Curso Avanzado EDPs

2021-2

Ramón G. Plaza

Lección 3.9: Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov.

Resumen de los teoremas anteriores:

Teorema (inclusiones del espacio $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$)

(A) Si $1 \leq p < n$ entonces la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, $p^* = np/(n-p)$ es continua con

$$(1) \quad \ldots \qquad \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

(B) Si $p = n$ entonces la inclusión $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall q \in [n, \infty)$ es continua, con

$$(2) \quad \ldots \qquad \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

$\forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

(C) Si $p > n$ entonces la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,1-p/n}(\mathbb{R}^n)$ es continua, con

$$(3) \quad \ldots \qquad \|u\|_{C^{0,1-p/n}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

$\forall u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. En particular, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$, con $p > n$.

Dem. Se deduce directamente, por densidad, de las desigualdades de:

- GNS (caso (A))
- Morrey (caso (C))
- Teorema clase anterior (caso (B))

La inclusión continua $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$ con $p>n$ se deduce directamente de (C) ya que $C^{0,1-n/p} \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)$ $\square$

Ejercicio: mediante la aplicación del teorema de extensión se puede demostrar el siguiente

Teorema [Inclusiones de $W^{1,p}(\Omega)$]

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, y $1 \leq p < n$. Entonces se tienen las siguientes inclusiones continuas:

(A) $1 \leq p < n$: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, $p^* = np/(n-p)$
y $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(B) $p=n$: $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [n,\infty)$
con $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,n}(\Omega)$

(C) $\infty > p > n$: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})$ con
$\|u\|_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

En particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$.

¿Qué pasa si $u \in W^{k,p}(\Omega)$ con $k > 1$?
¿$u \in C^j(\bar{\Omega})$ para cierto j?

Sea $p < n/2$. Supongamos que $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$.
$\Rightarrow u, Du \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dado que $p < \frac{n}{2} < n$
por el teo. de inclusión

$$u, Du \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n). \iff u \in W^{1,p^*}(\mathbb{R}^n).$$

Pero $p^* = \frac{np}{n-p} < n$, ya que $p < \frac{n}{2}$.

Aplicando nuevamente la inclusión

$$u \in L^{(p^*)^*}(\mathbb{R}^n)$$

$$\frac{1}{(p^*)^*} = \underline{\frac{1}{p} - \frac{2}{n}}$$

Por iteración es posible demostrar el siguiente:

Teorema (inclusiones de $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ $W^{k,p}(\Omega)$)
Ω abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$, orientable.
Sean $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$, $1 \leq p < \infty$. Entonces:

(1) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$ entonces $W^{k,p}(\mathbb{R}^n_{\Omega}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n_{\Omega})$
con
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

y

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n_\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n_\Omega)}$$

$\forall u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n_\Omega)$.

(B) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} = 0$ entonces $W^{k,p}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ q \in [p, \infty)$, con

$$\|u\|_{L^q(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n})}$$

$\forall\ u \in W^{k,p}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n})$

(C) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$ entonces

$$W^{k,p}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n}) \hookrightarrow C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overset{\overline{\Omega}}{\mathbb{R}^n})$$

donde $\gamma := \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & \text{si } \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{cualquier } \gamma \in (0,1) & \text{si } \frac{n}{p} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

con

$$\|u\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\underset{\Omega}{\mathbb{R}^n})}$$

<u>Dem.</u> Ejercicio (por iteración).

(ver Kesavan.) $\square$

<u>Corolario</u> (lema de Sobolev)

Ω abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$, orientable.
Si $k > n/p$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^r(\overline{\Omega})$ para todo $r < k - [\frac{n}{p}]$, $r \in \mathbb{Z}_+$ con

$$\|u\|_{C^r(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Dem. Por la inclusión $W^{k,p} \hookrightarrow C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{\Omega})$ con $\gamma > 0$, denotamos $\gamma_0 := \left[k - \frac{n}{p}\right] > 0$

$k > \frac{n}{p}$

Además, si α multi-índice con $|\alpha| \leq r < k - \left[\frac{n}{p}\right]$ denotamos $\theta := k - \frac{n}{p} - r$.

