Lección 4.3: Problema de Neumann (continuación). Problemas mixtos.

Demostración: (a) y (c) son consecuencia de los lemas anteriores.

(b) En la lección 1.5 se probó el sig. teorema: $(H, \langle , \rangle)$ real, $K \subseteq H$ cerrado y convexo, $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal continua, simétrica y H-elíptica $\Rightarrow \exists!\ u \in K$ tal que $a(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall v \in K$ y con $f \in H$ dado. Además $u \in K$ está determinado por la fórmula variacional: $u \in K$, $J[u] = \min_{v \in K} J[v]$ con $J : H \to \mathbb{R}$, $J[v] = a(v,v) - \langle f, v \rangle$

Aquí: $H = H^1(\Omega)$, $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \alpha(x) u v \, dx$

$K \equiv H^1(\Omega)$

Hemos probado que $a(\cdot,\cdot)$ es continua, simétrica y $H^1(\Omega)$-elíptica [por coercividad, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$]. Por el teorema obtenemos (b): la solución débil $u \in H^1(\Omega)$ $a(u,v) = \langle f, v \rangle \ \forall v \in H^1(\Omega)$, es el mínimo del problema

$$u \in H^1(\Omega), \quad J[u] = \min_{v \in H^1(\Omega)} J[v]$$

$$J[v] = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \alpha(x) v^2 \right) dx - \int_\Omega f v \, dx$$

(d) Supongamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución clásica del problema de Neumann. Entonces si $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ mult. e integrando

$$\int_\Omega (-\Delta u + \alpha(x) u) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

$u \in C^2(\bar{\Omega}) \Rightarrow$ podemos integrar por partes

$$\underbrace{\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x) v u) \, dx}_{a(u,v)} - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

u solución clásica, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Así,

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ denso en $H^1(\Omega)$. $\therefore$ $u \in C^2(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ es la solución débil $\square$

<u>Observación</u> El espacio natural para resolver el problema de Neumann podría ser

$$\overline{N}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} \quad \text{con} \quad N = \left\{ v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) : \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}$$

Ejercicio : Probar que $\overline{N}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = H^1(\Omega)$.

Problema de Neumann coercivo, no homogéneo

Consideramos el problema:

$$(1) \cdots \begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\overset{\partial\Omega \in C^1}{\smile}$, $\alpha \in C(\bar{\Omega})$ con $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ son conocidas.

Método similar: suponemos que $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$. Simplemente modificamos el funcional; sea

$$(2) \cdots \begin{cases} l \in H^1(\Omega)^* \\ l(v) := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, \gamma_0(v) \, dS_x \end{cases}$$

Teorema (prob. de Neumann coercivo, no homogéneo para $L = -\Delta$)

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. $\alpha \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \ \forall x \in \bar{\Omega}$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$. Se define $l \in H^1(\Omega)^*$ mediante (2). Entonces:

(a) Existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ al problema

$$(3) \cdots \begin{cases} a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \alpha(x) u v \, dx \end{cases}$$

(b) Dicha solución es el único mínimo de

$$(4) \cdots \begin{cases} u \in H^1(\Omega), \quad J[u] = \min_{v \in H^1(\Omega)} J[v] \\ J[v] = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + \alpha(x) v^2 \right) dx - \ell(v) \end{cases}$$

(c) Si además la solución débil satisface $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ entonces u es solución clásica de (1).

(d) Inversamente, si $w \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución clásica de (1) entonces coincide con la solución débil $w = u \in H^1(\Omega)$, de (3).

Dem. (a) Sabemos que $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, continua y $H^1(\Omega)$-elíptica. Así, $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno equivalente a $\langle , \rangle_{H^1}$. Por el teo. de Riesz: $\exists!\ u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

(solución débil, única).

(b) Por Riesz: $\exists!\ w_\ell \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\ell(v) = \langle w_\ell, v \rangle_{H^1} \quad \forall\ v \in H^1(\Omega).$$

Aplicando el teorema de la sección 1 con $H = H^1(\Omega)$, $K \equiv H^1(\Omega)$ (convexo y cerrado) y $J[v] = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle w_\ell, v\rangle_{H^1} = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$ para obtener la conclusión.

