Lección 1.11: Problema de Riemann. Ejemplos.

Problema de Riemann:

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

con $u_L \neq u_R$, constantes

Solución al problema de Riemann (caso convexo):

Teorema Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f''(u) \geq \delta > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

(a) Si $u_L > u_R$ entonces la única solución entrópica al problema de Riemann (1) es la onda de choque:

$$(2) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < \sigma t \\ u_R, & x > \sigma t \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

con velocidad $\sigma = [\![f(u)]\!] / [\![u]\!]$.

(b) Si $u_L < u_R$ entonces la única solución entrópica al problema de Riemann es la onda de rarefacción centrada en $(0,0)$:

$$(3) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < a(u_L)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right), & a(u_L)t \leq x \leq a(u_R)t \\ u_R, & x > a(u_R)t \end{cases}$$

donde $a(u) = f'(u)$, $g(u) = a^{-1}(u)$, definida en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.

Demostración: En ambos casos la solución es de clase C^1 por pedazos. La unicidad de la solución entrópica en dicha clase se cumple (si verificamos la condición de entropía).

(a) $u_L > u_R$. Claramente la onda de choque (2) es solución débil (se cumple RH en $\Sigma = \{x = \sigma t\}$, discontinuidad).
Además es entrópica: $f'' \geq \delta > 0$, Lax $\Leftrightarrow u_L > u_R$.
Es la única solución entrópica (en la clase C^1 por pedazos).

(b) $u_L < u_R$. En la región abierta $a(u_L)t < x < a(u_R)t$ la solución en (3) es C^1 ($g \in C^1$), y además resuelve la ecuación:

$$u_t + f(u)_x = -\frac{x}{t^2} g'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} f'\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right) g'\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$= \left(-\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t^2}\right) g'\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

en $a(u_L)t < x < a(u_R)t$.

En $x < a(u_L)t$ y $x > a(u_R)t$, u es const.
$\therefore$ también es solución de clase C^1.

La onda de rarefacción (3) es de clase C^1 por pedazos. Es solución débil de (1).
Además: $g \in C^1$ $\therefore$ es Lipschitz continua localmente

Así, $\exists\, C>1$ tal que si $a(u_L)t < x < x+\varepsilon < a(u_R)t$ para cierto $\varepsilon>0$ se cumple

$$u(x+\varepsilon) - u(x,t) \leq g\left(\frac{x+\varepsilon}{t}\right) - g\left(\frac{x}{t}\right) < \frac{2C\varepsilon}{t}$$

si (x,t) y $\varepsilon>0$ son tales que $a(u_L)t < x < a(u_R)t < x+\varepsilon$ entonces

$$u(x+\varepsilon) - u(x,t) \leq u_R - g\left(\frac{x}{t}\right) < u_R - g(a(u_L))$$

$$= u_R - u_L < \frac{C\varepsilon}{t}$$

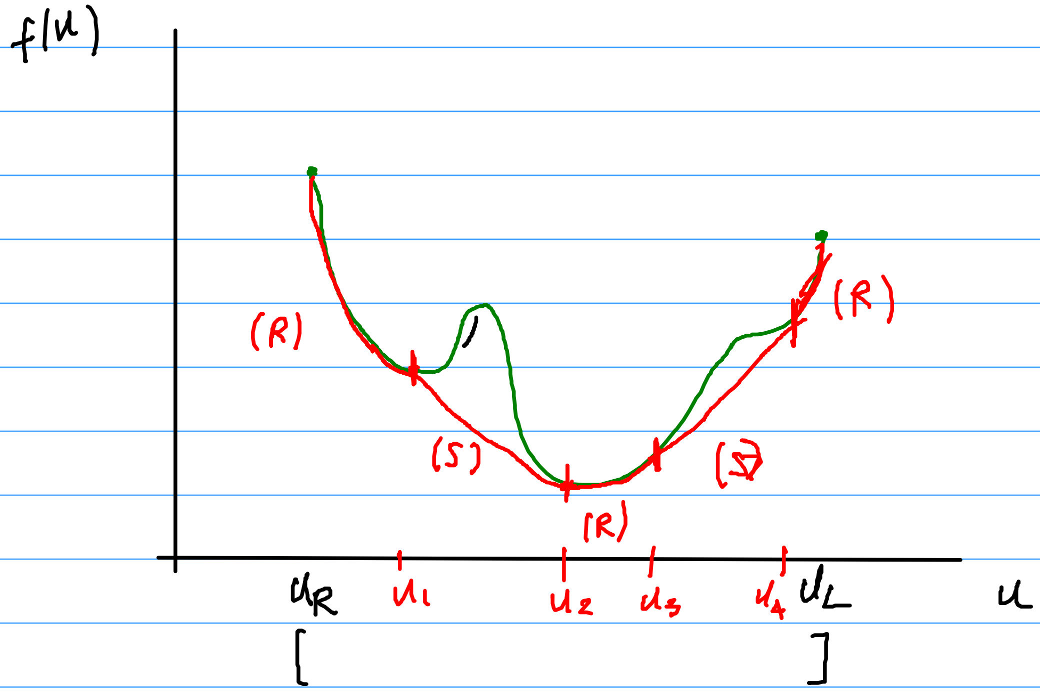
para cada $t>0$ fijo, cada $\varepsilon>0$ y tomando $C\gg 1$ ($g=a^{-1}$ es estrictamente creciente). Los casos $x<a(u_L)t<x+\varepsilon$, $x<a(u_L)t<a(u_R)t<x+\varepsilon$ son análogos. La onda (3) satisface la condición de Oleinik $\Rightarrow$ Lax.

