Lección 3.6: Teorema de traza (continuación).

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n \; : \; x_n > 0 \}$ abierto.

<u>Teorema</u> Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x_1, \ldots, x_n), & x_n \geq 0 \\ u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

satisface $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\exists$ $C>0$ independiente de u tal que

$$\|\tilde{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

En particular, que el operador

$$\begin{cases} \mathcal{E} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{E}u := \tilde{u} \end{cases}$$

es un operador de extensión (lineal, acotado y $\tilde{u} = u$ en $\mathbb{R}^n_+$).

<u>Dem.</u> Ejercicio (análogo a la dem. del teorema de extensión con $\partial\Omega \in C^1$). $\square$

Definimos el conjunto:

$$C^\infty_+(\mathbb{R}^n_+) := \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \; : \; \varphi = \tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}^n_+} \text{ para cierta } \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \}$$

Es la restricción de elementos en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto $\mathbb{R}^n_+$.

Nótese que $C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+) \neq C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Corolario</u> $C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
En particular, $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

<u>Dem.</u> Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Su extensión es $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existen $\tilde{\varphi}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $\tilde{\varphi}_j \to \tilde{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ cuando $j \to \infty$

Definimos $\varphi_j(x) := \tilde{\varphi}_j(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$.
Entonces $\varphi_j \in C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Mas aún, dado que $\varphi_j = \tilde{\varphi}_j|_{\mathbb{R}^n_+}$ y $u = \tilde{u}|_{\mathbb{R}^n_+}$, concluimos que

$$\|u - \varphi_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} = \|\tilde{u} - \tilde{\varphi}_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)} \leq \underbrace{\|\tilde{u} - \tilde{\varphi}_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}_{\to\, 0 \text{ si } j \to \infty}$$

Es decir, $C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Como $C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, entonces $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. $\square$

<u>Teorema</u> (traza en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$)

Existe un operador lineal y acotado,

$$\tilde{\gamma}_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{n-1})$$

tal que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ entonces

$$\tilde{\gamma}_0 u = u|_{\{x_n = 0\}}.$$

Dem. Sea $\varphi \in C_+^\infty(\mathbb{R}_+^n)$. Notación $x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(|\varphi(\tilde{x},x_n)|^p\right) = p\,|\varphi(\tilde{x},x_n)|^{p-1}\frac{\partial}{\partial x_n}|\varphi(\tilde{x},x_n)|$$

$$= p\,|\varphi(\tilde{x},x_n)|^{p-1}\,\mathrm{sgn}(\varphi(\tilde{x},x_n))\frac{\partial\varphi(\tilde{x},x_n)}{\partial x_n}$$

Claramente φ y sus derivadas tienden a cero cuando $x_n \to +\infty$. Así,

$$|\varphi(\tilde{x},0)|^p = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n}\left(|\varphi(\tilde{x},x_n)|^p\right)dx_n$$

$$= -p\int_0^\infty |\varphi(\tilde{x},x_n)|^{p-1}\,\mathrm{sgn}(\varphi(\tilde{x},x_n))\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\tilde{x},x_n)\,dx_n$$

Young $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\leq p\left[\frac{1}{q}\int_0^\infty |\varphi(\tilde{x},x_n)|^{(p-1)q}\,dx_n + \frac{1}{p}\int_0^\infty \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\tilde{x},x_n)\right|^p dx_n\right]$$

$$\leq C\left[\int_0^\infty |\varphi(\tilde{x},x_n)|^p\,dx_n + \int_0^\infty |D\varphi(\tilde{x},x_n)|^p\,dx_n\right]$$

Integrando en $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\|\varphi(\cdot,0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\,\|\varphi\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

Esto implica que el mapeo lineal

$$\tilde{\gamma}_0\varphi := \varphi(\tilde{x},0), \quad \forall\, \varphi \in C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+),$$

es continuo en la norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.

Como $C_{+}^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, este operador se extiende continuamente a un operador

$$\tilde{\gamma}_0 : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to L^p(\mathbb{R}^{n-1})$$

que satisface $\tilde{\gamma}_0 u = u|_{\{x_n=0\}}$ si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Además,

$$\|\tilde{\gamma}_0 u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

$\forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, con $C>0$ independiente de u.

