Lección 1.10: Leyes de conservación, IV. Contracción en la norma L¹. Problema de Riemann.

Condición de entropía de Lax:

$$f'(u_R) \leq \sigma \leq f'(u_L), \qquad \forall P \in \Sigma \qquad \cdots \quad (1)$$

Σ discontinuidad de u, $\quad \Sigma = \{ x = \hat{x}(t) \}$,

$\frac{[\![f]\!]}{[\![u]\!]} = \sigma = d\hat{x}/dt$ – velocidad de la discontinuidad

u_L, u_R límites de u en P a cada lado de Σ, $u_L \neq u_R$

Caso estrictamente convexo: $\quad f''(u) \geq \delta > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$

(1) Lax $\iff$ $u_R < u_L$

Caso cóncavo: $\quad f''(u) \leq -\delta < 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$

(1) Lax $\iff$ $u_R > u_L$

En caso general, $f \in C^2(\mathbb{R})$, tenemos una condición suficiente:

Lema: Sea u una sol. débil de clase C^1 x pedazos tal que en cada $P \in \Sigma$, Σ discontinuidad, se cumple

$$[\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)] \operatorname{sgn} [\![u]\!] \leq 0 \quad \cdots (2)$$

$\forall \alpha \in [0,1]$. Entonces u satisface (1) (Lax) $\forall P \in \Sigma$, $\forall \Sigma$ discontinuidad.

Demostración: Sea Σ discontinuidad, $\Sigma = \{x = \hat{x}(t)\}$

$$\sigma = \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} \quad (RH), \quad \forall p \in \Sigma \text{ con límites } u_L \neq u_R.$$

Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = 1$, (2) se cumple trivialmente.

Sea $\alpha \in (0,1)$ arbitrario. Definimos

$$u := \alpha u_L + (1-\alpha) u_R \in \begin{cases} (u_L, u_R) & \text{si } u_R > u_L \\ (u_R, u_L) & \text{si } u_L > u_R \end{cases}$$

caso (i): $u_R > u_L$. $\operatorname{sgn} [\![u]\!] = +1$.

$$u - u_R = -\alpha [\![u]\!] < 0$$

(2) se lee: $$f(u_R) - f(u) \leq \alpha [\![f(u)]\!]$$

$\alpha [\![u]\!] > 0$ $\therefore$ $$\frac{f(u_R) - f(u)}{u_R - u} \leq \sigma$$

Tomando lim $\alpha \to 0^+$ $\quad f'(u_R) \leq \sigma.$

Div. (2) entre $(1-\alpha)[\![u]\!] = u - u_L > 0$

$$\frac{(1-\alpha)\left(f(u_R) - f(u_L)\right) + f(u_L)}{(1-\alpha)[\![u]\!]} \leq \frac{f(u)}{(1-\alpha)[\![u]\!]}$$

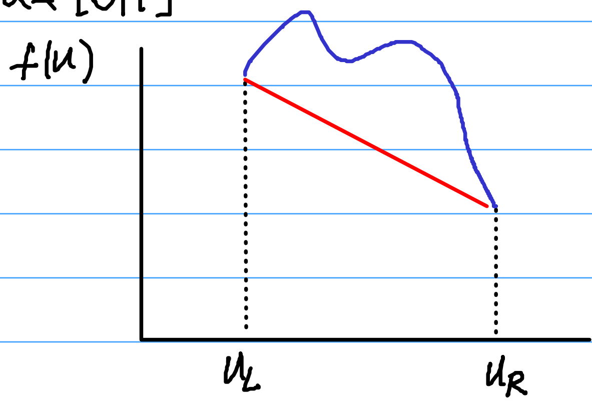
$$\Rightarrow \quad \frac{[\![f]\!]}{[\![u]\!]} = \sigma \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L} \rightarrow f'(u_L) \text{ si } \alpha \to 1^-$$

$\therefore$ Lax (1). caso (ii): análogo $\square$

Interpretación:

(i) $u_R > u_L \Rightarrow \alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) \leq f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)$ $\forall \alpha \in [0,1]$

La gráfica de f en $[u_L, u_R]$ está situada por arriba de su cuerda



(ii) La gráfica de f está situada por abajo de la cuerda, si $u_L > u_R$.

Caso convexo: $f''(u) \geq \delta > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$

Lax $\Rightarrow$ contracción en la norma L^1. (unicidad).

$v = v(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\|v\|_{L^1} := \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x)| \, dx$$

$v \in L^1$ ssi $\|v\|_{L^1} < \infty$ "masa finita".

