Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales

Espacios de Sobolev y Ecuaciones Diferenciales Parciales de Tipo Elíptico

Semestre 2021-2

Tarea 2: Espacios de Sobolev

1. Usa la transformada de Fourier para demostrar que si $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > \frac{n}{2}$ entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y además

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)},$$

donde $C = C(n,s) > 0$ es una constante independiente de u.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, $n \geq 2$. Sean $1 \leq p < n$, $1 \leq q < n$ y defínase

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{n}.$$

Demuestra que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $v \in W^{1,q}(\Omega)$ entonces $uv \in W^{1,s}(\Omega)$. (*Sugerencia:* Aplica el teorema de encaje de Sobolev visto en clase y aplica la desigualdad de Hölder con $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ escogidos apropiadamente.)

3. Suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$

para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. (*Sugerencia:* demuestra la desigualdad para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y aplica un argumento de densidad: existe una sucesión $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge a u en $H_0^1(\Omega)$, y otra sucesión $\psi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, que converge a u en $H^2(\Omega)$.)

4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Demuestra que no existe un operador lineal y acotado, $\gamma_0 : L^p(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, tal que $\gamma_0 u = u_{|\partial\Omega}$ cuando $u \in C(\overline{\Omega}) \cap L^p(\Omega)$. Es decir, una función en $L^p(\Omega)$ no tiene, en general, traza en $\partial\Omega$.

5. Encuentra un elemento en el espacio $W^{1,n}(\Omega)$ que no esté en $L^\infty(\Omega)$. (*Sugerencia:* considera $n = 2$, $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ y $u = \log\log(2/|x|)$. Demuestra que $u \in W^{1,n}(\Omega) = H^1(B_{1/2}(0))$.)

6. Aplica la desigualdad de Sobolev[1] para verificar que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$, se cumple que $H^k(\Omega) \subset C^r(\Omega)$ si $k > r + n/2$. Encuentra un contraejemplo para $n = 2$, $k = 1$ y $r = 0$. (*Sugerencia:* Considera el disco en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio $r = 1/e$, y la función $u = \log|\log\sqrt{x^2+y^2}|$. Demuestra que $u \in H^1(\Omega)$.)

7. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, fija. Se define $u_j(x) := \varphi(x+j)$, $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Sea $1 \leq p < \infty$.

(a) Verifica que $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(b) Demuestra que no existe ninguna subsucesión de $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converja fuertemente en $L^q(\mathbb{R})$ para cualquier $1 \leq q < \infty$.

(c) Demuestra que u_j converge débilmente a 0 en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ para toda $1 < p < \infty$.

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y *conexo* con $\partial\Omega \in C^1$. Aplica el teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov para demostrar las siguientes afirmaciones.

[1] es decir, $\|u\|_{C^r} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}$ para toda $u \in W^{k,p}$ si $k > r + [n/p]$.

(a) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C\left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|<k} \Big(\int_\Omega x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} u(x)\, dx\Big)^2\right),$$

para toda $u \in H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$.

(b) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C\left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)^2\, dS_x\right),$$

para toda $u \in H^2(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es una porción de la frontera que tiene superficie positiva $|\Gamma| > 0$, y que **no** es un pedazo de hiperplano.

(c) Existe una constante $C > 0$ independiente de u tal que

$$\|u\|_{H^3(\Omega)}^2 \leq C\left(\sum_{|\alpha|=3} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)^2\, dS_x\right),$$

para toda $u \in H^3(\Omega)$ siempre que Ω **no sea un elipsoide**. Analiza el contraejemplo $u(x,y) = x^2+y^2-1$ para el caso del disco unitario (caso particular de un elipsoide) en $\mathbb{R}^2$.

9. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Demuestra que si $x_0 \in \Omega$, entonces $\delta(u) := u(x_0)$ para toda $u \in H_0^m(\Omega)$, define un elemento en el dual, es decir, $\delta \in H^{-m}(\Omega)$, si $m > n/2$. (*Sugerencia:* Aplica la desigualdad de Sobolev para verificar que $H^m(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega})$ si $m > k + n/2$.)

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$ y orientable. Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$ una porción de la frontera con superficie positiva,

$$|\Gamma| = \int_\Gamma dS_x > 0.$$

Demuestra que, para cada $g \in L^2(\Gamma)$, el mapeo

$$u \mapsto \int_\Gamma g(x)(\gamma_0 u)(x)\, dS_x, \qquad u \in H^1(\Omega),$$

define un elemento del dual $H^{-1}(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Total: 10 pts.