Lección 3.8: Desigualdades de Poincaré y de Morrey. Teoremas de encaje.

**Teorema** (desigualdad de GNS en $W^{1,p}(\Omega)$)

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto, $\partial\Omega \in C^1$ y $1 \leq p < n$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $u \in L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = np/(n-p)$ y $\exists$ $C > 0$, $C = C(p, n, \Omega) > 0$ (independiente de $u$) tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \cdots \quad (1)$$

Dem.

Por las hipótesis y el teorema de extensión: existe $\bar{u} := Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que:

- $u = \bar{u}$ c.d.s. en $\Omega$
- $\bar{u}$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n$
- $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Como $\operatorname{supp}(\bar{u})$ compacto, por el teo. de aprox. local $\exists$ $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to \bar{u}$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ si $m \to \infty$. Aplicando la desigualdad de GNS (en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$) a la sucesión:

$$\|u_m - u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \underbrace{\|Du_m - Du_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}_{\to\, 0 \text{ si } m,k \to \infty}$$

ya que $u_m \xrightarrow{W^{1,p}} \bar{u}$

$\therefore$ $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Así, $\exists\ \tilde{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\tilde{u} = \lim_{m\to\infty} u_m \quad \text{en } L^{p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Por unicidad del límite, $\tilde{u} = \bar{u}$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$.

Así, obtenemos :

GNS en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \qquad C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

si $m \to \infty$. De este modo :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \underset{\substack{u=\bar{u}\\ \text{c.d.s en } \Omega}}{\leq} \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\underset{\text{teo. extensión}}{\leq} \bar{C}\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$\square$

Teorema (desigualdad de Poincaré - versión 1)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < n$, entonces

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \cdots \quad (2)$$

para cualquier $1 \leq q \leq p^*$ y con $C = C(p,q,n,\Omega) > 0$.

**Dem.** Ejercicio (ver Evans) $\square$

Observaciones: No se pide información sobre $\partial\Omega$: es sobre $W_0^{1,p}(\Omega)$, basta con que $\Omega$ sea acotado. Nótese que en el lado derecho de (2) sólo aparece el gradiente de $u$.

Consecuencia:

**Corolario:** En $W_0^{1,p}(\Omega)$ las normas:

$$\|u\|_{\nabla,p} := \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

y la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ son equivalentes.

**Dem.** Por el teorema: $q \in [1, p^*]$ incluye a $p$: $p \leq p^* = \frac{np}{n-p}$ ssi $n-p \leq n$.

$$\therefore \to \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

$\square$

**Teorema** (desigualdad de Poincaré - versión 2)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado; sea cualquier $1 \leq p < \infty$. Entonces $\exists\ C = C(\Omega, p, n) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

$\forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

**Dem.** Sea $\Omega = (-a,a)^n$, $a>0$ (hipercubo).
Sea $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces,

$$u(x) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{=:\tilde{x}}, y)\, dy$$

ya que $u(\tilde{x}, -a) = 0$. Por lo tanto, tomando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, estimamos:

$$|u(x)| \leq \left(\int_{-a}^{x_n} |\partial_{x_n} u(\tilde{x}, y)|^p dy\right)^{1/p} \left(\int_{-a}^{x_n} dy\right)^{1/q}$$

$$= |x_n + a|^{1/q} \left(\int_{-a}^{x_n} |\partial_{x_n} u(\tilde{x}, y)|^p dy\right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \quad |u(x)|^p \leq |x_n + a|^{p/q} \int_{-a}^{x_n} |\partial_{x_n} u(\tilde{x}, y)|^p dy$$

Integrando en $\tilde{x} \in (-a,a)^{n-1}$:

$$\int_{\{(-a,a)^{n-1}\}} |u(\tilde{x}, x_n)|^p d\tilde{x} \leq (2a)^{p/q} \int_{(-a,a)^{n-1}} \int_{-a}^{a} |\partial_{x_n} u|^p dx$$