(c) Suponiendo que $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ es la solución débil de (3). Entonces $\forall\ v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x) u v\right) dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_{\partial\Omega} g v\, dS_x$$

$\gamma_0(v) = v_{|\partial\Omega}$
$v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

Integrando por partes:

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + \alpha(x) u - f\right) v\, dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\right) v\, dS_x = 0 \quad \forall\ v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

Si tomamos $v \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ entonces

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + \alpha(x) u - f\right) v\, dx = 0 \quad \forall\ v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por el teo. de localización $-\Delta u + \alpha(x)u - f = 0$ c.d.s. en Ω.

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g\right) v \, dS_x = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$$

Lema (clase anterior): $\int_{\partial\Omega} h v \, dS_x = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$

$\Rightarrow h = 0$ c.d.s. en $\partial\Omega$

concluimos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ c.d.s. en $\partial\Omega$.

$\therefore$ u es solución clásica de (1)

(a) Si suponemos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es solución de (1) entonces:

- $u \in C^2(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$
- Integrando por partes es fácil verificar que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha(x) u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g v \, dx$$

$\forall v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$

$\Rightarrow \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$\therefore$ u es <u>la</u> solución débil $\square$

Problema de Neumann semicoercivo

¿Qué pasa si $\alpha(x) \equiv 0$? Hay una diferencia importante: el problema de Neumann

$$(1) \cdots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

no está bien planteado. Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución de (1) y $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$, por ejemplo, podemos integrar por partes

$$\int_\Omega f \, dx = -\int_\Omega \Delta u \, dx = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x$$
$$= -\int_{\partial\Omega} g \, dS_x$$

una condición necesaria para la $\exists$ de la solución es la sig. condición de compatibilidad

$$(2) \cdots \quad \int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, dS_x = 0.$$

Para f, g arbitrarias podría no haber solución. Incluso cumpliéndose (2), la solución no es única: para cualquier constante $C \in \mathbb{R}$, $u + C$ es solución de (1) si u lo es.

Por demostrar: (2) es necesaria y suficiente para la existencia de una sol. débil. Además, cualesquiera dos soluciones difieren únicamente por una constante.

Sea el espacio:

$$(3)\ldots \qquad V := \left\{ v \in H^1(\Omega) \; : \; \int_\Omega v \, dx = 0 \right\}$$

Es fácil verificar que $(V, \langle , \rangle_{H^1})$ es un subespacio de Hilbert de $(H^1(\Omega), \langle , \rangle_{H^1})$.

Recordamos Poincaré-Wirtinger: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, conexo, $\partial\Omega \in C^1$, $1 \le p < \infty$, entonces

$$\| u - \langle u \rangle_\Omega \|_{L^p(\Omega)} \le C \, \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$

$\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, $C = C(\Omega, p, n) > 0$ y donde

$$\langle u \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx$$

Bajo este esquema el problema se vuelve coercivo.

Teorema Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo, $\partial\Omega \in C^1$. Sean $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ conocidas, tales que satisfacen la condición de compatibilidad (2). Entonces:

(a) Existe una única solución debil $u \in V$ (donde V definido en (3)) tal que

$$(4)\cdots\begin{cases} a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ \ell(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, \gamma_0(v) \, dS_x \end{cases}$$

(b) Esta solución débil $u \in V$ es el único mínimo de

$$(5)\cdots\begin{cases} u \in V, \quad \min_{v \in V} J[v] = J[u] \\ J[v] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \ell(v) \end{cases}$$

(c) Si la solución débil es tal que $u \in V \cap C^2(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ entonces es solución clásica de (1), que además satisface $\int_\Omega u \, dx = 0$.

cualquier otra solución clásica de (1) es de la forma $u + c$ con c constante

(d) Inversamente, si $w \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución clásica de (1) entonces

$$w - \langle w \rangle_\Omega = u \in V \subset H^1(\Omega)$$

es la (única) solución débil de (4).

Dem. (a) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ subespacio de Hilbert de $H^1(\Omega)$. Entonces

$$a(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

es simétrica, continua y V-elíptica.

