Lección 3.5: Extensiones (continuación). Teoremas de traza.

Corolario (extensión H^1)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces existe un operador de extensión $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$, lineal y acotado (continuo) tal que:

(a) $\mathcal{E}u = u$ c.d.s. en Ω $\quad \forall\, u \in H^1(\Omega)$.

(b) $\mathcal{E}u$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n$

(c) $\exists\ C = C(\Omega, n)$ tal que

$$\|\mathcal{E}u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|u\|_{H^1(\Omega)} \qquad \cdots (1)$$

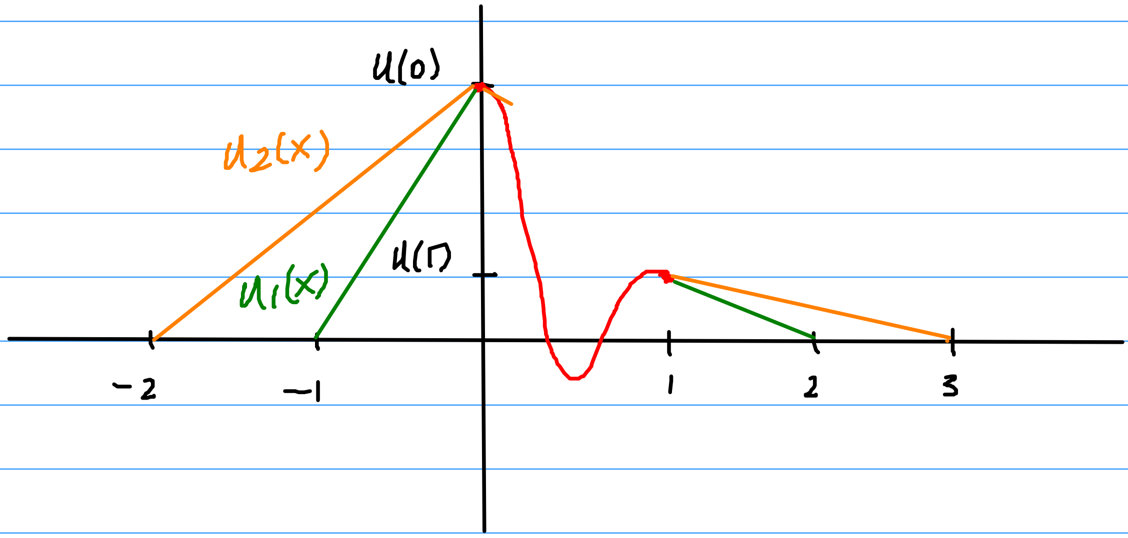
$\forall\, u \in H^1(\Omega)$.

Observaciones:

(A) El operador de extensión no es único: sea $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, sea $u \in W^{1,p}((0,1))$, $1 \leq p < \infty$. Se definen:

$$u_1(x) := \begin{cases} 0, & x \leq -1,\ x \geq 2 \\ u(0)(1+x), & -1 \leq x \leq 0 \\ u(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(1)(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$u_2(x) := \begin{cases} 0, & x \leq -2,\ x \geq 3 \\ \frac{1}{2}u(0)(x+2), & -2 \leq x \leq 0 \\ u(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}u(1)(3-x), & +1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Los operadores $\begin{cases} \mathcal{E}_j : W^{1,p}((0,1)) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{E}_j u := u_j \end{cases}$

son operadores de extensión (continuos)
$j = 1,2$

(B) El método de reflexión es muy útil.
Se puede demostrar:

Teorema Sea $\mathbb{R}^n_+ := \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0 \}$
Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \le p < \infty$. Entonces

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), & x_n \geq 0 \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

satisface $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$\mathcal{E}u := \tilde{u}$, $\mathcal{E} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$
(es un operador de extensión).

