, 1 \leq i \leq N.$

Sea $E_0 \subset\subset \Omega$, E_0 abierto tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{N} E_i$$

Por el teorema anterior de aproximación global (Ω acotado) existe $v_0 \in C^\infty(\overline{E_0})$ tal que $\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(E_0)} < \delta$



Sea $\{\zeta_i\}_{i=0}^{N}$ partición de unidad abiertos $\{E_i\}_{i=0}^{N}$ en Ω.

Sea $\quad v := \sum_{i=0}^{N} \zeta_i v_i^\varepsilon$

$$v_0^\varepsilon \equiv v_0$$

Entonces claramente $v \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y además dado que

$$u = \sum_{i=0}^{N} \varphi_i u$$

($\Omega \subset \cup E_i$, y $\varphi_i u$ soportado en E_i)

obtenemos

$$\| D^\alpha v - D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{N} \| D^\alpha(\varphi_i v_i^\epsilon) - D^\alpha(\varphi_i u)\|_{L^p(E_i)}$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{N} \| v_i^\epsilon - u \|_{W^{k,p}(E_i)}$$

$$\leq C(N+1)\delta$$

$\square$

Extensiones

Objetivo : extender $u \in W^{k,p}(\Omega)$ a $\tilde{u} \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{u}|_\Omega = u$.

Observación : la extensión trivial, $u \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ no funciona en general.

Sea $u \in H^1(0,\infty)$, $u(0) = a \neq 0$. Si la extensión se define como

$$Eu = \begin{cases} u(x), & x \in (0,\infty) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

tiene derivada en sentido distribucional

$$(\mathcal{E}u)' = u' + a\delta$$

se puede demostrar (ejercicio) que

$(\mathcal{E}u)' \notin L^2(\mathbb{R})$.

La extensión debe preservar las derivadas débiles a través de $\partial\Omega$.

__Teorema__ Sea $1 \leq p < \infty$, sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y con $\partial\Omega \in C^1$. Sea V un conjunto abierto tal que $\Omega \subset\subset V$ y V es __acotado__. Entonces existe un operador lineal y __acotado__

$$\mathcal{E} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que, $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$:

(a) $\mathcal{E}u = u$ c.d.s. en Ω

(b) $\mathcal{E}u$ tiene soporte contenido en V.

(c) existe $C = C(p, \Omega, V) > 0$ constante tal que

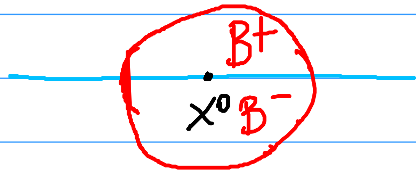
$$\|\mathcal{E}u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$\mathcal{E}u$ se denomina __una extensión__ de u a todo $\mathbb{R}^n$.

Dem. Paso 1: Caso en que $\partial\Omega$ es un plano cerca de $x^0 \in \partial\Omega$: $\exists\, B_R(x^0)$ tal que

$$B_R(x^0) \cap \partial\Omega = \{x_n = 0\}$$

$B_R(x^0) \equiv B$



Sea
$$B^+ := B_R(x^0) \cap \{x_n \geq 0\} \subset \overline{\Omega}$$
$$B^- := B_R(x^0) \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$$

Suponemos por el momento que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Entonces definimos:

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+ \\ 4\,u(x_1, \dots, x_{n-1}, -\tfrac{1}{2}x_n) + \\ \quad -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & x \in B^- \end{cases}$$

"reflexión de orden alto" de u.

Por demostrar: $\overline{u} \in C^1(B_R(x^0)) = C^1(B)$

Continuidad:
$$u^- := \overline{u}\big|_{B^-}$$
$$u^+ := \overline{u}\big|_{B^+}$$

Claramente, $u^+ = u^-$ en $x_n = 0$.

$\therefore\ \overline{u}$ es continua en $x_n = 0$.