Dado que

$$\underbrace{\|u\|_{C^{k-[n/p]-1,\gamma}(\bar{\Omega})}}_{\leq C \|u\|_{W^{k,p}}} = \sum_{|\alpha| \leq k - [\frac{n}{p}] - 1} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k - [\frac{n}{p}] - 1} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}$$

entonces tenemos que

$$\|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \forall\, |\alpha| \leq \gamma_0$$

ya que $\gamma_0 = \left[k - \frac{n}{p}\right] = k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1$

Además,

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C\, |x-y|\, \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

c.d.s. en $x, y \in \Omega$

si $|\alpha| = \gamma_0$

Concluimos que $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\gamma_0}(\bar{\Omega})$ con $\gamma_0 = \left[k - \frac{n}{p}\right]$. $\therefore$ $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{r}(\bar{\Omega})$ $\forall\, r < k - [n/p]$ $\square$

Compacidad (teorema de Rellich-Kondrachov)

Por GNS : $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$

Además $W^{1,p} \subset\subset L^q$, $\forall q \in [1, p^*)$.

Recordatorio: $X \subset\subset Y$, X, Y Banach

si (i) $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ $\forall u \in X$, $C > 0$

$(X \hookrightarrow Y)$

(ii) Toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión convergente en Y.

¿Cuál es la condición sobre $\partial\Omega$ más general?

Teorema (Rellich-Kondrachov)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$; $1 \leq p < n$.
Entonces,

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega) \quad \cdots \quad (1)$$

$\forall\ 1 \leq q < p^*$, $p^* = np/(n-p)$.

Lema (interpolación en L^p)

Sean $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ y sea θ tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$$

suponiendo que $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$, entonces:

$$u \in L^r(\Omega) \quad y \quad \|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(\Omega)} \quad \cdots (2)$$

<u>Dem.</u> usando Hölder con :

$$p := \frac{s}{\theta r}, \quad q := \frac{t}{(1-\theta) r}$$

entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\theta r}{s} + \frac{(1-\theta) r}{t} = 1$

y obtenemos :

$$\int_\Omega |u|^r dx = \int_\Omega |u|^{\theta r} |u|^{(1-\theta) r} dx$$

Hölder

$$\leq \left(\int_\Omega |u|^{\theta r p} dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |u|^{(1-\theta) r q} dx \right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_\Omega |u|^s dx \right)^{\theta r / s} \left(\int_\Omega |u|^t dx \right)^{(1-\theta) r / t}$$

$$= \|u\|^{\theta r}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{(1-\theta) r}_{L^t(\Omega)}$$

$\square$

<u>Demostración</u> (Rellich-Kondrachov)

Sea B la bola unitaria en $W^{1,p}(\Omega)$

Sea $u_m \in B$, $m \in \mathbb{N}$. $\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1$.

Por el teorema de extensión podemos suponer que:

- $\Omega = \mathbb{R}^n$
- u_m tiene soporte compacto con $\mathrm{supp}(u_m) \subset V$, $\forall m \in \mathbb{N}$, V acotada.

$$u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{supp}(u_m) \subset V.$$

Como $u_m \in B$ entonces

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = \sup \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty$$

Sea el alisamiento de u_m:

$$\begin{cases} u_m^\epsilon := \eta^\epsilon * u_m & \forall\, \epsilon > 0 \\ u_m^\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \mathrm{supp}\, u_m^\epsilon \subset\subset V \end{cases}$$

$$u_m^\epsilon(x) - u_m(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{x-z}{\epsilon}\right)\left(u_m(z) - u_m(x)\right) dz$$

$$= \int_{B_1(0)} \eta(y)\left(u_m(x-\epsilon y) - u_m(x)\right) dy$$

$$= \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[u_m(x-\epsilon t y)\right] dt\, dy$$

$$= -\epsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \left(\int_0^1 Du_m(x-\epsilon t y)\cdot y\right) dt\, dy$$

$$\Rightarrow \int_V |u_m^\epsilon(x) - u_m(x)|\, dx \leq \epsilon \int_{B_1(0)} \eta(y) \int_0^1 |Du_m|\, dt\, dy\, dx$$

$$\leq \epsilon \int_V |Du_m(z)|\, dz$$

Por densidad (teo. de aproximación local) esta estimación también si $u_m \in W^{1,p}(V)$:

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq \epsilon \|Du_m\|_{L^1(V)}$$

como V es acotado:

$$\int_V |Du_m|\, dx \leq \left(\int_V |Du_m|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_V dx\right)^{1/q}$$

$$\leq C(V) \|Du_m\|_{L^p(V)}$$

$$\therefore \quad \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)} \leq C\epsilon \|Du_m\|_{L^p(V)}$$

Dado que $u_m \in W^{1,p}(V)$ y

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}(V)} < \infty$$

obtenemos $\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)} \longrightarrow 0$ si $\epsilon \to 0^+$

uniformemente en $m \in \mathbb{N}$.