(c) El método de reflexión permite construir extensiones en dominios cuya frontera no es de clase C^1. Por ejemplo,

$$Q_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, \quad 0 < x_n < 1 \}$$

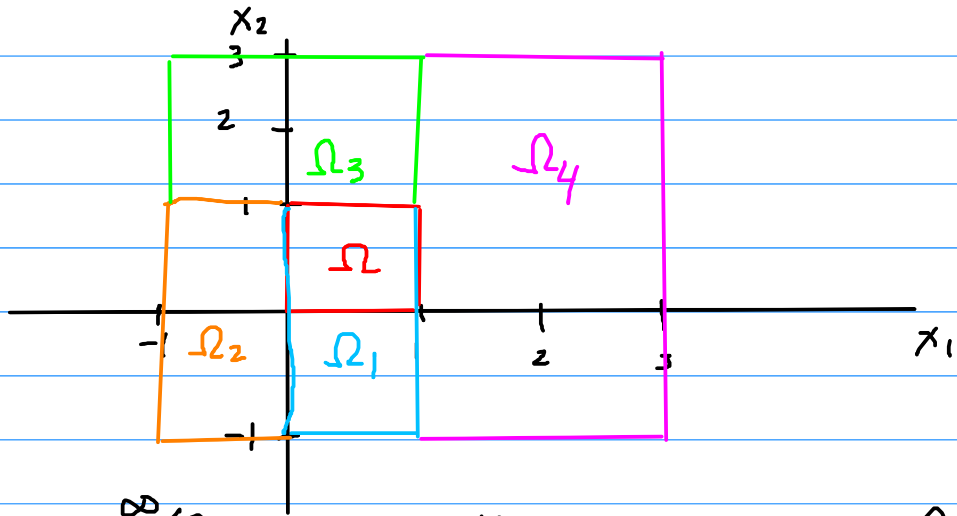
Se puede construir $\mathcal{E} : W^{1,p}(Q_+) \to W^{1,p}(Q)$ con

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1 \}$$

con reflexión con respecto al eje $x_n = 0$.

(D) Método de Brezis: aplicar sucesivamente reflexiones con respecto a porciones de frontera. Ejemplo: $\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$

Reflexión c/ resp. a $x_2 = 0 \longrightarrow \Omega_1 = (0,1) \times (-1,1)$
" $x_1 = 0 \longrightarrow \Omega_2 = (-1,1) \times (-1,1)$
" " $x_2 = 1 \longrightarrow \Omega_3 = (-1,1) \times (-1,3)$
" " $x_1 = 1 \longrightarrow \Omega_4 = (-1,3) \times (-1,3)$



Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_4)$ con $\varphi \equiv 1$ en $\Omega \subset \Omega_4$ entonces $\tilde{u} := \varphi u_4$ donde u_4 es la extensión de u a Ω_4 y $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$.

La extensión trivial de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ($u \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) no funciona.

Pero si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces la extensión trivial si funciona y es la extensión canónica:

Teorema Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $1 < p < \infty$. Para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se define

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Entonces $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y el operador

$$\begin{cases} \mathcal{E} : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{E}u := \tilde{u} \end{cases}$$

es un operador de extensión (lineal y continuo). Mas aún, $\forall\ 1 \leq j \leq n$

$$\partial_{x_j}(\mathcal{E}u) = \mathcal{E}(\partial_{x_j} u)$$

Dem. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Por definición $\exists$ $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $m \to \infty$.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\forall\ 1 \leq j \leq n$:

$$\left| \int_\Omega u_m(x)\, \varphi_{x_j}(x)\, dx \right| = \left| \int_\Omega \partial_{x_j} u_m(x)\, \varphi(x)\, dx \right|$$

Hölder
$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$1<p<\infty$

$$\leq \| \partial_{x_j} u_m \|_{L^p(\Omega)} \, \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

$$\leq \| u_m \|_{W^{1,p}(\Omega)} \, \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

Tomando $m \to \infty$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)\, \varphi_{x_j}(x)\, dx \right| = \left| \int_\Omega u(x)\, \varphi_{x_j}(x)\, dx \right|$$

$$\leq \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \, \|\varphi\|_{L^q(\Omega)}$$