Teorema (B. Keyfitz - Quinn, ~1971) Sea $f \in C^2$, $f'' > \delta > 0$. Sean u, v dos soluciones débiles y entrópicas de $u_t + f(u)_x = 0$, de clase C^1 por pedazos tales que $u(x,0), v(x,0) \in L^1(\mathbb{R})$ y $u(\cdot,t), v(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ $\forall t > 0$. Entonces:

$r(t) := \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1}$ es una función no creciente de $t \geq 0$.

Corolario : Sea el problema de Cauchy

$$\left.\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{aligned}\right\} \cdots (3)$$

con $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, si (3) tiene una solución entrópica en la clase C^1 por pedazos entonces es única.

Dem. Sean u, v dos soluciones de (3), con $u(\cdot,0) = v(\cdot,0) = u_0(x)$. Por el teorema

$$0 \leq \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^1} \leq \|u(\cdot,0) - v(\cdot,0)\|_{L^1} = 0.$$

$\Rightarrow$ $u(x,t) = v(x,t)$ casi donde sea en $x \in \mathbb{R}$ $\forall\, t \geq 0$. $\square$

Dem. del teorema :

Sea $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$

$$r(t) := \|w(\cdot,t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(x,t)|\, dx$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t)\, dx$$

$\forall\, t > 0$, fijo.

Para cada $t>0$ los puntos $y_k(t)$ se escogen de modo que:

$$\operatorname{sgn}\left(u(x,t)-v(x,t)\right)=(-1)^k,\quad \forall x\in(y_k,y_{k+1}).$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$ tenemos dos casos:

(a) $y_k(t)$ es un punto de continuidad de u y de v. En este caso $u(y_k(t),t)=v(y_k(t),t)$.

(b) $y_k(t)$ es punto de discontinuidad de u, o de v, o de ambas. En este caso $y_k(t)$ es una discontinuidad donde se satisface la cond. de entropía de Lax y Rankine-Hugoniot.

u, v son soluciones débiles y entrópicas,

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+} f(u(a+\varepsilon,t))-f(u(b-\varepsilon,t))$$
$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

Calculamos:

$$\frac{dr}{dt}=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\frac{d}{dt}\int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)}(u-v)(x,t)\,dx$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\underbrace{(u-v)(y_{k+1}(t)-\varepsilon,t)}\frac{dy_{k+1}}{dt}-(u-v)(y_k(t)+\varepsilon,t)\frac{dy_k}{dt}+$$
$$+f(u(y_k(t)+\varepsilon,t))-f(u(y_{k+1}(t)-\varepsilon,t))$$
$$+f(\underline{v(y_{k+1}(t)-\varepsilon,t)})-f(v(y_k(t)+\varepsilon,t))$$

$$=: \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \left(\delta_{k+1} - \delta_k \right)$$

En el caso (a) : y_k pto. de continuidad entonces $\delta_k \equiv 0$.

Basta con (b) : u es discontinua en $y_{k+1}(t)$.

$$u_R = \lim_{\varepsilon\to 0^+} u(y_{k+1}+\varepsilon), \quad v_R = \lim_{\varepsilon\to 0^+} v(y_{k+1}+\varepsilon),$$

$$u_L = \lim_{\varepsilon\to 0^+} u(y_{k+1}-\varepsilon), \quad v_L = \lim_{\varepsilon\to 0^+} v(y_{k+1}-\varepsilon).$$

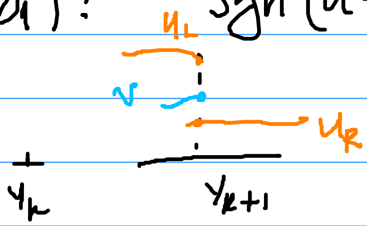
$u_R \neq u_L$, v puede ser continua o no en y_{k+1}.

$f'' \geq \delta > 0 \Rightarrow$ Lax $u_R < u_L$.

subcasos : (b_1) $v_L \in (u_R, u_L)$

(b_2) $v_L \notin (u_R, u_L)$.

(b_1) : $\operatorname{sgn}(u-v) = +1$ en $[y_k, y_{k+1})$



$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}$$

(Rankine - Hugoniot).

