Sección 4: Formulación variacional de problemas elípticos.

4.1 Operadores elípticos.

Operadores diferenciales lineales de orden $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$, de la forma:

$$L := \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha \qquad \cdots \quad (L)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multi-índice, $|\alpha| = \sum \alpha_j$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $a_\alpha = a_\alpha(x)$ coeficientes de L (reales o complejas). $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$

Def: La forma característica del operador L de la forma (1) en $x \in \Omega$ es el polinomio homogéneo de orden k en $\mathbb{R}^n$ definido como:

$$(2) \cdots \quad P_L(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$$

Un vector $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, se denomina característico con respecto al operador L en $x \in \Omega$ si $P_L(x, \xi) \neq 0$.

El conjunto de todos los vectores $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, característicos en $x \in \Omega$ se denomina la variedad característica de L en x y se denota:

$$\mathrm{char}_x(L) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi \neq 0,\ P_L(x,\xi) \neq 0 \}$$

(3) ....

Def. Un operador diferencial L de orden $k \geq 1$ es elíptico en $x \in \Omega$ si la variedad característica de L en $x \in \Omega$ es vacía:

$$\mathrm{char}_x(L) = \emptyset$$

El operador L es elíptico en Ω si es elíptico en x, $\forall x \in \Omega$.

Ejemplos:

(A) Operador de Laplace: $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$.

$$P_L(x,\xi) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = |\xi|^2 \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$\therefore$ Δ es elíptico en $\mathbb{R}^n$.

(B) El operador de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$,

$$L = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \qquad (= \partial_{\bar{z}})$$

es elíptico en $\mathbb{R}^2$.

$$P_L(x, y, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2) \neq 0$$
$$\text{si } (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0).$$

Los operadores elípticos de orden impar <u>no</u> son comunes.

<u>Proposición</u> Sea un operador L de orden $k \geq 1$, elíptico en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces: si $n \geq 3$, o si $n = 2$ y además $a_\alpha(x_0) \in \mathbb{R}$ $\forall\, |\alpha| = k$, entonces k es par.

<u>Demostración</u> Por elipticidad en x_0:

$$P_L(x_0, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x_0)\, \xi^\alpha \neq 0$$

$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$.

Sea $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\tilde{\xi} \neq 0$.
Sea el polinomio:

$$P_{\tilde{\xi}}(z) := P_L(x_0, \underbrace{\tilde{\xi}, z}_{\xi}), \qquad z \in \mathbb{C}$$

Sea $n^+(\tilde{\xi}) :=$ # de ceros de $P_{\tilde{\xi}}$ con parte imaginaria positiva
$n^-(\tilde{\xi}) :=$ # de ceros de $P_{\tilde{\xi}}$ con parte imaginaria negativa.

Dado que $P_{\tilde{\xi}}(z) \neq 0$ si $z \in \mathbb{R}$ se tiene que necesariamente $n^+(\tilde{\xi}) + n^-(\tilde{\xi}) = k$.
$\forall\, \tilde{\xi} \neq 0.$

Teo. de Rouché: f, g analíticas dentro y sobre $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ contorno cerrado, tales que $|f(z)| < |g(z)|$ sobre $\mathcal{C}$. Entonces f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros dentro de $\mathcal{C}$.

$n^+(\tilde{\xi})$ y $n^-(\tilde{\xi})$ son localmente constantes en $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Si $n \geq 3$ entonces $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ es conexo.

$\therefore$ $n^+(\tilde{\xi})$ y $n^-(\tilde{\xi})$ son constantes $\forall \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ si $n \geq 3$

Pero: $n^+(\tilde{\xi}) = n^-(-\tilde{\xi})$ ya que

$$P_L(x_0, \tilde{\xi}, z) = (-1)^k P_L(x_0, -\tilde{\xi}, -z)$$

tiene $n^+(\tilde{\xi})$ raíces con $\operatorname{Im} z > 0$ — tiene $n^+(\tilde{\xi})$ raíces con $\operatorname{Im}(-z) < 0$

$$\therefore \; n^+(\tilde{\xi}) = n^-(-\tilde{\xi})$$

$$\Rightarrow \; k = 2n^+(\tilde{\xi}) \quad \therefore \quad k \text{ es par.}$$

Si $n = 2$ y $a_\alpha(x_0) \in \mathbb{R}$, tenemos

$$P_L(x_0, \xi_1, \xi_2) = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=k \\ \alpha_j \geq 0}} \underbrace{a_\alpha(x_0)}_{\in \mathbb{R}} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \neq 0 \quad \text{si } \xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$$

y dado que el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ es conexo entonces o bien $P_L(x_0, \xi_1, \xi_2) > 0$, ó

$P_L(x_0,\xi_1,\xi_2) < 0$, $\quad \forall (\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$.

[Si no fuera así habría un cambio de signo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por continuidad $\exists$ $(\xi_1,\xi_2) \neq (0,0)$ tal que $P_L(x_0,\xi_1,\xi_2) = 0$, contradicción con elipticidad).