$\square$

Teorema (funciones con traza cero)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$; $1 \leq p < \infty$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{si y sólo si} \quad \gamma_0 u = 0 \ \text{c.d.s. sobre } \partial\Omega.$$

Dem. "$\Rightarrow$" [Clase pasada] ✓

"$\Leftarrow$" $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\gamma_0 u = 0$ c.d.s. sobre $\partial\Omega$.

Paso 1: suponemos que "$\partial\Omega$ es plana", es decir:

- $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$
- $\tilde{\gamma}_0 u = 0$ c.d.s. en $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{x_n = 0\}$
- u tiene soporte compacto en $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.

Dado que $\tilde{\gamma}_0 u = 0$ en $\partial \mathbb{R}^n_+ \cong \mathbb{R}^{n-1}$, entonces existen $u_m \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ tales que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ y además $\gamma_0 u_m = u_m|_{\partial \mathbb{R}^n_+} \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

En efecto, como u tiene soporte compacto entonces podemos aplicar el teorema de aproximación local (no requiere que el dominio sea acotado). Por continuidad de $\tilde{\gamma}_0$, entonces $\tilde{\gamma}_0 u_m = u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0$ en $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Sea $x = (\tilde{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n > 0$.
Entonces,

$$|u_m(\tilde{x}, x_n)| \leq |u_m(\tilde{x}, 0)| + \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} u_m(\tilde{x}, y) \right| dy$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\tilde{x}, x_n)|^p d\tilde{x} \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(\tilde{x}, 0)|^3 d\tilde{x} + \right.$$
$$\left. + \; x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du_m(\tilde{x}, y)|^p d\tilde{x}\, dy \right]$$

Tomando el límite cuando $m \to \infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\tilde{x},x_n)|^p \, d\tilde{x} = \lim_{m\to\infty} \|u_m(\cdot,x_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

$$\leq C \underbrace{\lim_{m\to\infty} \|u_m(\tilde{x},0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}}_{=0, \text{ ya que } u_m|_{\mathbb{R}^{n-1}} \to 0 \text{ en } L^p} +$$

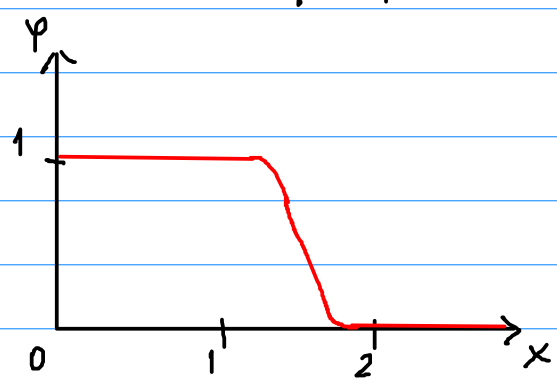
$$+ C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \lim_{m\to\infty} \|Du_m(\cdot,y)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \, dy$$

$$= C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(\tilde{x},y)|^p \, d\tilde{x} \, dy \quad \ldots (*)$$

ya que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. La desigualdad $(*)$ se cumple c.d.s. en $x_n > 0$.

Tomemos ahora una función cut-off $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) = C^\infty([0,+\infty))$ tal que :

- $\varphi \equiv 1$ en $[0,1]$
- $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}_+ \setminus [0,2]$
- $0 \leq \varphi \leq 1$



Definimos : $\begin{cases} \varphi_m(x) := \varphi(m x_n), & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ w_m(x) := u(x)\,(1-\varphi_m(x)), & x \in \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$

Entonces, $\partial_{x_n} w_m = \partial_{x_n} u\,(1-\varphi_m) - m u \varphi'(m x_n)$

$$\partial_{x_j} w_m = \partial_{x_j} u\,(1-\varphi_m), \qquad j \neq n$$

$$\Rightarrow \qquad D_{\tilde{x}} w_m = D_{\tilde{x}} u\,(1-\varphi_m)$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |Dw_m - Du|^p\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n_+} |Du(1-\varphi_m) - Du - m u \varphi'(m x_n)|^p\,dx$$

$$\leq C \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n_+} |\varphi_m|^p |Du|^p\,dx}_{=: I_1} + \underbrace{C m^p \int_{\mathbb{R}^n_+} |u \varphi'(m x_n)|^p\,dx}_{=: I_2}$$