$\operatorname{sgn}(u-v) = +1 \Rightarrow k$ es par.

$$\Rightarrow (-1)^k \delta_{k+1} = \delta_{k+1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[(u-v)(y_{k+1}-\varepsilon) \frac{dy_{k+1}}{dt} + f(v(y_{k+1}-\varepsilon)) - f(u(y_{k+1}-\varepsilon)) \right]$$

$$= (u_L - v_L)\left(\frac{f(u_R)-f(u_L)}{u_R-u_L}\right) + f(v_L) - f(u_L)$$

,

Sea $\alpha := \dfrac{v_L - u_R}{u_L - u_R} \in (0,1)$ (caso (b_1)).

$\Rightarrow \quad v_L = \alpha u_L + (1-\alpha) u_R$

$\Leftrightarrow \quad S_{k+1} = f(v_L) - \big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) \big)$

< 0 ya que f es estrictamente convexa.

Caso (b_2) : $v_L \notin (u_R, u_L)$

(i) $v_L \geq u_L$
(ii) $v_L \leq u_R$

Subcaso (i) : si $v_L = u_L$ entonces $S_{k+1} = 0$.

suponemos $v_L > u_L$

$\Rightarrow \quad u - v < 0$ en (y_k, y_{k+1}).
$\Rightarrow \quad (-1)^k = -1$ $\quad k$ es impar.

Necesariamente $v_R \leq u_R < u_L < v_L$

(de lo contrario $\operatorname{sgn}(u-v) = -1$ a la derecha de y_{k+1} ¡ con definición de y_{k+1}.)

$\Rightarrow \quad y_{k+1}$ también es discontinuidad de v.

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}$$

$u_L \in [v_R, v_L) \Rightarrow \exists\ \alpha \in [0,1)$

$$\alpha := \frac{u_L - v_R}{v_L - v_R}$$

tal que

$$u_L = \alpha v_L + (1-\alpha) v_R$$

$$\Rightarrow (-1)^k \rho_{k+1} = -\rho_{k+1}$$

$$= f(u_L) - \left[\alpha f(v_L) + (1-\alpha) f(v_R) \right]$$

< 0 $\quad$ f convexa.

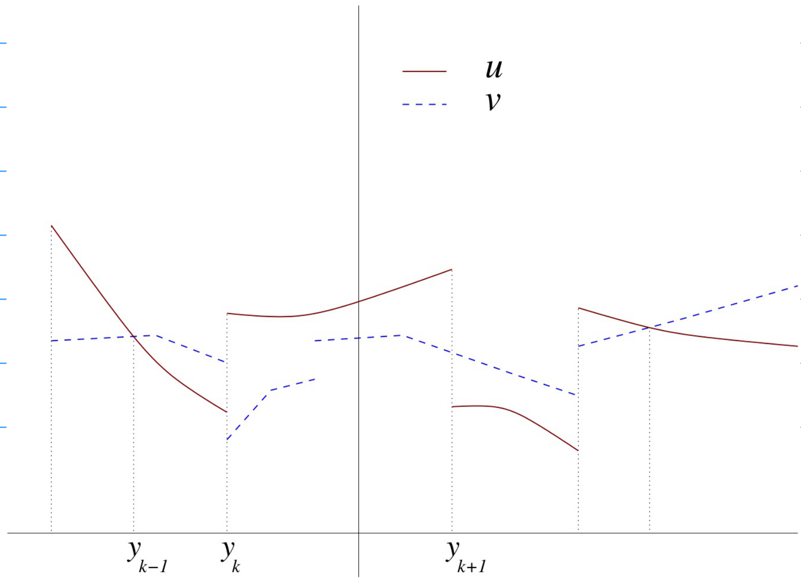
caso (ii), igual, $\quad (-1)^k \rho_{k+1} < 0$.

Todos los sumandos son ≤ 0.

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} \leq 0$$

$\square$

Figura:



Nota: $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow u_0 \in L^1[-\theta,\theta] \quad \forall \theta > 0.$

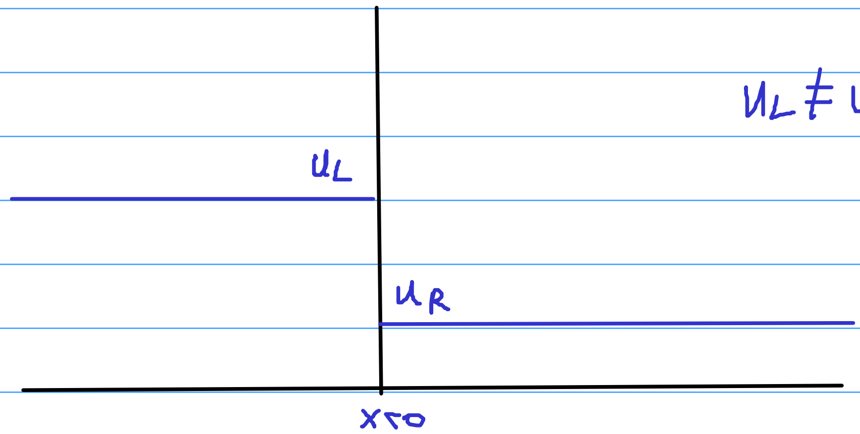
La demostración funciona para $\|u-v\|_{L^1[-\theta,\theta]}$ es decreciente en $t \geq 0$.