Pero, $P_L(x_0,-\xi_1,-\xi_2) = (-1)^k P_L(x_0,\xi_1,\xi_2)$ y tienen el mismo signo

$\therefore$ k es par

$\square$

<u>Definición</u> Un operador diferencial de orden k

$$L = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

con coeficientes $a_\alpha \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, es <u>fuertemente elíptico</u> en $\bar{\Omega}$ si existen una función de clase C^1, $\gamma \in C^1(\bar{\Omega};\mathbb{C})$ con $|\gamma| = 1$, y una constante $\theta > 0$ tales que

$$(4)\cdots \quad \operatorname{Re}\left[\gamma(x) \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha\right] \geq \theta|\xi|^k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \bar{\Omega}$$

Nota: L fuertemente elíptico $\Rightarrow$ L elíptico.

Observación: Si $a_\alpha(x) \in \mathbb{R}$ entonces $k = 2m$ (par) con $m \geq 1$. En este caso podemos seleccionar $\gamma(x) \equiv \pm 1$, y dado que

$Lu = f$ es equivalente a $(-1)^m \gamma Lu = (-1)^m \gamma f$
normalizamos el operador L de la siguiente manera:

$$(*) \qquad (-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geq \theta |\xi|^{2m} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

$(*)$ es la definición de L fuertemente elíptico con $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

(A) $-\Delta$ es fuertemente elíptico. Δ no.

$k = 2 \Rightarrow m = 1$

$$(-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = |\xi|^2$$

$a_\alpha = -1, \ \alpha = (0, \dots, 2, \dots)$
$a_\alpha = 0,$ otro caso

Satisface $(*)$ con $\theta = 1$, $m = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Claramente, Δ no satisface $(*)$.

(B) El operador biarmónico

$$\Delta^2 u := \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_j}^2 \partial_{x_i}^2 u$$

es fuertemente elíptico. Operador de orden $k = 4 = 2m \Rightarrow m = 2$.

$$a_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = (0, \dots, \overset{i \neq j}{2, \dots, 2}, \dots, 0) \\ & \text{ó } \alpha = (0, \dots, \underset{i=j}{4}, \dots, 0) \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Así,

$$(-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = \sum_{|\alpha|=4} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i^2 \xi_j^2 \geq \frac{1}{2}|\xi|^4$$

$\underline{n=2}$ $\quad \xi_1^4 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^4 \geq \frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2)^2$

$\underline{n=3}$ $\quad \xi_1^4 + \xi_2^4 + \xi_3^4 + \xi_1^2\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_3^2 + \xi_2^2\xi_3^2$

$$\geq \frac{1}{2}(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^2$$

$\therefore$ Δ^2 satisface $(*)$.

Δ^2 aparece en teoría de elasticidad.

(c) Operador general de 2o. orden:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)\, u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u$$

$a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$

L es fuertemente elíptico ssi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\,\xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

con $\theta > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Forma de Dirichlet

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto. Sea el operador

$$L = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

de orden $k = 2m$, fuertemente elíptico en $\bar{\Omega}$, $a_\alpha \in C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$.

$$(*) \Rightarrow \quad (-1)^m \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \geq \theta |\xi|^{2m}$$

$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \bar{\Omega}$.

El producto interno de $L^2(\Omega)$ es:

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_\Omega u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

<u>Definición</u> El adjunto formal de L es

$$L^* v := \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_\alpha(x) v \right)$$

$x \in \bar{\Omega}$.

Integración por partes : $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces

$$\langle v, Lu \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\, \overline{Lu(x)}\, dx$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq 2m} \int_\Omega v(x)\, a_\alpha(x)\, \overline{D^\alpha u(x)}\, dx$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha \left(a_\alpha(x) v(x)\right) \overline{u(x)}\, dx$$

$$= \langle L^* v, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Nota: la parte principal de L^* es

$$\sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

Corolario L es fuertemente elíptico ssi L^* es fuertemente elíptico.

Integrando por partes sólo m veces :

$$\langle v, Lu \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v(x)\, \overline{Lu(x)}\, dx$$

$$= \int_\Omega v(x) \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x)\, D^\alpha \overline{u(x)}\, dx$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \int_\Omega D^\alpha v(x)\, a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta \overline{u}(x)\, dx$$

$$= \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \langle D^\alpha v, a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \dots (6)$$

El lado derecho de (6) es una forma sesquilineal (lineal en v y lineal conjugada en u)

$$a(v,u) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} \langle D^\alpha v, a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$a_{\alpha\beta} \in C^m(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$$

A esta forma se le llama la forma de Dirichlet de orden m del operador L: satisface

$$a(v,u) = \langle v, Lu \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\forall\, u,v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Ejemplos:

(A) $L = -\Delta$

Si $u,v \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces

$$\langle v, Lu \rangle_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega v \Delta u \, dx$$

$$= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx =: a(v,u)$$

Forma de Dirichlet.