Integrando en $x_n \in (-a,a)$:

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq (2a)^{\frac{p}{q}+1} \int_\Omega |\partial_{x_n} u|^p dx$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p) \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

En el caso $\Omega = (-a,a)^n$, $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Por densidad, la desigualdad es cierta en $W_0^{1,p}((-a,a)^n)$

En el caso general: $\Omega$ acotado $\Rightarrow$ podemos hallar $a>0$ tal que $\Omega \subset (-a,a)^n := \tilde{\Omega}$
Como $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos extender $u \equiv 0$ en $\tilde{\Omega} \setminus \bar{\Omega}$. Sea $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ esta extensión. Así,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \leq C(\Omega,p)\,\|D\tilde{u}\|_{L^p(\tilde{\Omega})}$$
$$= C(\Omega,p)\,\|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

$\square$

Corolario ($p=2$) Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado, abierto, entonces

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\,\|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

$\forall\, u \in H_0^1(\Omega)$. Además, la forma bilineal

$$\langle u,v\rangle_\nabla = \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}u\,\partial_{x_j}v\,dx$$

es un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ cuya norma $\|u\|_\nabla := \|Du\|_{L^2(\Omega)}$ es equivalente a la norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ en $H_0^1(\Omega)$.

Observación: Poincaré no es válida si $\Omega$ no es acotado. Contraejemplo: $\Omega = \mathbb{R}^n$ y sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que:

- $\varphi \equiv 1$ en $|x| \leq 1$
- $\varphi \equiv 0$ en $|x| \geq 2$
- $0 \leq \varphi \leq 1$.

Sea $\varphi_m(x) := \varphi(x/m)$, $m \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \; D\varphi_m(x) = \frac{1}{m} D\varphi\left(\frac{x}{m}\right)$$

Así,

$$\|D\varphi_m\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = m^{n-p} \underbrace{\int_{B_2(0)} |D\varphi(y)|^p \, dy}$$

$\downarrow$ 0 si $p>n$ y $m \to \infty$

Por otro lado,

$$\|\varphi_m\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = m^n \int_{B_2(0)} |\varphi(y)|^p \, dy$$

$$\geq m^n \int_{B_1(0)} dy \longrightarrow \infty \quad \text{si } m \to \infty$$

<u>Observación</u> Caso $p = n$. Notamos que

$$p^* = \frac{np}{n-p} \longrightarrow \infty \quad \text{si} \quad p \to n^-.$$

Por GNS podríamos esperar que $u \in L^\infty(\Omega)$ si $u \in W^{1,n}(\Omega)$. Esto es <u>falso</u>: contra-ejemplo, sea $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, y

$$u(x) = \log \log\left(\frac{2}{|x|}\right)$$

Sabemos que $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

$\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $\partial\Omega \in C^1$, $\Omega$ acotado, $1 \leq p < n$.

Pero, claramente $u \notin L^\infty(B_{1/2}(0))$, $u \to \infty$ si $x \to 0$. Sin embargo se puede demostrar que

$u \in H^1(B_{1/2}(0))$ (ejercicio).

Estudiamos ahora:

- caso (c): $n < p < \infty$

Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces $u \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ para cierto $\gamma$ adecuado. ¿Cómo calcular $\gamma$?

Recordatorio: $u \in C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ es el espacio de Hölder de funciones $u \in C^k(\bar{\Omega})$ tales que

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} < \infty$$

donde:

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\}$$

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} \{ |u(x)| \}$$

**Teorema** (desigualdad de Morrey)

Sea $n<p<\infty$. Entonces existe $C=C(p,n)>0$ (independiente de $u$) tal que

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \cdots (5)$$

para cualquier $u\in C^1(\mathbb{R}^n)$, donde

$$\gamma := 1-\frac{n}{p} > 0.$$

**Dem.** Ejercicio (ver Evans)

$\square$

**Definición** Decimos que una función $u^*:\Omega\to\mathbb{R}$, medible, es una versión en $\Omega$ de $u:\Omega\to\mathbb{R}$, medible, si $u=u^*$ c.d.s. en $\Omega$.