$\square$

Observación: Haciendo la transformación $f \to -f$ ($u_t + f(u)_x = 0 \Rightarrow v_t + \tilde{f}(v)_x = 0$ con $v=-u$, $\tilde{f}(v) = -f(-v)$), en el caso estrictamente cóncavo $f''(u) \leq -\delta < 0$, $\forall u$, tenemos:

- Si $u_L < u_R$ entonces la única solución al problema de Riemann es la onda de choque (2) ($\text{Lax} \underset{f''<0}{\Leftrightarrow} u_L<u_R$).
- Si $u_R < u_L$ entonces la única solución al problema de Riemann es la onda de rarefacción (3).

Nota: En el caso general $f \in C^2$ se resuelve mediante el método de Oleinik (envolvente convexa de f).



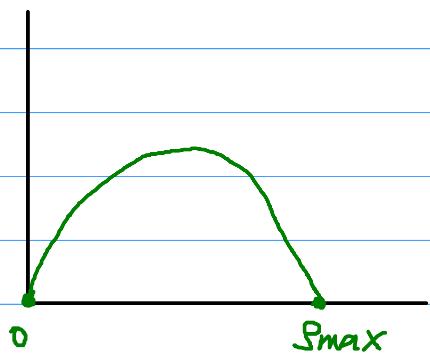
Ejemplos

(A) Modelo LWR

$$\rho_t + F(\rho)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$= \quad \rho(x,0) = \begin{cases} \rho_{max}, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(\rho) = u_{max}\, \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$



Prob. de Riemann:

$$\text{luz roja} \xrightarrow[t=0]{} \text{luz verde}$$

$\rho_L = \rho_{max} > \rho_R = 0 \quad \Rightarrow$ la solución es una onda de rarefacción.

Velocidad característica:

$$a(\rho) := F'(\rho) = u_{max}\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$a(\rho(x,0)) = \begin{cases} -u_{max}, & x<0 \\ u_{max}, & x>0 \end{cases}$$