Como $1<p<\infty \Rightarrow 1<q<\infty$

$\therefore$ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^q(\mathbb{R}^n)$
y por lo tanto el funcional lineal

$$\begin{cases} \varphi \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)\, \partial_{x_j} \varphi(x)\, dx =: \ell_j(\varphi) \\ \ell_j : L^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

es continuo en $L^q(\mathbb{R}^n)$: $\ell_j \in \underbrace{\left[L^q(\mathbb{R}^n) \right]^*}_{= L^p(\mathbb{R}^n)}$

Así, existe $v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases} \ell_j(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x)\, \varphi_{x_j}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} v_j(x)\, \varphi(x)\, dx \\ \| v_j \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

es una función medible tal que $\|\tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$ y además $\forall\, 1 \leq j \leq n$ $\exists\, v_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = -v_j$$

Es decir $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, dado que $\begin{cases} \partial_{x_j} \tilde{u}\,\big|_{\Omega} = \partial_{x_j} u \\ \partial_{x_j} \tilde{u}\,\big|_{\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} \equiv 0 \end{cases}$

entonces se cumple que $\partial_{x_j} \tilde{u} = \widetilde{(\partial_{x_j} u)}$ ya que $\partial_{x_j} \tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y coinciden c.d.s. en $\mathbb{R}^n$ con $\widetilde{\partial_{x_j} u}$ (excepto en $\partial\Omega$ que tiene medida cero en $\mathbb{R}^n$).

$\square$

Traza

Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ podemos aproximarla globalmente por funciones suaves en $\bar{\Omega}$ (si Ω acotado, y con frontera $\partial\Omega \in C^1$). Esto nos va a permitir asignar un valor a $u|_{\partial\Omega}$, aún cuando u restringido a un conjunto de medida cero no tiene sentido. A esto le llamamos el operador de traza.

Teorema (de traza)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, y $1 \leq p < \infty$. Entonces existe un operador

$$\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$$

lineal y acotado, tal que:
(a) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ siempre que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

(b) $$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, donde $C = C(\Omega, p, n) > 0$.

Definición Al operador $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ se le llama operador de traza y $\gamma_0 u$ es la traza de u en $\partial\Omega$.

Demostración (teo. de traza)

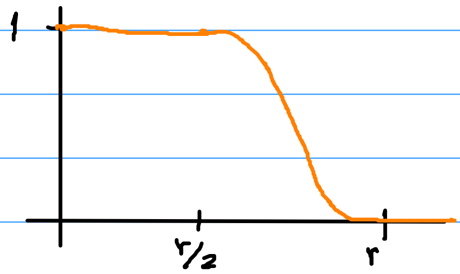
Vamos a suponer que:

- $u \in C^1(\overline{\Omega})$
- para $x^0 \in \partial\Omega$, $\partial\Omega$ es localmente un plano $\subset \{x_1 = 0\}$.

Sea $B = B_r(x^0)$ con $r > 0$ tal que $\partial\Omega$ es localmente plana en B.

Sea $\hat{B} := B_{r/2}(x^0)$. Siempre podemos hallar una función cut-off φ tal que:

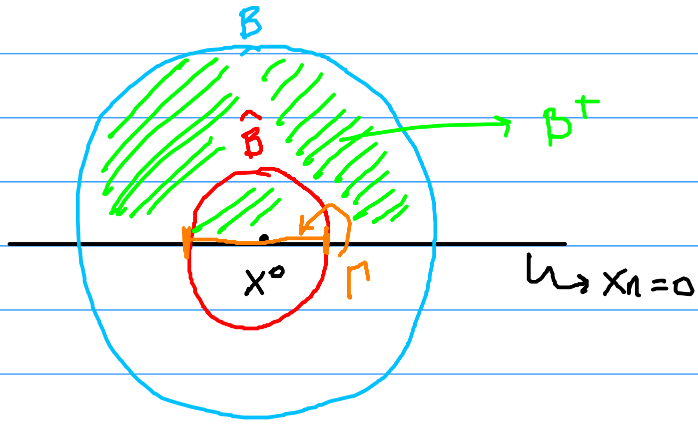
- $\varphi \in C_0^\infty(B)$
- $\varphi \geqslant 0$ en B
- $\varphi \equiv 1$ en $\hat{B}$



Sea $\Gamma = \partial\Omega \cap \hat{B}$. Sea $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Entonces

$$\int_\Gamma |u|^p \, d\tilde{x} \leqslant \int_{\{x_n = 0\}} \varphi |u|^p \, d\tilde{x}$$
$$= - \int_{B^+} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\varphi |u|^p \right) dx$$

donde $B^+ = B \cap \{x_n \geqslant 0\} \subset \overline{\Omega}$.