Ahora, usando $1 \leq q < p^*$, aplicamos el lema de interpolación:

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta} \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

donde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$, $0 < \theta < 1$

(tomar $r = q$, $s = 1$, $t = p^*$. Nótese que $u \in W^{1,p} \Rightarrow u \in L^{p^*}$ por GNS)

Aplicando GNS:

$$\|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq C \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta} \|Du_m^\epsilon - Du_m\|_{L^p}^{1-\theta}$$

$$\leq \tilde{C} \|u_m^\epsilon - u_m\|_{L^1(V)}^{\theta}$$

$\sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_{W^{1,p}} < \infty$

$\downarrow$

0 si $\epsilon \to 0^+$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$.

Concluimos que:

$$\begin{cases} u_m^\epsilon \longrightarrow u_m \text{ en } L^q(V) \text{ si } \epsilon \to 0^+ \\ \text{uniformemente en } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Por demostrar:

(Eq) $\begin{cases} \forall \epsilon > 0 \text{ fijo la sucesión } \{u_m^\epsilon\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ es} \\ \text{una familia acotada y equicontinua} \end{cases}$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$|u_m^\epsilon(x)| \leq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)\,|u_m(y)|\,dy$$

$$\leq \frac{C}{\epsilon^n} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{\tilde{C}}{\epsilon^n} < \infty$$

$|\eta^\epsilon| \leq \frac{C}{\epsilon^n}$

ya que $\|u_m^\epsilon\|_{L^1}$ convergen uniformemente en $m \in \mathbb{N}$ a $\|u_m\|_{L^1}$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Similarmente:

$$|Du_m^\epsilon(x)| \leq \frac{C}{\epsilon^{n+1}} \|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{\tilde{C}}{\epsilon^{n+1}} < \infty$$

Así, dado $\tilde{\delta} > 0$ existe un conjunto abierto $\mathcal{O}$ tal que

$$|u_m^\epsilon(x) - u_m^\epsilon(y)| \leq \frac{C}{\epsilon^{n+1}} |x-y| < \tilde{\delta}$$

siempre que $|\mathcal{O}| < \frac{1}{2}\tilde{\delta}\epsilon^{n+1}$, con $\epsilon > 0$ fijo $\forall x, y \in \mathcal{O}$. Esto prueba (Eq)

Ahora, sea $\delta > 0$. Vamos a probar que $\exists$ subsucesión $\{u_{m_j}\}$ tal que

$$\limsup_{j,k \to \infty} \|u_{m_j} - u_{m_k}\|_{L^q(V)} \leq \delta$$

Dado que $u_m^\epsilon \longrightarrow u_m$ en $L^q(V)$ uniformemente en $m \in \mathbb{N}$ cuando $\epsilon \to 0$, entonces podemos escoger $\epsilon > 0$ tal que

$$\| u_m^\epsilon - u_m \|_{L^q(V)} < \frac{1}{2}\delta \qquad \underline{\underline{\forall\, m \in \mathbb{N}}}$$

Como $\operatorname{supp}(u_m^\epsilon), \operatorname{supp}(u_m) \subset V$ acotado $\forall m, \forall \epsilon$, y como para $\epsilon > 0$ fijo, $\{u_m^\epsilon\}$ es equicontinua y acotada, entonces por el teorema de Arzelá-Ascoli existe subsucesión u_{m_j} que converge uniformemente en $C(\bar{V})$. En particular,

$$\| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon \|_{L^q(V)} \leq C \| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon \|_{L^1(V)}^\theta$$

$$\leq C |V|^\theta \underbrace{\sup_{x \in V} | u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon |}_{\to 0 \text{ si } \epsilon \to 0^+}$$

(Arzelá-Ascoli)

$$\therefore \quad \limsup_{j,k \to \infty} \| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon \|_{L^q(V)} = 0 .$$

Esto implica:

$$\limsup_{j,k \to \infty} \| u_{m_j} - u_{m_k} \|_{L^q(V)} \leq$$

$$\leq \limsup_{j,k \to \infty} \Big(\| u_{m_j} - u_{m_j}^\epsilon \|_{L^q} + \| u_{m_j}^\epsilon - u_{m_k}^\epsilon \|_{L^q} + \| u_{m_k}^\epsilon - u_{m_k} \|_{L^q} \Big)$$

$$< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \frac{3}{2}\delta$$

Finalmente, por el proceso diagonal de Cantor, escogemos $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

y extraemos una subsución $\{u_{m_{j_\ell}}\}$ tal que

$$\lim_{h,s\to\infty} \sup \| u_{m_{j_h}} - u_{m_{j_s}} \|_{L^q(V)} = 0.$$

$\Rightarrow$ $\exists$ subsución $\tilde{u}_\ell$ que converge en $L^q(V)$ (y por ende, en $L^q(\Omega)$).

