Lección 4.5: Problema de Stokes (continuación). Operadores elípticos de segundo orden.

Problema de Stokes:

$$(1) \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{r} -\mu \Delta \bar{u} + \nabla p = \bar{f} \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \end{array}\right\} & \text{en } \Omega \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$\bar{u} \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto, $\partial\Omega \in C^1$, $\bar{f}$ - densidad volumétrica de fuerzas, $p \in \mathbb{R}$ (presión).

Suponemos $f \in L^2(\Omega)^n$. Definimos

$$H = H_0^1(\Omega)^n = \{ \bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ u_i \in H_0^1(\Omega) \ \forall \, 1 \leq i \leq n \}$$

$$V = L_0^2(\Omega) := \{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p \, dx = 0 \}$$

Nota: Si $(\bar{u}, p)$ son solución de (1) entonces también la es $(\bar{u}, p + c)$, con c constante.

Formulación débil: Sean $(\bar{u}, p)$ soluciones suaves de (1). Mult. por $\bar{w}^T$ con $\bar{w} \in C_0^\infty(\Omega)^n$. Entonces:

$$-\mu \int_\Omega \bar{w}^T \Delta \bar{u} \, dx + \int_\Omega \bar{w}^T \nabla p \, dx = \int_\Omega \bar{w}^T \bar{f} \, dx$$

ssi

$$-\mu \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega w_j \Delta u_j \, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega w_j \partial_{x_j} p \, dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega w_j f_j \, dx$$

$$\forall \; 1 \leq j \leq n$$

Por la fórmula de Green:

$$-\int_\Omega w_j \Delta u_j \, dx = \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla u_j \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{w_j}_{=0, \; w_j \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\partial u_j}{\partial \nu} \, dS_x$$

$$\int_\Omega w_j \partial_{x_j} p \, dx = -\int_\Omega p \, \partial_{x_j} w_j \, dx + \int_{\Omega} \underbrace{w_j}_{=0} p \, \nu_j \, dS_x$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mu \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \nabla w_j \cdot \nabla u_j \, dx}_{a(\bar{w}, \bar{u})} \underbrace{- \int_\Omega p \, \mathrm{div}\, \bar{w} \, dx}_{b(\bar{w}, p)} = \underbrace{\int_\Omega \bar{w} \cdot \bar{f} \, dx}_{\ell_f(\bar{w})}$$

Por densidad $C_0^\infty(\Omega)^n \subset H_0^1(\Omega)$ esta fórmula es válida para $\bar{u}, \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$, $p \in L^2(\Omega)$

Definimos las formas bilineales:

$$a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \qquad H = H_0^1(\Omega)^n$$

$$a(\bar{u},\bar{w}) := \mu \int_\Omega \sum_{j=1}^n \nabla u_j \cdot \nabla w_j \, dx$$

$$= \mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} u_j \, \partial_{x_i} w_j \, dx$$

$$\forall \bar{u}, \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$$

$$b(\cdot,\cdot) : H \times V \longrightarrow \mathbb{R} \qquad V = L_0^2(\Omega)$$

$$b(\bar{w},p) := -\int_\Omega p \operatorname{div} \bar{w} \, dx$$

$$\forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$$
$$p \in L_0^2(\Omega)$$

$a(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot,\cdot)$ son formas bilineales y continuas:

- $|b(\bar{w},p)| \leq \|p\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}$

- $|a(\bar{u},\bar{w})| \leq \mu \sum_{j=1}^n \|u_j\|_{H^1(\Omega)} \|w_j\|_{H^1(\Omega)}$

$$\leq C(\mu,n) \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{w}\|_{H^1(\Omega)}$$

El operador

$$\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} := \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u_j \in L^2(\Omega)$$

está bien definido.

$$\ker(\operatorname{div}) = \{ \bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \bar{u} = 0 \in L^2(\Omega) \}$$

$$\subset H_0^1(\Omega)^n$$

Sea $Z := \left\{ \bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n : \begin{array}{l} b(\bar{u}, p) = 0 \\ \forall\, p \in L_0^2(\Omega) \end{array} \right\}$

(como en Babuska-Brezzi).