**Teorema** (Morrey en $W^{1,p}$)

Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega\in C^1$. Sean $n<p\leq\infty$ y $u\in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe una versión $u^*$ de $u$ en $\Omega$ tal que

(a) $u^*\in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, con $\gamma = 1-\frac{n}{p}$

(b) $\exists$ $C=C(p,n,\Omega)>0$ tal que

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \cdots (6)$$

$\forall\, u\in W^{1,p}(\Omega)$.

Dem. $\partial\Omega \in C^1$, $\Omega$ acotado $\Rightarrow$ por el teorema de extensión $\exists$ $\bar{u} = \mathcal{E}u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que :

- $\bar{u} = u$ en $\Omega$ c.d.s.
- $\text{supp}(\bar{u})$ compacto en $\mathbb{R}^n$
- $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Supongamos que $n < p < \infty$. Como $\text{supp}(\bar{u})$ compacto, por densidad $\exists$ $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$u_m \to \bar{u} \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ si } m \to \infty.$$

Por Morrey (versión suave) :

$$\|u_m - u_k\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \underbrace{\|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}}_{\to 0 \text{ si } m,k \to \infty}$$

con $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.

$C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ completo $\Rightarrow$ $\exists$ $u^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tq

$$u_m \to u^* \quad \text{en } C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$$

Por demostrar : $u^* = \bar{u}$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$.

$\text{supp}(\bar{u})$ compacto y $\begin{cases} u_m \to \bar{u} & \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \\ u_m \to u^* & \text{en } C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n) \end{cases}$

Por la convergencia en $W^{1,p}$, podemos escoger subsucesión $u_{m_j}$ tal que

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{supp}(u_{m_j})\\ \operatorname{supp}(\bar{u})\end{array}\right\} \subset K, \quad K \text{ compacto}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}$$

Así,

$$|u^*(x) - \bar{u}(x)| \leq |u^*(x) - u_{m_j}(x)| +$$

$$+ |u_{m_j}(x) - \bar{u}(x)|$$

$$\leq \underbrace{\| u^* - u_{m_j} \|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 0} + \fint_K |u_{m_j} - \bar{u}|\, dx$$

$$\fint_K |u_{m_j} - \bar{u}|\, dx \leq \frac{1}{|K|} \left( \int_K |u_{m_j} - \bar{u}|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_K dx \right)^{1/q}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$= |K|^{\frac{1}{q} - 1} \| u_{m_j} - \bar{u} \|_{L^p(K)}$$

$$\leq |K|^{-1/p} \| u_{m_j} - \bar{u} \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$=: C(\Omega) \| u_{m_j} - \bar{u} \|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$\to 0$ si $j \to \infty$

$$\therefore \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u^*(x) - \bar{u}(x)| = 0$$

$\therefore$ $u^* = \bar{u}$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$

En particular $u^* = \bar{u}$ c.d.s. en $\Omega$.

Finalmente,

$$\|u_m\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \qquad C\,\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\hat{K})} \leq \bar{C}\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

teo. extensión.

$$\therefore\ \|\overset{*}{u}\|_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})} \leq \|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

caso $p=\infty$: Tarea 2. $\square$

Observación: No distinguiremos entre $u$ y su versión $u^*$ en $\Omega$. Morrey:

$$\|u\|_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Si $p>n$ entonces toda función en $W^{1,p}(\Omega)$ es Hölder continua con $\gamma = 1-\frac{n}{p}$.

observación: por definición

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})}$$

Así:

Corolario $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$
En el caso $p>n$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

y la inclusión es secuencialmente continua, es decir,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} .$$

- Caso (B) : $p=n$.

Ya vimos un contraejemplo de que $W^{1,n} \not\subset L^\infty$ (es decir, el exponente de Sobolev de $n$, $n^* = \infty$, no funciona para la contención.