Notamos que $I_1 \to 0$ si $m \to \infty$, ya que $\varphi_m(x) = \varphi(m x_n) \neq 0$ sólo si $0 \leq x_n \leq \frac{2}{m}$

La sucesión $|\varphi_m|^p |Du|^p \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$ está dominada por $|Du|^p \in L^1(\mathbb{R}^n_+)$, $0 \leq \varphi \leq 1$

Por convergencia dominada

$$\lim_{m\to\infty} I_1 = \int_{\mathbb{R}^n_+} \underbrace{\lim_{m\to\infty} |\varphi_m|^p |Du|^p}_{=0} dx = 0$$

Para estimar I_2 aplicamos $(*)$:

$$I_2 = m^p \int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u\varphi'(mx_n)|^p \, d\tilde{x}\, dx_n$$

$$\overset{(*)}{\leq} C m^p \int_0^{2/m} y^{p-1}\left(\int_0^y\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p d\tilde{x}\, dt\right) dy$$

$$\leq \tilde{C} m^p \left(\int_0^{2/m} y^{p-1} dy\right)\left(\int_0^{2/m}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p d\tilde{x}\, dy\right)$$

$$\leq \bar{C} \int_0^{2/m} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du|^p d\tilde{x}\, dy}_{<\infty} \to 0 \quad \text{si } m\to\infty$$

Por lo tanto $Dw_m \to Du$ en $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ si $m\to\infty$.

Análogamente, se puede verificar que $w_m \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ (mismo argumento con convergencia dominada,

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |w_m - u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_+} |\varphi_m|^p |u|^p dx \to 0.)$$

Concluimos que $w_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ si $m\to\infty$.

Notamos que $w_m = 0$ en $0 < x_n < 1/m$.
Usando el alisador de Friedrichs podemos encontrar una sucesión,

$$u_m = \eta_\epsilon * w_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$$

tales que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ (ejercicio).
Por lo tanto,

$$u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+).$$

Paso 2: $\partial\Omega$ no es plana.

$\partial\Omega \in C^1 \Rightarrow$ podemos hallar $y = \Phi(x)$
$\Phi \in C^1$, localmente invertible
tal que $\partial\Omega$ bajo Φ es localmente plana.

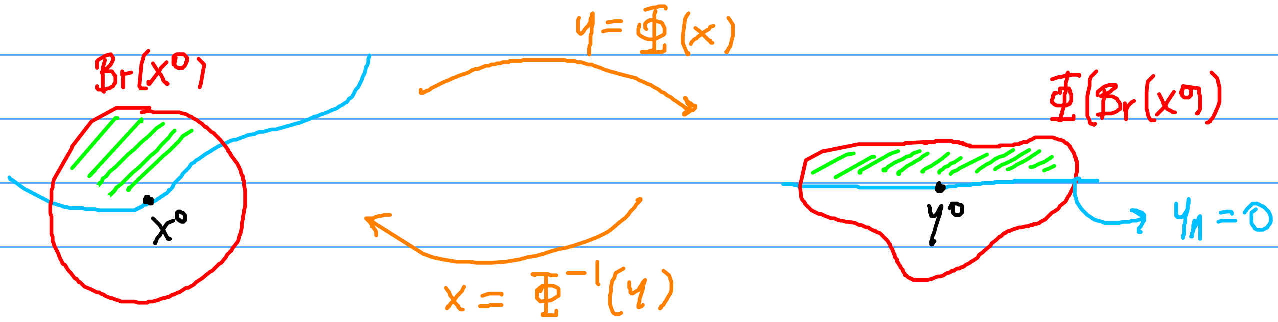
Si $x^0 \in \partial\Omega$, $\exists\ \tilde{\Phi} \in C^1$ y $r > 0$ tal que

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{ x \in B_r(x^0) : x_n > \tilde{\Phi}(\hat{x}) \}$$