Sea $\bar{u} \in \ker(\operatorname{div}) \subset H_0^1(\Omega)^n$. Entonces,

$$b(\bar{u}, p) = - \int_\Omega p \underbrace{\operatorname{div} \bar{u}}_{=0} = 0 \quad \forall\, p \in L_0^2(\Omega)$$

$\therefore \quad \bar{u} \in Z. \qquad \ker(\operatorname{div}) \subset Z.$

Sea $\bar{u} \in Z \quad \therefore \quad b(\bar{u}, p) = 0 \quad \forall\, p \in L_0^2(\Omega).$

Tomando $\tilde{p} := \operatorname{div} \bar{u} \in L^2(\Omega)$.
Por la fórmula de Green en $H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} \bar{u}\, dx = \int_{\partial\Omega} \gamma_0(\bar{u}) \cdot \nu \, dS_x \underset{u \in H_0^1(\Omega)^n}{=} 0$$

$$\gamma_0(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \gamma_0(u_1) \\ \vdots \\ \gamma_0(u_n) \end{pmatrix}, \qquad \underset{0}{\overset{\|}{\gamma_0(u_j)}} \in L^2(\partial\Omega), \quad u_j \in H_0^1(\Omega)$$

$$\therefore \int_\Omega \tilde{p}\, dx = 0 \Rightarrow \tilde{p} \in L_0^2(\Omega)$$

Así,

$$\underset{0}{\overset{\|}{b(\bar{u},\tilde{p})}} = - \int_\Omega |\operatorname{div} \bar{u}|^2\, dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \bar{u} = 0 \text{ c.d.s. en } \Omega$$

$$\Rightarrow \bar{u} \in \operatorname{Ker}(\operatorname{div})$$

concluimos que $Z = \operatorname{Ker}(\operatorname{div})$.

Operadores:

$$A: H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow H_0^1(\Omega)^n$$
$$H \longrightarrow H$$

$$B: H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L_0^2(\Omega)$$
$$V \longrightarrow V$$

- Para cada $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ fijo existe un único elemento $A\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle A\bar{u}, \bar{w} \rangle_{H^1(\Omega)^n} = a(\bar{u},\bar{w}) \quad \forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$$

ya que $a(\bar{u},\cdot) \in (H_0^1(\Omega)^n)^*$

- Para cada $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n$ fijo existe un único $B\bar{u} \in L_0^2(\Omega) = V$ tal que

$$\langle B\bar{u}, p \rangle_{L^2(\Omega)} = b(\bar{u}, p) \quad \forall p \in L_0^2(\Omega)$$

ya que $b(\bar{u}, \cdot) \in L_0^2(\Omega)^*$

Claramente:

$$b(\bar{u}, p) = -\int_\Omega p \operatorname{div} \bar{u} = \langle B\bar{u}, p \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad B = -\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L_0^2(\Omega)$$

Adjunto formal: $\quad B^* : L_0^2(\Omega)^* \longrightarrow (H_0^1(\Omega)^n)^* = H^{-1}(\Omega)^n$

$$\langle B^* p, \bar{w} \rangle := \langle p, B\bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= -\langle p, \operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$$

Sabemos que $\nabla : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n$ tiene rango cerrado.

Por probar:
- ∇ restringido a $L_0^2(\Omega)$ también tiene rango cerrado.
- ∇ restringido a $L_0^2(\Omega)$ es, además, inyectivo.

Definimos $\nabla_0 : L^2_0(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n$
como la restricción de ∇ a $L^2_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\nabla_0 = \nabla_{|L^2_0(\Omega)}.$$

Sea $p \in L^2_0(\Omega)$ tal que $\nabla p = 0 \in H^{-1}(\Omega)^n$
Entonces,

$$\langle \nabla p, \bar{u} \rangle = -\int_\Omega p \operatorname{div} \bar{u} \, dx = 0$$

$$\forall \, \bar{u} \in H^1_0(\Omega)^n$$

Tomando $\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow j$, con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\int_\Omega p \, \partial_{x_j} \varphi \, dx}_{= \langle \partial_{x_j} p, \varphi \rangle} = 0 \quad \forall \, 1 \leq j \leq n$$

p es una distribución cuyas derivadas distribucionales son cero.
(Sección 2) $\Rightarrow$ $p = C_0$ constante c.d.s. en Ω conexo

Pero $\int_\Omega p \, dx = C_0 |\Omega| = 0$ ya que $p \in L^2_0(\Omega)$. $\Rightarrow$ $C_0 = 0$

$\therefore$ $p = 0$ c.d.s. en Ω

$\therefore$ ∇_0 es inyectivo.

$\mathcal{R}(\nabla_0)$ es cerrado:

Sea $p_j \in L^2_0(\Omega)$ tal que $\nabla p_j \to \bar{q} \in H^{-1}(\Omega)^n$

$\mathcal{R}(\nabla)$ es cerrado. $\Rightarrow$ $\bar{q} = \nabla p$ para cierta $p \in L^2(\Omega)$.

Se puede verificar (ver clase pasada) que p_j es necesariamente acotada en L^2.