(b) $L = \Delta^2$ biarmónica

Si $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces

$$\langle v, \Delta^2 u \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v \, \Delta^2 u \, dx$$

int. por partes 2 veces

$$= \int_\Omega \Delta v \, \Delta u \, dx = a(v,u)$$

Forma de Dirichlet

Un operador puede tener más de una forma de Dirichlet asociada:

En $\mathbb{R}^2$ $(n=2)$ otra forma de Dirichlet de Δ^2 es

$$\tilde{a}(v,u) = \langle (\partial_x^2 - \partial_y^2) v, (\partial_x^2 - \partial_y^2) u \rangle_{L^2(\Omega)} + 4 \langle \partial_x \partial_y v, \partial_x \partial_y u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

(Ejercicio.)

Def. una forma sesquilineal $a(\cdot,\cdot)$ es una forma de Dirichlet asociada al operador L si

$$a(v,u) = \langle v, Lu \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \, u, v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Operador general de 2o. orden: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto,

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad \cdots (7)$$

$a^{ij}, b^i, c \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$

El operador L en (7) tiene forma de divergencia.

Forma no divergente: $\tilde{b}^i := b^i - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} a^{ij}(x) \in C(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$

$$\Rightarrow Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j x_i} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad \cdots (8)$$

(7) divergente – útil para métodos de energía

(8) no divergente – principios del máximo.

L fuertemente elíptico ssi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Si $u,v \in C_0^\infty(\Omega)$ calculamos $(u,v \in \mathbb{R})$

$$\langle v, Lu\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v\left[-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu\right]$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) v_{x_j} u_{x_i} \, dx \; +$$

$$+ \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} b^i(x) v u_{x_i} + c(x) u v\right] dx$$

$$=: a(v,u)$$

Nótese que a no es simétrica:

$$a(u,v) \neq a(v,u).$$

Formulación débil

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.
Problema: hallar la solución u a

$$(1)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde f es conocida ($f \in C(\bar{\Omega})$, por ejemplo). Si existe solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ de (1) se le llama <u>solución clásica</u>.

Suponemos que : • $f \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$

• $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es solución clásica.

Multiplicamos por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integramos por partes:

$$-\int_\Omega \Delta u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot \hat{\nu} \, dS_x}_{=0, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)}$$

$$= \int_\Omega f \varphi \, dx$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solución de (1) $\Rightarrow u_{|\partial\Omega} = 0$.

$$\therefore \begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega) \\ \text{con } \gamma_0 u = u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ denso en $H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

con $u \in H_0^1(\Omega)$.

La formulación débil o variacional de (1) es:

(2) ... $\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ y dada } f \in L^2(\Omega) \end{cases}$

Observaciones:

(A) una solución distribucional está en $L^1_{loc}(\Omega)$ y satisface

$$-\int_\Omega u \Delta \varphi \, dx = \langle f, \varphi \rangle_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

es decir,

$$-\langle u, \Delta\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

en sentido de distribuciones.

(B) (2) se denomina "variacional" pues es equivalente al principio de Dirichlet (trabajo virtual):

(3) ... $\begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ J[u] = \min\limits_{v \in H_0^1(\Omega)} J[v] \\ J[v] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \quad v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

(c) Nótese que el espacio es $H_0^1(\Omega)$, no es $H^2(\Omega)$. No requerimos información sobre las segundas derivadas.

Definición Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución de (2) se dice que u es solución débil del problema de Dirichlet (1).

Lema La solución débil de (2) con $f \in L^2(\Omega)$ minimiza el funcional cuadrático $J[\cdot]$.

Dem. Se sigue del resultado general con $H = H_0^1(\Omega)$. $\square$

Lema 1 La forma bilineal

$$(4) \quad \begin{cases} a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{cases}$$

es un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ cuya norma asociada es equivalente a la norma $\|\cdot\|_{H^1}$.

Dem. Se probó en la sección 3 (por Poincaré) $\square$

$\|u\|_\nabla^2 := a(u,u)$ norma asociada a $a(\cdot,\cdot)$.

Lema 2 Para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución $u \in H_0^1(\Omega)$ débil del problema (2).

Dem. Para $f \in L^2(\Omega)$, se define un funcional en $H_0^1(\Omega)$, lineal continuo

$$\langle f, u \rangle = \int_\Omega f u \, dx = \langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Funcional lineal acotado en $H_0^1(\Omega)$.

$a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ por Riesz $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = a(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Además
$$\|f\|_{H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)} = \|f\|_* = \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

u es la única solución débil de (2) $\square$

Observaciones:

(A) Mismo resultado si $f \in H^{-1}(\Omega)$.

(B) Si sabemos a priori que la solución débil es regular:
si $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ entonces

- $\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega} = 0.$
- $$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx}_{a(u,\varphi)} = \int_\Omega f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\int_\Omega \Delta u \, \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

es decir, $-\Delta u = f$ en sentido de distribuciones.

$C_0^\infty(\Omega)$ denso en $L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega (f + \Delta u) v \, dx = 0 \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

$f \in L^2(\Omega)$

$u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \Rightarrow \Delta u \in L^2(\Omega)$

Tomando $v = f + \Delta u$ obtenemos

$$\| f + \Delta u \|_{L^2}^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\Delta u = f \quad \text{c.d.s. en } \Omega$$

$u \in C^2(\Omega) \Rightarrow$ la solución es clásica.