$\Phi^j(x) = y_j = x_j \qquad j \neq n$

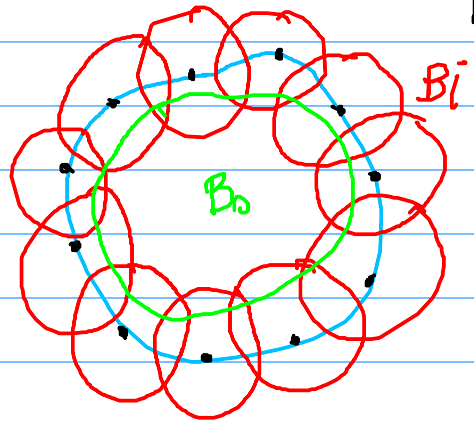
$\Phi \in C^1$

$$y_n = x_n - \tilde{\Phi}(\hat{x}) = \Phi^n(x)$$



Como $\partial\Omega$ es compacto, podemos seleccionar un no. finito de puntos x_i^0, $1 \leq i \leq N$, con cubiertas $B_i = B_{r_i}(x_i^0)$, con $B_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N} B_i$$



$\exists$ partición de unidad ξ_i $0 \leq i \leq N$ asociada a la cubierta

Como $\gamma_0 u = 0$ sobre $\partial\Omega$, u se mapea a una función $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, con $\tilde{\gamma}_0 \tilde{u} = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ y con soporte compacto. El paso 1 aplica a esta función. Con el mapeo inverso obtenemos una sucesión $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$, si $m \to \infty$.

Es decir, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\square$

Corolario ($p=2$) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto $\partial\Omega \in C^1$, entonces

$$\operatorname{Ker} \gamma_0 = H_0^1(\Omega).$$

Observaciones: $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$

$$\operatorname{Ker} \gamma_0 = H_0^1(\Omega).$$

¿Cuál es el rango de γ_0?

Rango $\mathcal{R}(\gamma_0) \subset L^2(\partial\Omega)$

Se puede demostrar que γ_0 no es sobre, existen funciones en $L^2(\partial\Omega)$ que no son trazas de funciones en $H^1(\Omega)$: $\mathcal{R}(\gamma_0) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$.

¿Cómo caracterizar $\mathcal{R}(\gamma_0)$? La respuesta no es sencilla: son funciones que tienen "media derivada en L^2".

Definición $H^{1/2}(\partial\Omega) := \mathcal{R}(\gamma_0)$

Para visualizar esto tomemos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ (no acotado).

Teorema El rango de

$$\tilde{\gamma}_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

es $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_0) = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Dem. Notación: $x = (\tilde{x}, x_n)$, $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$

$\xi = (\tilde{\xi}, \xi_n)$, $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$

Sea $u = u(x)$ $\quad w(\tilde{x}) := u(\tilde{x}, 0)$.

Si $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces por la fórmula de inversión:

$$u(\tilde{x},0) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{\xi},\xi_n)\, d\xi_n \right) d\tilde{\xi}$$

$$= w(\tilde{x})$$

Por la fórmula de inversión (en $\mathbb{R}^{n-1}$):

$$w(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}}\, \hat{w}(\tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}$$

Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $w, \hat{w} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$
$\hat{}$ es un isomorfismo isométrico $\Rightarrow$ unicidad de la transformada, implica que

$$\hat{w}(\tilde{\xi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{\xi},\xi_n)\, d\xi_n$$

Tomemos $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y calculamos:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\tilde{\xi}|^2)^{1/2} |\hat{w}(\tilde{\xi})|^2\, d\tilde{\xi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\tilde{\xi}|^2)^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\tilde{\xi},\xi_n)\, d\xi_n \right|^2 d\tilde{\xi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\tilde{\xi}|^2)^{1/2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{1/2}(1+|\xi|^2)^{-1/2}\, d\xi_n \right|^2 d\tilde{\xi}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\tilde{\xi}|^2)^{1/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi_n \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^{-1}\, d\xi_n \right] d\tilde{\xi}$$

Dado que $\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^{-1} d\xi_n = \pi(1+|\tilde{\xi}|^2)^{-1/2}$

obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1+|\tilde{\xi}|^2)^{1/2} |\hat{w}(\tilde{\xi})|^2 d\tilde{\xi} \leq \pi \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \pi \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

Si $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ entonces $w(\tilde{x}) = u(\tilde{x},0)$ $\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Por un argumento de densidad:

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n_+) \Rightarrow \tilde{\gamma}_0 u = w \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

$\tilde{\gamma}_0$ es sobre: Sea $v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. Su transformada de Fourier es una función: $\hat{v}(\tilde{\xi})$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$ y definimos:

$$\begin{cases} U(\tilde{\xi}, x_n) := \exp\left(-(1+|\tilde{\xi}|)x_n\right)\hat{v}(\tilde{\xi}), \\ \qquad x_n > 0 \end{cases}$$

Esta función define, a su vez, una función

$$u(x) = u(\tilde{x}, x_n)$$

a través de su transformada inversa:

$$u(x) = u(\tilde{x}, x_n) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}}\, U(\tilde{\xi}, x_n)\, d\tilde{\xi}$$

Se extiende $u(\tilde{x}, x_n) \equiv 0$ si $x_n < 0$.

