Curso Avanzado EDPs

2021-2

Ramón G. Plaza

Lección 3.7: Traza. Fórmulas de Green. Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Clase pasada: • $\tilde{\gamma}_0 : H^1(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tiene rango $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_0) = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

• $\tilde{\gamma}_0 : H^s(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow H^{s-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathcal{R}(\tilde{\gamma}_0) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

$\forall\, s \geq 1,\ s \in \mathbb{R}$ (ejercicio).

Modificando la demostración de la clase pasada se puede verificar que: si $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_n}(\tilde{x},0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ y más aún,

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(\tilde{x},0) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

Entonces podemos extender $\frac{\partial u}{\partial x_n}(\tilde{x},0)$ a un mapeo lineal continuo

$$\tilde{\gamma}_1 : H^2(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$$

tal que: (i) $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_1) = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

(ii) $\tilde{\gamma}_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_n}(\tilde{x},0)$ si $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$

En general, para $m \geq 1$ tenemos una serie de mapeos $\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_{m-1}$, cada uno mapea $H^m(\mathbb{R}^n_+)$ en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ y cuyo rango es

$$\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq \left(L^2(\mathbb{R}^{n-1})\right)^m$$

Teorema Existe un operador

$$\tilde{\Gamma} : H^m(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \left(L^2(\mathbb{R}^{n-1})\right)^m, \qquad m \geq 1$$

lineal y acotado tal que:

(a) $\tilde{\Gamma}u = (\tilde{\gamma}_0 u, \tilde{\gamma}_1 u, \dots, \tilde{\gamma}_{m-1} u)$

$$= \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_n^{m-1}}\right)(\hat{x}, 0)$$

si $u \in H^m(\mathbb{R}^n_+) \cap C^m(\overline{\mathbb{R}^n_+})$.

(b) $\mathcal{R}(\tilde{\Gamma}) = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

(c) $\ker(\tilde{\Gamma}) = H^m_0(\mathbb{R}^n_+)$.

Ejemplo: Si $m = 3$ entonces

- $\tilde{\gamma}_0 : H^3(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$
  $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_0) = H^{3-1/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{5/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

- $\tilde{\gamma}_1 : H^3(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$
  $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_1) = H^{3-3/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{3/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \subsetneq L^2(\mathbb{R}^{n-1})$

- $\tilde{\gamma}_2 : H^3(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$
  $\mathcal{R}(\hat{\gamma}_2) = H^{3-5/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

$$\Rightarrow \Gamma u = (\tilde{\gamma}_0 u, \tilde{\gamma}_1 u, \tilde{\gamma}_2 u) \in H^{5/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{3/2}(\mathbb{R}^{n-1}) \times H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$$

$$= \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(\hat{x}, 0) \quad \text{si } u \in C^3(\overline{\mathbb{R}^n_+}).$$

Nota: notamos que $\tilde{\gamma}_1 : H^2(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ tiene rango $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_1) = H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, pero podemos asociar

$$\tilde{\gamma}_1 u = \tilde{\gamma}_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

si $u \in H^3(\mathbb{R}^n_+)$. Por lo tanto, si $\tilde{\gamma}_1 : H^3(\mathbb{R}^n_+) \to L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ (operador restringido a $H^3 \subset H^2$), entonces $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_1) = H^{3-3/2}(\mathbb{R}^{n-1}) = H^{3/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Extrapolación: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$ localizando la frontera y mapeándola a un plano, $(B_j, \Phi_j), 1 \leq j \leq N$ cubierta de $\partial\Omega$, con $\{\varphi_j\}_{j=0}^N$ con $B_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{j=0}^N B_j$, $\Phi_0 \equiv Id$, se tiene:

si $u \in H^1(\Omega)$ entonces $(\varphi_j u|_{B_j \cap \Omega}) \circ \Phi_j \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Aplicando Φ_j^{-1} podemos definir la imagen de γ_0 en $L^2(\partial\Omega)$,

$$\begin{cases} \gamma_0 = \Phi_j^{-1}\left[\tilde{\gamma}_0\left(\left(\varphi_j u|_{B_j\cap\Omega}\right)\circ \Phi_j\right)\right) \in L^2(\partial\Omega) \\ \mathcal{R}[\gamma_0] =: H^{1/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

Esta imagen coincide con la suma finita de las aplicaciones inversas Φ_j^{-1} de un elemento de $H^{1/2}(\mathbb{R}^n_+)$.