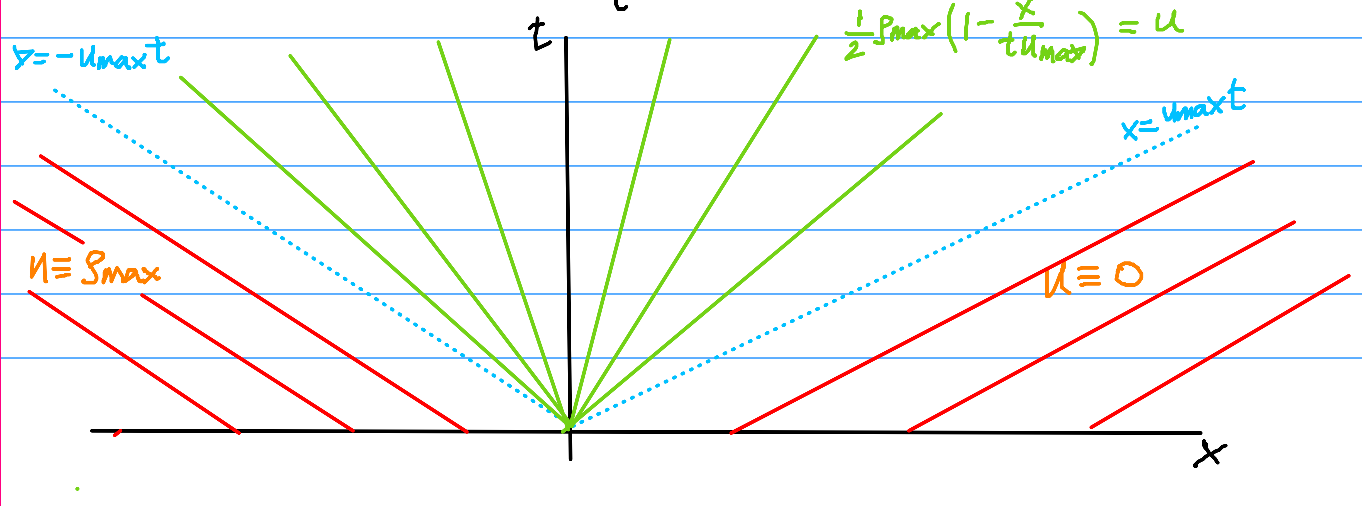
Inversa: $\quad g(\rho) = a^{-1}(\rho) = \frac{1}{2}\rho_{max}\left(1 - \frac{\rho}{u_{max}}\right)$

Onda de rarefacción centrada en $(0,0)$:

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \rho_L = \rho_{max}, & x < -u_{max}t \\ \frac{1}{2}\rho_{max}\left(1 - \frac{x}{u_{max}t}\right), & -u_{max}t \leq x \leq u_{max}t \\ \rho_R = 0, & x > u_{max}t \end{cases}$$

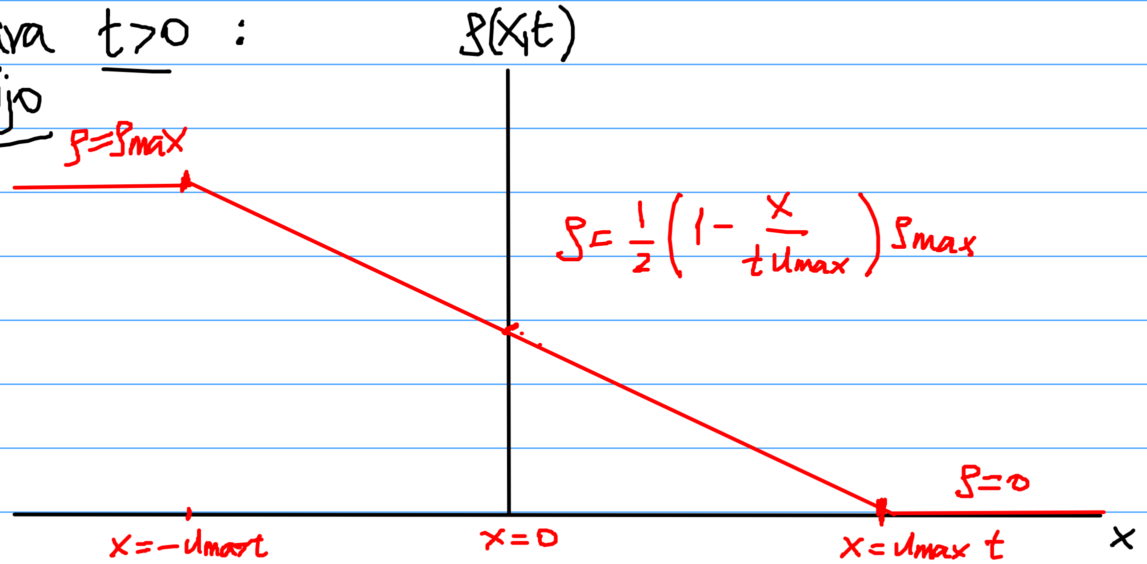
Onda continua: $\quad \frac{x}{t} \to -u_{max}^{+} = \rho_{max}$

$\qquad\qquad\qquad\quad \frac{x}{t} \to +u_{max}^{-} = 0$



Interpretación: En $t=0$ los autos hasta adelante comienzan a avanzar con vel. u_{max}.
Los autos atrás avanzan un poco después: auto localizado en $x=-\xi_0<0$ en $t=0$ comienza a avanzar hasta el tiempo $t_0 = \frac{-\xi_0}{-u_{max}} > 0$.