Vamos a demostrar que $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para cualquier $q \in [n,\infty)$, además

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}$$

$\forall\, u \in W_0^{1,n}(\Omega)$.

Lema auxiliar 1 (Gagliardo)

Sea $n \geq 2$. Si $f_1, \dots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ se definen $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ :

$$\hat{x}_j := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$$\forall\ 1 \leq j \leq n$$

$$f(x) := f_1(\hat{x}_1) f_2(\hat{x}_2) (\dots) f_n(\hat{x}_n) = \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j).$$

Entonces :

- $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$
- $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$

<u>Dem</u>. Ejercio (ver Kesavan)

- Si $n=2$ automático.
- Si $n=3$ por Cauchy-Schwarz
- Caso general : inducción

$\square$

<u>Lema auxiliar 2</u> (interpolación)

Supongamos que para $p \geq 1$, $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $v \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ con $p^* = \frac{np}{n-p} \geq p$

Entonces,

- $v \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall \quad q \in [p, p^*]$
- $\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}$

Dem. Sea $q \in [p, p^*]$. Entonces existe $\alpha \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*}$$

(es decir, $\alpha := \dfrac{p(p^*-q)}{q(p^*-p)} \in [0,1]$).

Entonces,

$$v \in L^p \Rightarrow |v|^{\alpha q} \in L^{p/\alpha q}$$

$$v \in L^{p^*} \Rightarrow |v|^{(1-\alpha)q} \in L^{p^*/(1-\alpha)q}$$

Por Hölder con

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = \frac{\alpha q}{p} + \frac{(1-\alpha)q}{p^*} = 1$$

(es decir, $P := \dfrac{p}{\alpha q}$, $Q := \dfrac{p^*}{(1-\alpha)q}$),

$$\|v\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{(1-\alpha)q} |v|^{\alpha q} \, dx$$

Hölder $P^{-1}+Q^{-1}=1$

$$\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\underbrace{(1-\alpha)qQ}_{p^*}} \right)^{1/Q} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{\overbrace{\alpha q P}^{p}} \, dx \right)^{1/P}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p^*} dx\right)^{(1-\alpha)q/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^p dx\right)^{\alpha q/p}$$

$$= \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{(1-\alpha)q} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\alpha q}$$

Es decir,

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha} \|v\|_{L^p}^{\alpha}$$

Aplicando $a+b \geq a^{1-\alpha} b^{\alpha} \quad \forall \ a,b \geq 0,$ $\alpha \in (0,1)$ obtenemos

$$\|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

$\square$

<u>Teorema</u> (caso $p=n$)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto. Entonces $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall \ q \in [n,\infty)$, con

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}$$

$\forall \ u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ con $C = C(n,q,\Omega) > 0$ (independiente de $u$).

<u>Dem.</u> Es suficiente demostrarlo para $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} \quad \cdots (6)$$

$\forall \ u \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, $q \in [n,\infty)$.

En efecto, sea $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$, $\Omega$ abierto

Sea $\tilde{u} := \begin{cases} u, & \text{en } \Omega \\ 0, & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$ extensión canónica

Se tiene que $\tilde{u} \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|\tilde{u}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\tilde{u}\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \overline{C} \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)} .$$

extensión

Basta con probar (6).

Tomemos $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\forall \ 1 \leq j \leq n$

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_{x_j} u(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n)| \, dy$$

$$=: f_j(\hat{x}_j) , \quad \hat{x}_j := (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

(ver lema aux 1).