$\Rightarrow$ $\exists$ subsucesión $p_j \in L^2_0(\Omega)$ tal que

$$p_j \rightharpoonup p \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

es decir, $\langle p_j, q \rangle_{L^2} \to \langle p, q \rangle_{L^2}$

Tomamos $q \equiv 1$ c.d.s. en Ω ($1 \in L^2(\Omega)$ Ω acotado) y así

$$0 = \int_\Omega p_j \, dx = \langle p_j, 1 \rangle_{L^2} \to \langle p, 1 \rangle_{L^2}$$
$$= \int_\Omega p \, dx$$

$\therefore$ $p \in L^2_0(\Omega)$

Por el teorema de la gráfica cerrada $\mathcal{R}(\nabla_0)$ es cerrado ssi $\mathcal{R}(\nabla_0^*) = \mathcal{R}(B^*)$ es cerrado.

$$\langle p, B\bar{w} \rangle_{L^2} = \langle p, -\operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2} = \langle \nabla p, \bar{w} \rangle$$
$$= \langle B^* p, \bar{w} \rangle$$

$\therefore$ $B^* = \nabla_0^*$

$\therefore \quad B^* = \nabla_0 : L_0^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)^n$

es inyectivo y tiene rango cerrado.

$R(B^*)$ cerrado $\Rightarrow$ $R(B)$ es cerrado (gráfica cerrada)

$\therefore \quad B = -\operatorname{div} : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow L_0^2(\Omega)$

tiene rango cerrado.

$$R(-\operatorname{div}) = R(B) = \overline{R(B)}$$

$$= \operatorname{Ker}(B^*)^{\perp}$$

B^* inyectivo $\quad = \{0\}^{\perp} = L_0^2(\Omega) = V$

$\therefore \quad R(-\operatorname{div}) = L_0^2(\Omega) = V.$

Nota: Esto es equivalente a verificar la condición de LBB:

$$\inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \sup_{\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{-\int_\Omega p \operatorname{div} \bar{u}}{\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \|p\|_{L^2(\Omega)}} \geq C > 0$$

Finalmente, hay que verificar que $a(\cdot,\cdot)$ es Z elíptica.

De hecho, $a(\cdot,\cdot)$ es H-elíptica:

$$a(\bar{u},\bar{u}) = \mu \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |\nabla u_j|^2 \, dx$$

$$\bar{u} \in H_0^1(\Omega)^n$$

Por Poincaré, $\|u_j\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)}$

$$\Rightarrow \quad \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega |\nabla u_j|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{\mu}} \, a(\bar{u},\bar{u})^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad a(\bar{u},\bar{u}) \geq \beta \|\bar{u}\|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\forall \bar{u} \in H \supset Z = \ker(\operatorname{div})$$

<u>Teorema</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo, $\partial\Omega \in C^1$. Para todo $\bar{f} \in L^2(\Omega)^n$ dado existe una única solución $(\bar{u}, p) \in H \times V = H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} a(\bar{u},\bar{w}) + b(\bar{w},p) = \langle \bar{f},\bar{w} \rangle_{L^2} \\ b(\bar{u},q) = 0 \\ \forall q \in L_0^2(\Omega), \ \forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n \end{cases}$$

Se dice que $(\bar{u}, p)$ es la única solución débil del problema de Stokes (1).

Formulación débil para operadores elípticos de 2o. orden

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado.

Operador elíptico de 2o. orden:

$$(1) \quad \left\{ Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \right.$$

donde $a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b^i \in C(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$.

condición de elipticidad uniforme:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2 \quad \ldots \quad (2)$$

$\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

Motivación: problema de Dirichlet para L

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es conocida, $f \in L^2(\Omega)$.

Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es una solución clásica de (3) entonces multiplicamos por $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e integramos por partes:

$$\int_\Omega f\varphi \, dx = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} \varphi \, dx + \int_\Omega c(x) u\varphi \, dx$$

Esta identidad tiene sentido si $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Definición La forma de Dirichlet asociada al operador L es

$$(4) - \begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x) u v \right] dx \\ a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

Definición $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de (3) si

$$(5) \cdots \quad a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Nota: Si $L = -\Delta$ entonces

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

es simétrica. En el caso general $a(\cdot,\cdot)$ no es simétrica

Recordatorio: Lax-Milgram

$(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert real
$a : H \times H \to \mathbb{R}$ forma bilineal, continua y H-elíptica (no necesariamente simétrica) entonces $\forall \ell \in H^*$ $\exists!$ $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \ell, v \rangle \quad \forall v \in H$$

continuidad : $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H$, $\alpha > 0$
H-elipticidad : $|a(u,u)| \geq \beta \|u\|_H^2$, $\beta > 0$.