Notación: $\Gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow (L^2(\partial\Omega))^m$

$$\Gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$$

con $\mathcal{R}(\Gamma) = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$.

Teorema (de traza).

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^{m+1}$, orientable. Entonces existe un operador

$$\Gamma : H^m(\Omega) \longrightarrow \left(L^2(\partial\Omega)\right)^m$$

lineal y acotado, tal que:

(a) $$\Gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)$$
$$= \left(u, \frac{\partial u}{\partial \nu}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right)\Big|_{\partial\Omega}$$
si $u \in H^m(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$.

(b) $\|\Gamma u\|_{L^2(\partial\Omega)^m} \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$, $\forall\, u \in H^m(\Omega)$

con $C = C(\Omega, m, n) > 0$ independiente de u.

(c) $\ker \Gamma = H_0^m(\Omega)$

(d) $$\mathcal{R}(\Gamma) = \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$$

Esbozo de demostración: La $\exists$ de Γ se demuestra invirtiendo Φ_j por partición de unidad (imagen inversa de Υ_j en $\mathbb{R}^n_+$ bajo Φ_j^{-1}).

(a) es consecuencia de la invertibilidad de cada Φ_j y de que $\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}$ en $\partial\mathbb{R}^n_+$ se transforma en $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}$ sobre $\partial\Omega$ (orientable).

(c) es consecuencia del teorema (clase pasada):
$u \in H_0^1(\Omega)$ ssi $\gamma_0 u = 0$ c.d.s. en $\partial\Omega$
$\forall u \in H^1(\Omega)$, y del encaje $H^m(\Omega) \subsetneq H^{m-1}(\Omega)$
$\subset \dots \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

Asimismo, $\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \gamma_1 u \quad \forall\, u \in H^2(\Omega)$

$$\gamma_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\right) = \gamma_1\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \gamma_2 u, \quad \forall u \in H^3(\Omega)$$

$$\vdots$$

$$\gamma_0\left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}\right) = \gamma_m u, \quad \forall u \in H^m(\Omega)$$

$\therefore \quad \operatorname{Ker} \Gamma = H_0^m(\Omega)$.

(d) Por definición, $\mathcal{R}(\tilde{\Gamma}) =: \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$

Se invierte el mapeo local Φ_j.

(b) Se demostrará usando Rellich-Kondrachov

$\square$

Consecuencias: podemos extender integración por partes a funciones en $H^m(\Omega)$.

Teorema (fórmula de Green en $H^1(\Omega)$)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$, orientable.
$|\hat{\nu}| = 1$, $\hat{\nu} \in \mathbb{R}^n$, vector normal unitario exterior en cada punto de $\partial\Omega$.

Sean $u, v \in H^1(\Omega)$. Entonces $\forall\ 1 \le j \le n$, se tiene:

$$\int_\Omega u\, \partial_{x_j} v\, dx = -\int_\Omega \partial_{x_j} u\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\, \nu_j\, dS_x$$

Dem. $C^\infty(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$.
Así, para $u_m, v_m \in C^\infty(\bar{\Omega})$ el teorema de Green clásico:

$$\int_\Omega u_m\, \partial_{x_j} v_m\, dx = -\int_\Omega \partial_{x_j} u_m\, v_m\, dx + \int_{\partial\Omega} u_m v_m\, \nu_j\, dS_x$$

(se deduce del teorema de la divergencia,

$$A = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ u_m v_m \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \right)$$

Por continuidad de la traza:

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Por densidad, si $u_m \to u$ en $H^1(\Omega)$, $m \to \infty$
$v_m \to v$ $\quad$ "

$$\left| \int_{\partial\Omega} u_m v_m\, \nu_j\, dS_x - \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\, \nu_j\, dS_x \right|$$

$$\le \int_{\partial\Omega} |(u_m - \gamma_0 u) v_m|\, dS_x + \int_{\partial\Omega} |(\gamma_0 u)|\, |v_m - \gamma_0 v|\, dS_x$$

$$\leq \|\gamma_0(u_m - u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v_m\|_{L^2(\partial\Omega)} +$$

$$+ \|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0(v_m - v)\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\leq C \|v_m\|_{H^1(\Omega)} \underbrace{\|u_m - u\|_{H^1(\Omega)}}_{\to 0} + C\|u\|_{H^1(\Omega)} \underbrace{\|v_m - v\|_{H^1(\Omega)}}_{\to 0}$$

si $m \to \infty$

Análogamente,

$$\int_\Omega u_m \partial_{x_j} v_m + v_m \partial_{x_j} u_m \, dx \to \int_\Omega u \partial_{x_j} v + v \partial_{x_j} u \, dx$$

si $m \to \infty$

$\square$

Ejemplo: Si $v \equiv 1 \in H^1(\Omega)$, y $u = u_j \in H^1(\Omega)$ obtenemos

$$\int_\Omega \partial_{x_j} u_j \, dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u_j) \nu_j \, dS_x$$

Definiendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in (H^1(\Omega))^n$$

con $u_j \in H^1(\Omega)$, $1 \leq j \leq n$

Sumando en j obtenemos:

Corolario 1 (teo. de la divergencia)

Mismas hipótesis sobre Ω:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u) \cdot \hat{\nu} \, dS_x$$

$$\forall \ u \in (H^1(\Omega))^n, \quad \gamma_0 u = \begin{pmatrix} \gamma_0 u_1 \\ \vdots \\ \gamma_0 u_n \end{pmatrix} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^n.$$

Corolario 2 Mismas hipótesis sobre Ω.
Si $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ entonces:

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} u \, \partial_{x_j} v \, dx = -\int_{\Omega} \partial_{x_j}^2 u \, v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\partial_{x_j} u)(\gamma_0 v) \nu_j \, dS_x$$

$$\forall \ 1 \leq j \leq n$$

Dem. Aplicar Green con $w = \partial_{x_j} u \in H^1(\Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$ $\square$

Corolario 3: Si $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ entonces

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = -\int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 v) \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \gamma_0(\partial_{x_j} u) \nu_j}_{\gamma_0(\nabla u) \cdot \hat{\nu}} \, dS_x$$

Teoremas de encaje (desigualdades tipo Sobolev)

Por ejemplo, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto ¿cuándo u pertenece a otro espacio de Sobolev? Depende de los casos:

(A) $1 \leq p < n$
(B) $p = n$
(C) $n < p < \infty$

Supongamos (A), $1 \leq p < n$ y sea $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. ¿Es la siguiente desigualdad

$$(1) \quad \cdots \quad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

con $C > 0$ uniforme (independiente), cierta para algún $q \in \mathbb{Z}_+$?

<u>Proposición</u> q no puede ser arbitrario.

<u>Dem</u> Supongamos que $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que (1) se cumple $\forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Para cada $\lambda > 0$ definimos:

$$v_\lambda(x) := v(\lambda x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, $v_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Calculamos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v_\lambda|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v(\lambda x)|^q \, dx$$
$$= \frac{1}{\lambda^n} \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)|^q \, dy$$
$$= \frac{1}{\lambda^n} \|v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

$$D_x v(\lambda x) = \lambda D_y v(y)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |D_x v_\lambda|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\lambda^p}{\lambda^n} |D_y v(y)|^p \, dy$$
$$= \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \|Dv\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

sustituyendo en (1):

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{n/p}} \|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{\underbrace{1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}} \|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Si $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q} \neq 0$ podemos obtener una contradicción tomando $\lambda \to 0^+$, $\lambda \to \infty$.

Si $1-\frac{n}{p}-\frac{n}{q} =: \rho > 0$, tomando $\lambda \to 0^+$ obtenemos

$$\|Dv\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{1}{C} \underbrace{\lambda^{-\rho}}_{\to\, \infty \text{ si } \lambda \to 0^+} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Incompatible con $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para que la desigualdad (L) sea cierta $\forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es necesario que $\rho = 0$,

$$q = \frac{np}{n-p}.$$

<u>Definición</u> Si $1 \leq p < n$, el índice conjugado de Sobolev es

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

(satisface $1 - \frac{n}{p} - \frac{n}{p^*} = 0$).