Calculamos :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i \tilde{x} \cdot \tilde{\xi}} u(\tilde{x}, x_n) e^{-2\pi i x_n \xi_n} d\tilde{x}\, dx_n$$

teo. inversión

$$= \int_0^\infty e^{-2\pi i x_n \xi_n} v(\tilde{\xi}, x_n)\, dx_n$$

$$= \hat{v}(\tilde{\xi}) \int_0^\infty \exp\left(-(1 + |\tilde{\xi}| + 2\pi i \xi_n) x_n \right) dx_n$$

$$= \frac{\hat{v}(\tilde{\xi})}{1 + |\tilde{\xi}| + 2\pi i \xi_n}$$

Por otro lado, sustituyendo :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\hat{\xi}|^2) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\tilde{\xi}|^2) |\hat{v}(\tilde{\xi})|^2}{(1 + |\tilde{\xi}|)^2 + 4\pi^2 \xi_n^2} d\xi$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1 + |\tilde{\xi}|^2) |\hat{v}(\tilde{\xi})|^2}{1 + |\tilde{\xi}|^2 + \xi_n^2} d\xi$$

$$= \pi \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\tilde{\xi}|^2)^{1/2} |\hat{v}(\tilde{\xi})|^2 d\tilde{\xi} < \infty$$

ya que $v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Esto implica que u (extendida a $u \equiv 0$ en $x_n < 0$) y cualquier derivada $\partial_{x_j} u$ con $j \neq n$ están en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Así,

$$u, \partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^n_+), \quad \text{con} \quad j \neq n$$

Caso $j = n$: podemos derivar bajo el signo de integral y obtener

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\wedge}(\tilde{\xi}, x_n) = \frac{\partial \sigma}{\partial x_n}(\tilde{\xi}, x_n)$$

$$= -(1 + |\tilde{\xi}|)\, \sigma(\tilde{\xi}, x_n)$$

$$= -(1 + |\tilde{\xi}|) \exp\left(-(1 + |\tilde{\xi}|) x_n\right) \times \hat{v}(\tilde{\xi})$$

Entonces extendemos $\frac{\partial u}{\partial x_n} \equiv 0$ en $x_n < 0$.

Aplicando un argumento análogo se puede probar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{-(1 + |\tilde{\xi}|)\, \hat{v}(\tilde{\xi})}{1 + |\tilde{\xi}| + 2\pi i \xi_n}$$

y así,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\wedge}(\xi) \right|^2 \leq 2\pi \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |\tilde{\xi}|^2)^{1/2} |\hat{v}(\tilde{\xi})|^2 \, d\tilde{\xi}$$

$$< \infty \qquad (v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Por lo tanto, $\partial u/\partial x_n$ extendida como cero en $x_n<0$ está en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Así, $\frac{\partial u}{\partial x_n} \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$.

$\therefore$ La función construída satisface

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n_+).$$

Por el teorema de inversión:

$V(\tilde{\xi},0) = \hat{v}(\tilde{\xi})$ implica que

$$u(\tilde{x},0) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}} \, V(\tilde{\xi},0)\, d\tilde{\xi}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{2\pi i \tilde{x}\cdot\tilde{\xi}} \, \hat{v}(\tilde{\xi})\, d\tilde{\xi}$$

$$= v(\tilde{x}) \quad \text{si} \quad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$$

Por densidad,

$$u(\tilde{x},0) = \tilde{\gamma}_0 u = v \in H^{1/2}(\mathbb{R}^n_+)$$

si u es suficientemente regular.

$\square$

Nota: Con argumento similar se puede probar que el operador

$$\tilde{\gamma}_0 : H^s(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1}) \quad \forall \, \underline{s \in \mathbb{R}}$$

tiene rango: $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_0) = H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$. $\quad \underline{\underline{s \geq 1}}$,