Claramente $\partial_{x_j} |u| = (\operatorname{sgn} u)\, u_{x_j}$

Así,

$$\int_\Gamma |u|^p dx \leq - \int_{B^+} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\varphi |u|^p \right) dx$$
$$= - \int_{B^+} \left(|u|^p \varphi_{x_n} + p|u|^{p-1} (\operatorname{sgn} u)\, u_{x_n} \varphi \right) dx$$

Por la desigualdad de Young: $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ obtenemos

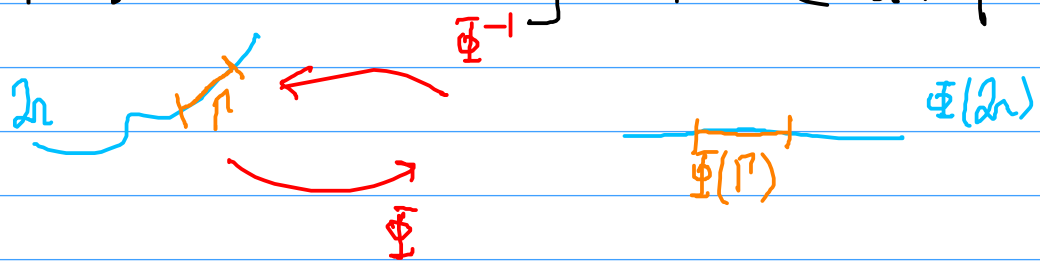
$$\left| |u|^{p-1} u_{x_n} \right| \leq \frac{1}{p} |u_{x_n}|^p + \frac{1}{q} |u|^{(p-1)q}$$

$$\leq C |Du|^p + C|u|^p$$

$(p-1)q = p$

$$\therefore \int_{\Gamma} |u|^p \, dx \leq C \int_{B^+} \left(|u|^p + |Du|^p \right) dx$$

Por un razonamiento análogo, si $\partial\Omega$ no es localmente plana $\exists$ un mapeo invertible de clase C^1 que mapea un segmento $\Gamma \subset \partial\Omega$ a un segmento de un plano:



Aplicando la transformación obtenemos

$$\int_{\Gamma} |u|^p \, dS_x \leq C \int_{\Omega} \left(|u|^p + |Du|^p \right) dx$$

$\forall$ $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ segmento abierto con $x^0 \in \partial\Omega$.

Como $\partial\Omega$ es compacto $\exists$ un conjunto finito de puntos $x_i^0 \in \partial\Omega$, $i = 1, \dots, N$ y vecindades $\Gamma_i \subset \partial\Omega$, $x_i^0 \subset \Gamma_i$ tales que

$\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i$. De este modo:

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Tomando la unión:

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

si $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Por lo tanto

$$\gamma_0 u := u|_{\partial\Omega}$$

y $\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

C no depende de u. y el operador $\gamma_0 : C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ es lineal:

$$\gamma_0(u_1 + \alpha u_2) = \gamma_0 u_1 + \alpha \gamma_0 u_2 \quad \forall\, u_1, u_2 \in C^1(\bar{\Omega}).$$

En el caso general, $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Ω acotado, $\partial\Omega \in C^1$ $\Rightarrow$ teo. aproximación global por funciones suaves hasta la frontera es aplicable.