<u>Teorema</u> (desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$)

Sea $1 \leq p < n$. Entonces existe $C = C(p,n) > 0$ constante, independiente de u, tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \cdots \quad (GNS)_{\mathcal{D}}$$

$\forall\, u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Nota: El soporte compacto de u es importante: $u \equiv 1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, viola $(GNS)_{\mathcal{D}}$.
La constante $C > 0$ <u>no</u> depende del soporte.

Dem. Caso $p=1$. $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ 1 \leq j \leq n$:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ j}}{y}, \dots, x_n)\, dy$$

$$\Rightarrow \quad |u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y, \dots, x_n)|\, dy$$

Esto implica :

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando en $x_1 \in (-\infty, \infty)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots)|\, dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} |Du(y_1, \dots, x_n)|\, dy_1 \right]^{\frac{1}{n-1}}}_{\text{no dep. de } x_1} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots y_j \dots)|\, dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(\dots, y_j, \dots)|\, dy_j \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

Usando Hölder :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du|\, dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\times \left[\prod_{j=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1, \dots, y_j, \dots, x_n)|\, dx_1 dy_j \right]^{\frac{1}{n-1}}$$

$\dots \quad (2)$

En efecto: $$\int_\Omega |uv|\,dx \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Si $p_1^{-1}+\dots+p_m^{-1}=1$, $u_k\in L^{p_k}(\Omega)$, $1\leq k\leq m$, entonces
$$\int_\Omega |u_1 \cdots u_m|\,dx \leq \prod_{k=1}^{m}\|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$
(prueba por inducción sobre m, usando Hölder).

Se aplica esta desigualdad a las funciones
$$w_j := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |Du(x_1,\dots,y_j,\dots,x_n)|\,dy_j\right)^{1/(n-1)}$$
$$j=2,\dots,n,\qquad \Omega=\mathbb{R}$$

para obtener (2).

Integrando (2) en $x_2\in(-\infty,\infty)$:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 2}}^{n} I_j^{\frac{1}{n-1}}\,dx_2$$

donde $$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dy_1$$
$$I_j := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|Du|\,dx_1\,dy_j,\quad j=3,\dots,n$$

Aplicando un argumento similar (Hölder)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx_1 dy_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dy_1 dx_2\right]^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\times \prod_{j=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx_1 dy_j dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando recursivamente en $x_j \in (-\infty,\infty)$, $j=3,\ldots,n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |Du| \, dx_1 \cdots dy_j \cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du| \, dx\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

Ésta es la estimación de GNS con $p=1$, $p^* = 1^* = \frac{n}{n-1}$.

Nótese que $C \equiv 1$.

Caso $1<p<n$. Aplicamos la desigualdad para $p=1$ a la función

$$v := |u|^{\theta} \quad \text{con} \quad \theta > 1$$

obtenemos :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\theta n/(n-1)} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D|u|^{\theta}| \, dx$$

$$|u|^2 = u^2 \quad \therefore \quad 2|u| \partial_{x_j} |u| = 2u \, \partial_{x_j} u$$

$$\Rightarrow \quad \partial_{x_j} |u| = (\operatorname{sgn} u) \, u_{x_j}$$

Así,

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\theta n/(n-1)} dx \right]^{\frac{n-1}{n}} \leq \theta \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\theta - 1} |Du| \, dx$$

$$\leq \theta \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\theta-1)p/(p-1)} dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx \right]^{1/p}$$

Hölder
$q = \frac{p}{p-1}$

Escogemos θ tal que

$$\frac{\theta n}{n-1} = (\theta - 1) \frac{p}{p-1}$$

es decir,

$$\theta := p \frac{(n-1)}{n-p} > 1 \quad \text{ya que } 1 < p < n$$

$$\therefore \quad \frac{\theta n}{n-1} = \frac{p(n-1)}{n-p} \cdot \left(\frac{n}{n-1} \right) = \frac{pn}{n-p} = p^*$$

Por lo tanto :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\frac{n-1}{n} - \left(\frac{p-1}{p}\right) = \frac{p(n-1) - n(p-1)}{np}$$

$$= \frac{n-p}{np} = \frac{1}{p^*}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} dx\right)^{1/p^*} \leq \theta \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^p dx\right)^{1/p}$$

es decir, $\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|Du\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y con

$$C = C(n,p) = \theta = \frac{(n-1)p}{n-p}$$

$\square$