Lema Bajo las hipótesis de L, existen constantes $\alpha, \beta > 0$ y $\gamma \geq 0$ tales que:

(a) $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$,
$\forall u,v \in H_0^1(\Omega)$

(b) $\beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a(u,u) + \gamma \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$
$\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración: De la forma de $a(\cdot,\cdot)$ tenemos

$$|a(u,v)| \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du||Dv|\, dx$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du||v|\, dx$$
$$+ \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u||v|\, dx$$

donde $\|a^{ij}\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} \max_{i,j} |a^{ij}(x)| < \infty$
$\|b^i\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} \max_{i} |b^i(x)| < \infty$
$\|c\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\bar{\Omega}} |c(x)| < \infty$

Entonces

$$|a(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

donde $\alpha = \alpha(\|a^{ij}\|_{L^\infty}, \|b^i\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty}) > 0$.

Esto prueba (a).

Por elipticidad uniforme:

$$\theta \int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq \int_\Omega \sum_{j,i=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \, dx$$

$$= a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} u \, dx - \int_\Omega c(x) |u|^2 \, dx$$

$$\leq a(u,u) + \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du||u| \, dx + \|c\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^2 \, dx$$

Por Cauchy-Schwarz, $\forall \, \epsilon > 0$ tenemos

$$\int_\Omega |Du||u| \, dx \leq \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega |Du|^2 \, dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega |u|^2 \, dx$$

Tomando $0 < \epsilon << 1$ suficientemente pequeño tal que

$$\epsilon \sum_{i=1}^{n} \|b^i\|_\infty < \theta$$

obtenemos

$$\underbrace{\left[\theta - \frac{\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{n}\|b^i\|_{L^\infty}\right]}_{\geq \frac{\theta}{2}} \int_\Omega |Du|^2\,dx \leq$$

$$\leq a(u,u) + \bar{C}(\epsilon, \|b^i\|_\infty, \|c\|_\infty)\|u\|_{L^2}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(u,u) + \bar{C}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$u \in H_0^1(\Omega)$: usando Poincaré

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \hat{C}\,\|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{4\hat{C}}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\theta}{4}\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq \frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq a(u,u) + \bar{C}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Tomamos $\beta := \min\left\{\frac{\theta}{4}, \frac{\theta}{4\hat{C}^2}\right\} > 0$

y $\gamma := \bar{C} \geq 0$

(γ puede ser 0).

obtenemos (b) con $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$ $\square$

T31: <u>Teorema 1</u> (existencia)
Existe $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ y cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ al problema

$$(6) \cdots \begin{cases} Lu + \mu u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

es decir,

$$(7) \cdots \quad a(u,v) + \mu \langle u,v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f,v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración: Del lema tomamos las constantes $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \geq 0$. Sea $\mu \geq \gamma$.
Se define

$$\begin{cases} a_\mu(u,v) := a(u,v) + \mu \langle u,v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ a_\mu : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

$a_\mu(\cdot,\cdot)$ es la forma de Dirichlet asociada al operador $L_\mu := L + \mu I$:

$$\langle L_\mu u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \mu \langle u,v \rangle_{L^2(\Omega)}$$
$$= a(u,v) + \mu \langle u,v \rangle_{L^2}$$
$$= a_\mu(u,v) \quad \text{si } u,v \text{ suaves.}$$

$a_\mu(\cdot,\cdot)$ es continua y $H_0^1(\Omega)$-elíptica.

- $$|a_\mu(u,v)| \leq |a(u,v)| + \mu |\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)}|$$

lema
$$\leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + \mu \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$$
$$\leq (\alpha+\mu) \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$
$$\therefore \ a_\mu(\cdot,\cdot) \text{ es continua}$$

- $$\beta \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u,u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq a(u,u) + \mu \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$= a_\mu(u,u)$$
$$\therefore \ a_\mu(\cdot,\cdot) \text{ es } H_0^1(\Omega)\text{-elíptica.}$$

Para cada $f \in L^2(\Omega)$ fijo,

$$l_f \in H^{-1}(\Omega), \quad l_f(u) = \langle f,u\rangle = \langle f,u\rangle_{L^2(\Omega)}$$

es un funcional lineal continuo.

Por Lax-Milgram: existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que u satisface (7).

$\square$

Observaciones:

(A) Si $L = -\Delta$ entonces $\gamma = 0$.
$\exists !$ solución débil en $H_0^1(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

(B) Si $b^i(x) \equiv 0$ y además $c(x) \geq 0$ en Ω entonces $\gamma = 0$. (ejercicio).
Así, $\exists !$ solución débil de

$$\begin{aligned} -Lu &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

con $Lu = -\sum (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + c(x) u$

con $c \geq 0$