Tomando $\theta > 0$ arbitrario obtenemos la conclusión del corolario con $u_0 \in L^\infty$.

Ejemplo:

$$L^\infty \ni \left.\begin{aligned} & u_t + f(u)_x = 0, \\ & u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (R)$$

$u_L \neq u_R$



$$\|u-v\|_{L^1[-\theta,\theta]} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1[-\theta,\theta]}$$

si $u_0 = v_0$ c.d.s. $\Rightarrow \|u-v\|_{L^1[-\theta,\theta]} \equiv 0.$ $\forall \theta \geq 0.$

(R) se conoce como <u>problema de Riemann</u>

Soluciones invariantes bajo homotecias $(x,t) \mapsto (\alpha x, \alpha t)$, $\forall \alpha > 0$.

Soluciones autosimilares.

Sea u una solución entrópica al problema de Riemann (R). Sea $\alpha > 0$,

$$u^{\alpha}(x,t) := u(\alpha x, \alpha t).$$

También es solución entrópica al problema de Riemann $\forall \alpha > 0$

- $u^{\alpha}(x,0) = u(\alpha x, 0) = \begin{cases} u_L, & x<0 \\ u_R, & x>0 \end{cases}$
- Ejercicio: también es entrópica u^{α}.

Por unicidad una condición necesaria es $u^{\alpha} = u$ c.d.s en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Ejemplos:
- onda de choque

$$u = \begin{cases} u_L, & x < \sigma t \\ u_R, & x > \sigma t \end{cases}$$

depende de $\frac{x}{t}$.

- onda de rarefacción (dep. de $\frac{x}{t}$).

Cond. necesaria: $\underset{\forall \alpha}{u^{\alpha} = u}$ c.d.s.

$$\underset{\alpha = \frac{1}{t}}{\Rightarrow} \quad u^{\alpha} = u\left(\frac{x}{t}, 1\right) =: v\left(\frac{x}{t}\right).$$

$v \in L^{\infty}$

Autosimilar : $u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right)$

$v = v(\xi), \quad v \in L^{\infty}.$

Suponemos : $v \in C^1$.

$$0 = u_t + f(u)_x = u_t + f'(u)\,u_x$$

$$= -\frac{x}{t^2} v'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} f'\left(v\left(\frac{x}{t}\right)\right) v'\left(\frac{x}{t}\right)$$

$\forall\, t > 0.$

$\Rightarrow$ EDO :
$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} f(v(\xi)) = \xi f'(\xi) \\ v(+\infty) = u_R \\ v(-\infty) = u_L \end{cases}$$

La ec. se resuelve siempre que

$$a(v(\xi)) = \xi \qquad \text{con} \quad a(u) := f'(u).$$

$f'' \geq \delta > 0$ (estric. convexa) $\Rightarrow$ a es monótona y sobre.

$\therefore \quad g(u) := a^{-1}(u), \quad u \in \mathbb{R}.$

$a(v(\xi)) = \xi \iff v(\xi) = g(\xi).$

$$v\left(\frac{x}{t}\right) = a^{-1}\left(\frac{x}{t}\right).$$

Def: una onda de rarefacción centrada en $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$, de

$$u_t + f(u)_x = 0$$

es una solución autosimilar de la forma

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x-x_0 \leq -M(t-t_0) \\ v\left(\frac{x-x_0}{t-t_0}\right), & -M(t-t_0) \leq x-x_0 \leq M(t-t_0) \\ u_R, & x-x_0 \geq M(t-t_0) \end{cases}$$

definida para $t>t_0$, donde $v=v(\xi)$ es de clase C^1 que satisface

$$(*) \begin{cases} a(v(\xi)) = \xi, & \xi \in [-M,M] \\ v(\xi) = u_L, & \text{si } \xi \leq -M \\ v(\xi) = u_R, & \text{si } \xi \geq M \end{cases}$$

Siguiente lección: Prob. de Riemann (caso convexo) + ejemplos.