$\therefore \exists\, u_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $u_m \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ si $m \to \infty$.

$$\|\gamma_0 u_m - \gamma_0 u_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \underbrace{\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}}_{\downarrow \; 0 \text{ si } m,k\to\infty}$$

por convergencia $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

$\therefore$ $\gamma_0 u_n$ es de Cauchy en $L^p(\partial\Omega)$ completo

Así, existe $\begin{cases} \gamma_0 u := \lim\limits_{m\to\infty} \gamma_0 u_m \text{ en } L^p(\partial\Omega) \\ \gamma_0 u \in L^p(\partial\Omega) \end{cases}$

Esta es la def. de $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$
y además

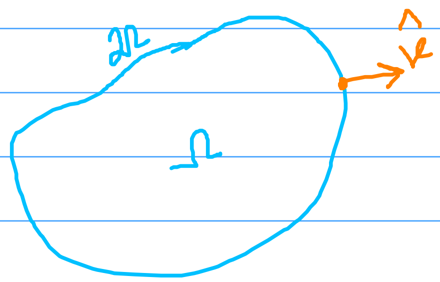
$$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1_\infty(\bar{\Omega})$ entonces la sucesión $u_m \in C(\bar{\Omega})$ converge uniformemente a u en $\bar{\Omega}$ y en ese caso $\gamma_0 u$ coincide con $u|_{\partial\Omega}(x) = \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega}} u(y)$ $\square$

<u>Corolario</u> (traza en $H^1(\Omega)$).
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto, $\partial\Omega \in C^1$
Entonces $\exists$ $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, lineal y acotado tal que:
(a) $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$
(b) $\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$ $\quad \forall u \in H^1(\Omega)$, $C>0$

Este corolario es un caso particular de un teorema más general:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto y $\partial\Omega \in C^m$, $m \geq 1$ y orientable ($\exists\ \hat{\nu}$ normal unitaria exterior en cada punto de $\partial\Omega$ que no cambia de orientación).



Claramente, si $u \in C^m(\overline{\Omega})$ entonces definimos:

$$\gamma_j u := \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega}$$

$\hat{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$

$|\hat{\nu}| = 1$

$$\forall \quad 0 \leq j \leq m-1$$

Derivadas normales en $\partial\Omega$ de orden 0 hasta $m-1$

Nota: $$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j = 1}^{n} \nu_{i_1} \nu_{i_2} \cdots \nu_{i_j} \frac{\partial^j u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}$$

$\underline{j=1}$: $$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = \nabla u \cdot \hat{\nu}$$

$\underline{j=2}$: $$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} \nu_{i_1} \nu_{i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$$

$$= \sum_{i_2=1}^{n} \nu_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\sum_{i_1=1}^{n} n_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} \right)$$

$$= \nabla(\nabla u \cdot \hat{\nu}) \cdot \hat{\nu}$$

Cada operador γ_j se puede extender por densidad a $H^m(\Omega)$.

<u>Teorema</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega \subset C^{m+1}$, orientable, $m \geq 1$.
Entonces existe un operador:

$$\Gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-1-j}(\partial\Omega)$$

lineal y acotado, tal que:

(a) $$\Gamma u =: (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$$
$$= \left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right)$$

siempre que $u \in H^m(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$.

(b) $$\|\Gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)^m} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$$

con $C = C(\Omega, m, n) > 0$ independiente de u. Aquí,

$$\|\Gamma u\|^2_{L^2(\partial\Omega)^m} = \|\gamma_0 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|\gamma_1 u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \dots + \|\gamma_{m-1} u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$u \in C^m(\overline{\Omega})$

$$= \|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \dots + \dots + \left\|\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_j u\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Mas aún, $\ker \Gamma = H_0^m(\Omega)$

$\square$

<u>Dem.</u> Pendiente (se aplicará Rellich-Kondrachov)

$\square$

Si $m=1$: $\ker \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$

<u>Teorema</u> (funciones con traza cero)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si y sólo si } \gamma_0 u = 0$$

c.d.s. en $\partial\Omega$.

<u>Dem.</u>

"$\Rightarrow$" Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Así, $\exists$ $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ si $m \to \infty$.

Dado que $\gamma_0 u_m = u_m|_{\partial\Omega} = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

γ_0 lineal y acotado:

$$0 \leq \|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} = \|\gamma_0 u - \underbrace{\gamma_0 u_m}_{=0}\|_{L^p(\partial\Omega)}$$

$$\leq C\,\|u - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\therefore$ $\gamma_0 u = 0$ c.d.s. en $\partial\Omega$.

"$\Leftarrow$" Pendiente (próxima clase).