Simetría y continuidad son claras. La V-elipticidad es consecuencia de Poincaré-Wirtinger:

$$\| u - \langle u \rangle_\Omega \|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

$$\therefore \quad a(v,v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \frac{1}{1+C^2} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

Claramente, si $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ entonces

$$\ell \in V^* \text{ donde } \ell(v) := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \quad \forall v \in V.$$

Por el teo. de Riesz, $\exists!$ $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V.$$

(b) Aplicamos el teo. de la sección I al espacio de Hilbert $(V, \langle , \rangle_{H^1})$ con $K \equiv V$ (cerrado y convexo), $a(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$ continua, simétrica y V-elíptica para concluir que la sol. débil $u \in V$ satisface

$$\min_{v \in V} J[v] = J[u]$$

$$J[v] = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$$

(c) Si $u \in V \cap C^2(\bar{\Omega})$ es la solución débil de (4) entonces :

- $\forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$, $v - \langle v \rangle_\Omega \in V$
- $a(u, \underbrace{v - \langle v \rangle_\Omega}_{\in V}) = \ell(v - \langle v \rangle_\Omega)$

ssi $$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f (v - \langle v \rangle_\Omega) \, dx + \int_{\partial\Omega} g (v - \langle v \rangle_\Omega) \, dx$$

$$= \ell(v) - \langle v \rangle_\Omega \underbrace{\left[\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, dS_x \right]}_{=0 \text{ por (2)}}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u - f) v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - g \right) dS_x$$

$\forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

De manera análoga esto implica que

$$-\Delta u = f \quad \text{c.d.s. en } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{c.d.s. en } \partial\Omega$$

$\therefore$ u es solución de (1) y además $\int_\Omega u\,dx = 0$.

Sea $\tilde{u} \in C^2(\bar{\Omega})$ otra solución clásica de (1). Entonces,

$$-\Delta(u-\tilde{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega$$
$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u-\tilde{u}) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Mult. por $u-\tilde{u}$ e integranas por partes

$$\int_\Omega |\nabla(u-\tilde{u})|^2\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u} = u + C \quad \text{c.d.s. en } \Omega.$$

(d) Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución de (1) entonces claramente

- $\tilde{u} := u - \langle u \rangle_\Omega \in V \subset H^1(\Omega)$
- $$-\Delta \tilde{u} = f \quad \text{en } \Omega$$
  $$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = g \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Mult. por $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ e integrando por partes

$$\int_\Omega \nabla\tilde{u}\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx + \int_{\partial\Omega} g v\,dS_x$$
$$\forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

Por densidad de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$:

$$a(\tilde{u}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$\Rightarrow$ $\tilde{u} = u - \langle u \rangle_\Omega$ coincide con la única sol. débil de (4) en $\tilde{V}$.

$\square$

Problemas mixtos

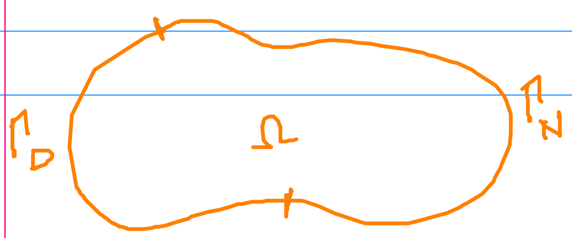
Analizaremos dos situaciones:

- Condiciones de Dirichlet y Neumann en porciones distintas de $\partial\Omega$
- condiciones tipo Robin

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo con frontera $\partial\Omega \in C^1$ tal que

$$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \quad |\Gamma_D|, |\Gamma_N| > 0$$

$$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \phi$$



Datos:
- $f \in L^2(\Omega)$
- $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$
- $h \in L^2(\partial\Omega)$

Problema mixto:

$$(1)\ldots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \Gamma_D \subset \partial\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = h & \text{sobre } \Gamma_N \subset \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicaciones: material elástico fijo en una porción $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ ($g=0$, por ejemplo) donde una densidad superficial de fuerzas h se conoce en $\Gamma_N \subset \partial\Omega$.

Se define:

$$(2)\ldots \quad V_D := \{ v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v)_{|\Gamma_D} = 0 \}$$

Claramente V_D es un subespacio lineal de $H^1(\Omega)$.

Lema $(V_D, \langle , \rangle_{H^1})$ es un subespacio de Hilbert de $(H^1(\Omega), \langle , \rangle_{H^1})$.

Dem. $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{rango}(\gamma_0)$
$\subseteq L^2(\partial\Omega)$
es un operador continuo y compacto.

Sea una sucesión de Cauchy en V_D.
$\|v_j - v_k\|_{H^1(\Omega)} \to 0$ si $j \to \infty$, con $v_j \in V_D$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

Por continuidad de la traza:

$$\|\gamma_0(v_j) - \gamma_0(v_k)\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{v_j \in V_D}{=} \|\gamma_0(v_j - v_k)\|_{L^2(\Gamma_D)}$$

$$\leq C \|v_j - v_k\|_{H^1(\Omega)} \to 0$$

si $j, k \to \infty$

$\Rightarrow$ $\gamma_0(v_j)$ es de Cauchy en $L^2(\partial\Omega)$ completo.