Para $t>0$ fijo:



(B) Luz verde $\xrightarrow[t=0]{}$ luz roja

$$\rho_t + F(\rho)_x = 0$$

$$F(\rho) = u_{max}\,\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_{max}, & x<0 \\ \rho_{max}, & x>0 \end{cases}$$

$$\rho_L = \frac{1}{4}\rho_{max} < \rho_R = \rho_{max}$$

$\therefore \; F'' \leq -\delta < 0 \quad \forall \rho$ cóncava,

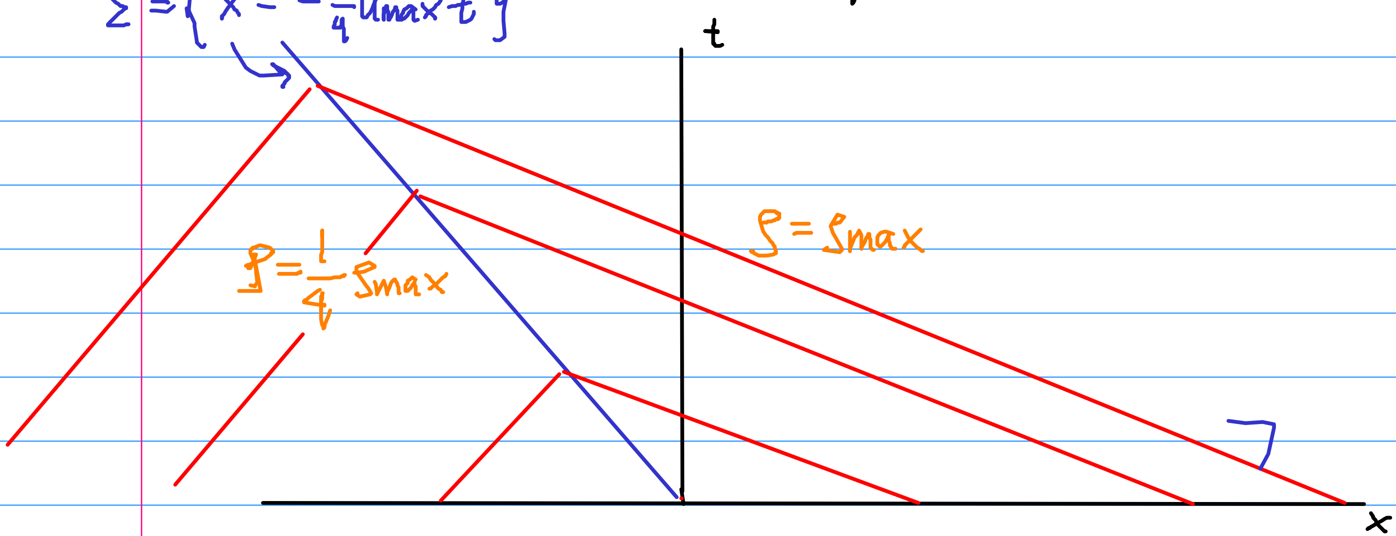
la solución es una onda de choque:

$$\rho(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\rho_{max}, & x < \sigma t \\ \rho_{max}, & x > \sigma t \end{cases}$$

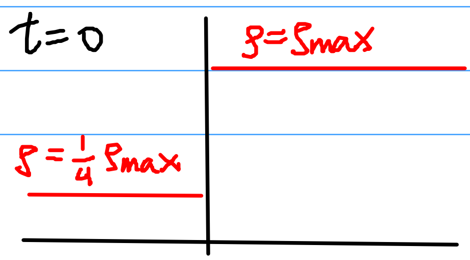
con $\sigma = \dfrac{[\![F]\!]}{[\![\rho]\!]} = \dfrac{F(\rho_{max}) - F(\frac{1}{4}\rho_{max})}{\frac{3}{4}\rho_{max}}$