Así,

$$|u(x)|^n \leq \prod_{j=1}^{n} f_j(\hat{x}_j) \quad \text{ssi} \quad |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} |f_j(\hat{x}_j)|^{\frac{1}{n-1}}$$

supp$(u)$ compacto $\Rightarrow$ $\partial_{x_j} u$ es integrable

y por lo tanto $|f_j(\hat{x}_j)|^{\frac{1}{n-1}} \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$
$\forall\ 1 \leq j \leq n$

Por el lema aux L:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1/(n-1)}$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \|\partial_{x_j} u\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{1/(n-1)}$$

Nótese que $1^* = \frac{n}{n-1}$. Así,

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^{n} \|\partial_{x_j} u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}$$

$\forall\ u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, sean $t \geq 1$ y $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Entonces,

$$|u|^{t-1} u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

Además,

$$\partial_{x_j}(|u|^{t-1} u) = t\,|u|^{t-1} \partial_{x_j} u$$

Aplicando la estimación:

$$\| |u|^{t-1} u \|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^{n} \| t\,|u|^{t-1} \partial_{x_j} u \|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{1/n}$$

Aplicando Hölder con $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$ :

(Estamos en el caso $p = n$, $\therefore$ tomemos $\tilde{p} = n$, $\frac{1}{\tilde{q}} = 1 - \frac{1}{n}$ )

$$\| |u|^{t-1} u \|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq t \, \|u\|^{t-1}_{L^{\tilde{q}(t-1)}(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^{n} \|\partial_{x_j} u\|^{1/n}_{L^{\tilde{p}}}$$

Hölder

$\tilde{p} = n$

$$\leq t \, \|u\|^{t-1}_{L^{n(t-1)/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

Usando :

$$(a+b)^t \geq t a^{t-1} b \qquad \forall\, a \geq 0,\ b \geq 0$$
$$\forall\, t \geq 1$$

obtenemos :

$$\|u\|^t_{L^{tn/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq t \, \|u\|^{t-1}_{L^{n(t-1)/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \|Du\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \left( \|u\|_{L^{n(t-1)/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} + \|Du\|_{L^n} \right)^t$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^{tn/(n-1)}} \leq \|u\|_{L^{n(t-1)/(n-1)}} + \|u\|_{W^{1,n}} \qquad \text{-- } (7)$$

Escogiendo

$$t := n$$

$$\|u\|_{L^{n^2/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C\,\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

Sea $q \in \left[n, \frac{n^2}{n-1}\right]$. Nótese que:

$$\tilde{q} := \frac{q}{n} \in \left[1, \frac{n}{n-1}\right] = [1, 1^*]$$

Aplicando el lema aux. 2: si $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ entonces $v := u^n \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ (ejercicio).

Además,

$$\|v\|_{L^{n/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^{n^2/(n-1)}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq C\,\|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

$$\therefore \begin{cases} v \in L^{n/(n-1)} = L^{1^*}(\mathbb{R}^n) \\ v \in L^1(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

$$\underset{\text{lema aux. 2}}{\Longrightarrow} \quad v \in L^{\tilde{q}} \quad \forall\, \tilde{q} \in [1, 1^*] = \left[1, \frac{n}{n-1}\right]$$

es decir,

$$u^n \in L^{\tilde{q}} \quad \forall\, \tilde{q} \in [1, 1^*]$$

sii $\quad \|u\|^{q}_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \infty \quad \forall\, q \in \left[n, \frac{n^2}{n-1}\right]$

$\therefore \quad u \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, q \in \left[n, \frac{n^2}{n-1}\right]$

Además, por lema aux. L :

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \|v\|_{L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^{n/(n-1)}} + \|v\|_{L^1}$$

$$= \|u\|_{L^{n^2/(n-1)}} + \|u\|_{L^n}$$

$$\leq C\, \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

Repetimos el argumento con $t = n+1$.
obtenemos :

$$u \in L^q(\mathbb{R}^n) \quad \forall\, q \in \left[\frac{n^2}{n-1}, \frac{n(n+1)}{n-1}\right]$$

y $\quad \|u\|_{L^q} \leq C\, \|u\|_{W^{1,n}}.$

Repetimos para $\quad t = n+2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad t = n+3, \quad$ etc.

Resultado :

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\forall\, q \in [n, \infty) \quad \forall\, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Por densidad lo mismo en $W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

$\square$