$\Rightarrow$ $\exists$ $\theta \in L^2(\partial\Omega)$ tal que $\gamma_0(v_j) \to \theta$ en $L^2(\partial\Omega)$.

$\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset V_D \subset H^1(\Omega)$ es de Cauchy

$\Rightarrow$ $\exists$ $v = \lim_{j\to\infty} v_j$ en $H^1(\Omega)$

Además, $\gamma_0(v_j) \to \theta$ en $L^2(\partial\Omega)$; esto implica que $\gamma_0(v) = \theta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Pero

$$\underbrace{\|\gamma_0(v) - \gamma_0(v_j)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}_{\to 0} = \underbrace{\|\gamma_0(v) - \gamma_0(v_j)\|^2_{L^2(\Gamma_D)}}^{=0,\ v_j \in V_D} + \|\gamma_0(v) - \gamma_0(v_j)\|^2_{L^2(\Gamma_N)}$$

$$\therefore \quad \|\gamma_0(v)\|^2_{L^2(\Gamma_D)} = \|\gamma_0(v) - \gamma_0(v_j)\|^2_{L^2(\Gamma_D)} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $\gamma_0(v)|_{\Gamma_D} = 0$ c.d.s. $\Rightarrow$ $v \in V_D$ $\square$

Lema auxiliar (Poincaré, versión 5)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo, con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $V \subset W^{1,p}(\Omega)$, subespacio, $1 \leq p < \infty$, cerrado con la propiedad de que: la única función constante en V, $v \equiv c_0$ c.d.s. en V, es la función cero, $c_0 = 0$. Entonces existe $C = C(n, p, \Omega) > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Dv\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in V$$

Dem. Ejercicio. Aplicar Rellich-Kondrachov (por contradicción) $\square$

Teorema Mismas hipótesis sobre Ω, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, $h \in L^2(\partial\Omega)$. Entonces:

(a) $\exists!$ solución $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$(3) \quad \begin{cases} u \in H^1(\Omega), & \gamma_0(u)_{|\Gamma_D} = g_{|\Gamma_D} \\ a(u,v) = \ell(v), & \forall v \in V_D \end{cases}$$

donde: $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

$$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_N} h \, \gamma_0(v) \, dS_x$$

Además esta solución débil es solución del problema:

$$(4) \quad \begin{cases} u \in K_g , \quad J[u] = \min\limits_{v \in K_g} J[v] \\ J[v] := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \ell(v) \\ K_g := \{ v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v)_{|\Gamma_D} = g_{|\Gamma_D} \} \end{cases}$$

(b) Supongamos que $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ tiene la suficiente regularidad (basta $\Gamma_D \in C^2$) de manera que se cumple la condición

$$(*) \begin{cases} \underline{Y_N} := \{ v_{|\Gamma_N} : v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), v = 0 \text{ sobre } \Gamma_D \} \\ \text{es } \underline{\text{denso}} \text{ en } L^2(\Gamma_N) . \end{cases}$$

Entonces, si la solución débil de (3) satisface $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, también es solución clásica de (1).

Nota: La conexión entre sol. débil y clásica es delicada. Requerimos regularidad adicional para garantizar (*).

<u>Dem.</u> (a) $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \Rightarrow$ seleccionamos $w_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_g) = g$.

Definimos $w = u - w_g$ y trabajamos con w.

Entonces, si $v \in V_D \subset H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = a(w,v) + a(w_g, v) = \ell(v)$$

Definimos $\tilde{\ell}(v) := \ell(v) - a(w_g, v)$

Para cada w_g fijo en $H^1(\Omega)$, $\tilde{\ell} \in V_D^*$:

- $\tilde{\ell}$ es lineal.
- $|\langle \tilde{\ell}, v \rangle| = |\tilde{\ell}(v)| \leq$

$$\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \|h\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma_N)} +$$
$$+ \|w_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$
$$\leq C_{f,h,g} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

por continuidad de la traza.

V_D es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ tal que si $v = c_0$ c.d.s. en V_D entonces $c_0 = 0$. En efecto,

$\mathcal{D}(\bar{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$ es denso.

$\therefore \exists\, \varphi_j \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que $\varphi_j \to v$ en $H^1(\Omega)$ si $j \to \infty$

con $v = c_0$ c.d.s.