Falta verificar que $\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

Por GNS, $u \in L^{p^*}$ con $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$

y por el lema de interpolación

$$u \in L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [p, p^*]$$

(Misma demostración que en $\mathbb{R}^n$.)

Como Ω es acotado, siempre tenemos

$$u \in L^p(\Omega) \text{ entonces } u \in L^q(\Omega) \text{ si } 1 \leq q < p.$$

$$\therefore \quad W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

$\square$

Corolario 1 Dado que $p^* = \frac{np}{n-p} > p$

si $1 \leq p < n$ y además $p^* \to \infty$ si $p \to n^-$
obtenemos

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega) \quad \forall\, 1 \leq p < \infty$$

Si $\partial\Omega \in C^1$, Ω acotado, abierto

(Para $n < p < \infty$ esto se puede demostrar aplicando la desigualdad de Morrey (ejercicio)).

Corolario 2 $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$.

Observaciones :

(A) Si el dominio no es acotado entonces no hay compacidad de la inclusión en general.

Contraejemplo : sea $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$
$I_j = (j, j+1)$, $j \in \mathbb{N}$

sea $f \in C^1(\mathbb{R})$, con $\operatorname{supp}(f) \subset I$
Sea f_j la misma función trasladada a I_j.

Podemos normalizar (sin pérdida de generalidad) f tal que $\|f_j\|_{W^{1,p}(I_j)} \equiv 1 \quad \forall j$.

f_j es acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

$f \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^q(\mathbb{R}) \quad \forall \ 1 \leq q \leq \infty$
y $supp(f) \subset I$

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^q(I)} =: a > 0.$$

Si $j \neq k$ $\quad \|f_j - f_k\|_{L^q(\mathbb{R})} = 2^{1/q} a$

$\therefore \{f_j\}$ no puede tener una subsucesión convergente en L^q.

(B) Si $q = p^*$ la inclusión no es compacta en general.

Contraejemplo: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado, abierto y conexo, tal que $0 \in \Omega$.

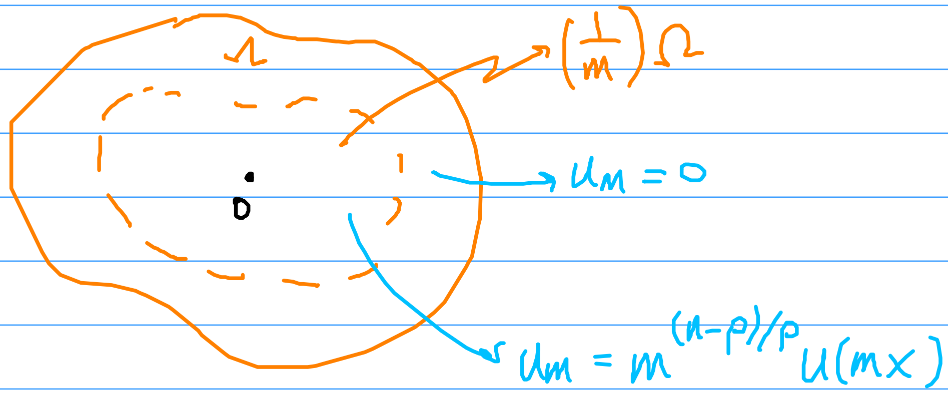
Sea $\lambda\Omega := \{\lambda x : x \in \Omega\} \subset \Omega$
si $0 < \lambda < 1$.

Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = 1$.

$\left(W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) \right.$, normalizamos $)$

Para $m \geq 1$, se define:

$$u_m(x) := \begin{cases} m^{(n-p)/p} u(mx), & x \in \left(\frac{1}{m}\right)\Omega \\ 0, & \text{otro caso: } x \in \Omega \setminus \left(\frac{1}{m}\right)\Omega \end{cases}$$



Entonces:

(i) $\quad \|Du_m\|_{L^p(\Omega)} = \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\, m \geq 1$

(ii) $\quad \|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \equiv 1 \quad \forall\, m \geq 1$

(ejercicio)

Se puede verificar que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ (GNS), pero la inclusión no es compacta: u_m no tiene ninguna subsucesión que converge en $L^{p^*}(\Omega)$. (ejercicio).