Por definición

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

$$= \frac{\partial u^+}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$$

Claramente $\left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}\right|_{x_n=0} = \left.\frac{\partial u^+}{\partial x_j}\right|_{x_n=0}$ $j \neq n$

$$\therefore \quad \bar{u} \in C^1(B).$$

Así, $D^\alpha u^- \Big|_{x_n=0} = D^\alpha u^+ \Big|_{x_n=0}$, $\forall\, |\alpha| \leq 1$

Podemos estimar :

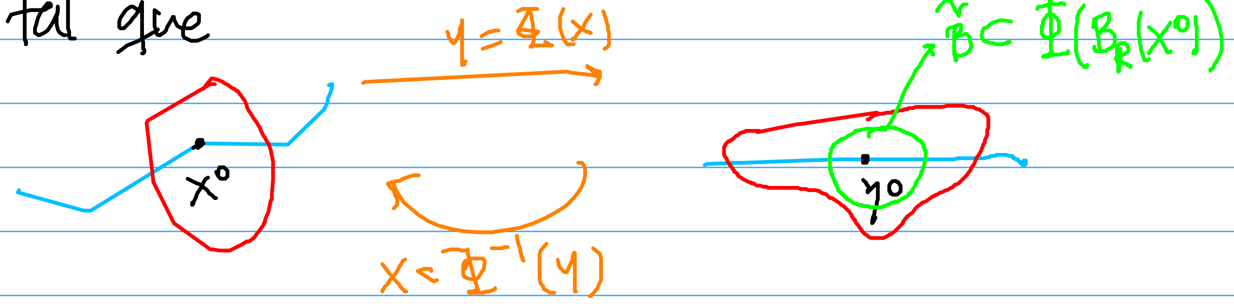
$$\|\bar{u}\|^p_{W^{1,p}(B)} = \|\bar{u}\|^p_{L^p(B^+ \cup B^-)} + \|D\bar{u}\|^p_{L^p(B^+ \cup B^-)}$$

$$\leq C\|u\|^p_{L^p(B^+)} + C\|Du\|_{L^p(B^-)}$$

$$\leq \tilde{C}\|u\|^p_{W^{1,p}(B^+)}$$

$\tilde{C}$ no depende de u.

Paso 2 : caso general, $\partial\Omega \in C^1$, podemos encontrar $y = \Phi(x)$, $\Phi \in C^1$, invertible tal que



$$\det D_x \Phi \equiv 1 \qquad \tilde{u}(y) := u(\Psi(y))$$

$$\Psi(y) = \Phi^{-1}(y) = x$$

$\Phi(B_R(x^0))$ no necesariamente una bola pero podemos hallar $\tilde{B} = \tilde{B}_r(y^0)$ tal que $\tilde{B} \subset\subset \Phi(B_R(x^0))$.

Aplicamos el procedimiento anterior (paso 1) a $\tilde{B}$: extendemos $\tilde{u}$ en $\tilde{B}^+$ a una función $\tilde{\bar{u}}$ en $\tilde{B}$ de clase C^1 tal que

$$\|\tilde{\bar{u}}\|_{W^{1,p}(\tilde{B})} \leq C \|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\tilde{B}^+)}$$

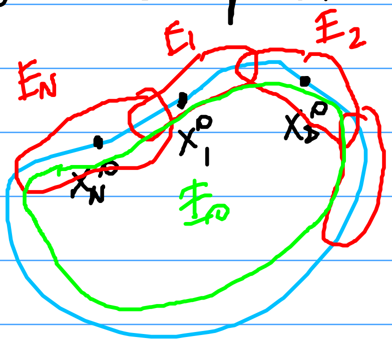
Sea $E := \Phi^{-1}(\tilde{B}) = \Psi(\tilde{B})$ abierto.

Aplicando Φ^{-1} obtenemos una extensión $\bar{u}$ en E que satisface

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(E)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Psi(\tilde{B}^+))} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$\partial\Omega$ compacta $\Rightarrow$ existen $x_j^0 \in \partial\Omega$

$E_j \ni x_j^0$



y extensiones $\bar{u}_j$

$j = 1, \dots, N$

Tomamos $E_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N} E_j$$

partición de unidad $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$

$$\bar{u} := \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \bar{u}_j, \quad \bar{u}_0 \equiv u$$

$\varphi_j \in C_0^\infty(E_j)$, $\bar{u}$ es cero fuera de $\bigcup_{j=0}^{N} E_j$

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$\operatorname{supp}(\bar{u}) \subset V := \bigcup_{j=1}^{N} E_j \supset\supset \Omega$$

$$\mathcal{E}u =: \bar{u}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E} : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ es acotado, y lineal.

Finalmente, supusimos que $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Para el caso general, sea $u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \longrightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ (por teorema de aprox. global de funciones suaves hasta $\partial\Omega \in C^1$).

Por la estimación:

$$\| \mathcal{E}(u_k - u_m) \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \| u_k - u_m \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$\therefore$ $\mathcal{E}u_m$ es sucesión de Cauchy en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ $\exists$ $\mathcal{E}u := \lim_{m \to \infty} \mathcal{E}u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y satisface la estimación.

$\square$