Por continuidad de la traza :

$$\|\gamma_0(\varphi_j)\|_{L^2(\Gamma_D)} \underset{\substack{\downarrow \\ v \in V_D}}{=} \|\gamma_0(\varphi_j) - \gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma_D)}$$

$$\leq C \, \|\varphi_j - v\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \to \infty$$

$$|C_0|\,|\Gamma_D| = \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma_D)} \leq \underbrace{\|\gamma_0(v) - \gamma_0(\varphi_j)\|_{L^2(\Gamma_D)}}_{0} + \underbrace{\|\gamma_0(\varphi_j)\|_{L^2(\Gamma_D)}}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad |C_0|\,|\Gamma_D| = 0 \quad \underset{|\Gamma_D| > 0}{\Rightarrow} \quad C_0 = 0.$$

Por lema auxiliar :

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in V_D$$

$$\Rightarrow \quad (1 + C^2)\, a(v,v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + C^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$\therefore \quad a(\cdot,\cdot)$ es V_D - elíptica.

$a(\cdot,\cdot)$ es un prod. interno equivalente a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$.

Por Riesz $\exists !\ w \in V_D$ tal que

$$a(w,v) = \tilde{\ell}(v) \qquad \forall v \in V_D$$

Definiendo $u := w + w_g$ tenemos

- $u = w + w_g \in H^1(\Omega)$
- $\gamma_0(u) = \gamma_0(w) + g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\gamma_0(u)_{|\Gamma_D} = \underbrace{\gamma_0(w)_{|\Gamma_D}}_{=0,\ w \in V_D} + g_{|\Gamma_D}$$

- $$\begin{aligned} a(u,v) &= a(w,v) + a(w_g,v) \\ &= \tilde{\ell}(v) + a(w_g,v) \\ &= \ell(v) \underbrace{- \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx + a(w_g,v)}_{=0} \\ &= \ell(v) \qquad \forall v \in V_D . \end{aligned}$$

$\therefore$ u es solución débil.

Unicidad: $\tilde{u} := u_1 - u_2$ con u_1, u_2 sol. débiles. $\gamma_0(\tilde{u})_{|\Gamma_D} = 0 \quad \therefore \hat{u} \in V_D$

$$a(u_1,v) = \ell(v) = a(u_2,v) \qquad \forall v \in V_D$$

$$\Rightarrow \quad a(\tilde{u},v) = 0 \qquad \forall v \in V_D$$

Tomando $v = \tilde{u} \Rightarrow 0 = a(\tilde{u},\tilde{u}) \geq C \|\tilde{u}\|^2_{H^1}$

$\Rightarrow \hat{u} = 0$ c.d.s. unicidad.

Ahora si $w \in K_g$ $\left(w \in H^1(\Omega),\ \gamma_0(w)|_{\Gamma_D} = g \right)$ notamos que $u - w \in V_D$. Entonces:

$$0 \leq a(u-w, u-w) = \frac{1}{2} a(u,u) + \frac{1}{2} a(w,w) - a(u,w)$$

a simétrica

$$= -\frac{1}{2} a(u,u) + \frac{1}{2} a(w,w) - a(u, \underbrace{w-u}_{\in V_D})$$

$$= \frac{1}{2} a(w,w) - \ell(w-u) - \frac{1}{2} a(u,u)$$

$$= J[w] - J[u]$$

$$\Rightarrow \quad J[w] \geq J[u] \qquad \forall w \in K_g.$$

(b) Finalmente, suponemos que la sol. débil $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$.

Tomemos $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ en (4):

$$\int_\Omega (-\Delta u - f) v \, dx = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u = f \quad \text{c.d.s. en } \Omega.$$

Tomemos $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ tal que $v|_{\Gamma_D} = 0$. Entonces, $v \in V_D$.

$$\therefore \quad a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_N} h v \, dS_x \qquad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),\ v|_{\Gamma_D} = 0.$$

Usando $-\Delta u = f$ c.d.s.

$$\int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - h \right) v \, dS_x = 0$$

$\forall \, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$

con $v|_{\Gamma_D} = 0$

Por la propiedad (*) de densidad

$$\int_{\Gamma_N} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu} - h \right) v \, dS_x = 0$$

$\forall \, v \in L^2(\Gamma_N)$

concluimos que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = h$ c.d.s. en Γ_N

$\square$