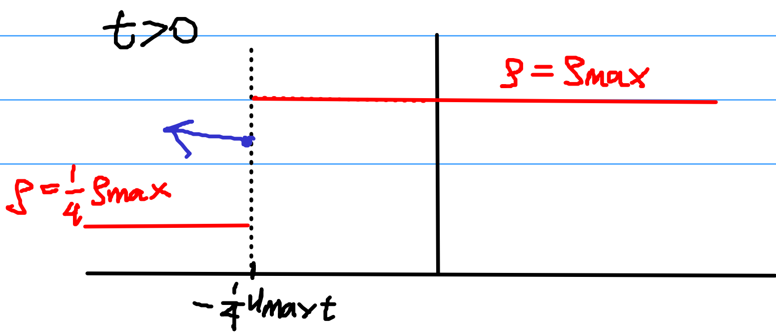
$$= \frac{-u_{max}\,\frac{1}{4}\rho_{max}\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{3}{4}\rho_{max}} = -\frac{1}{4}u_{max}$$

$\Sigma = \{x = -\frac{1}{4}u_{max}t\}$



$$a(\rho(x,0)) = \begin{cases} \frac{1}{2}u_{max}, & x < 0 \\ -u_{max}, & x > 0 \end{cases}$$



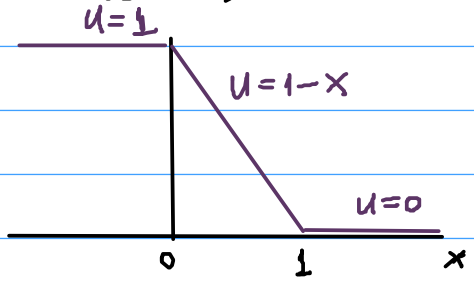


(c) Ecuación de Burgers:

$f = \frac{1}{2}u^2$

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

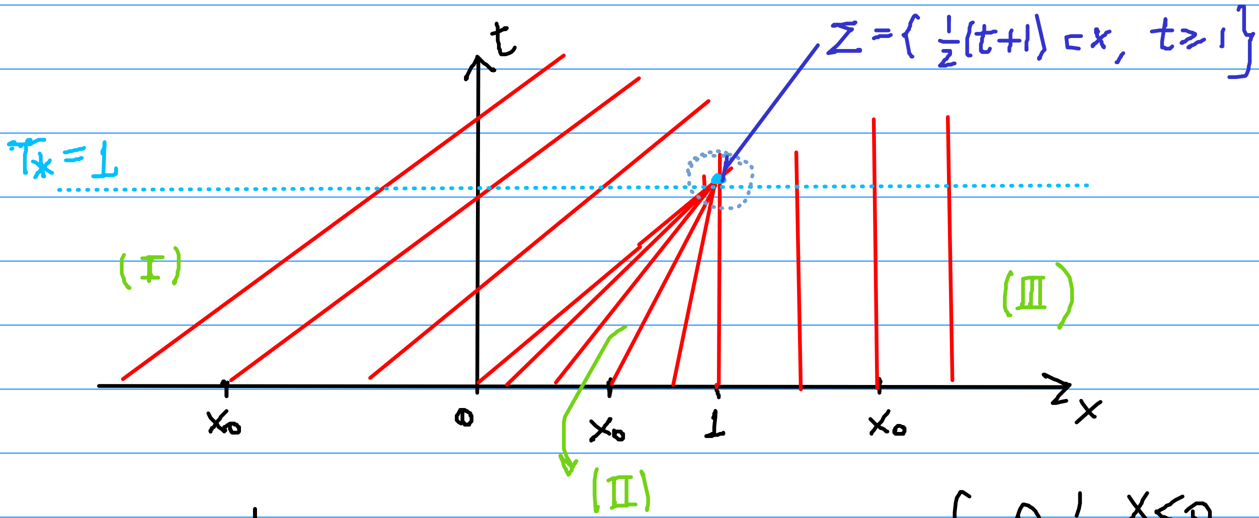
$u(x,0) =$



$a(u) = f'(u) = u$

Características que pasan por $x_0 \in \mathbb{R}$

- $x_0 \leq 0 \Rightarrow u_0(x_0) = 1 \Rightarrow \hat{x}(t) = x_0 + t$
- $x_0 \geq 1 \Rightarrow u_0(x_0) = 0 \Rightarrow \hat{x}(t) \equiv x_0$
- $0 < x_0 < 1 \Rightarrow u_0(x_0) = 1 - x_0 \Rightarrow \hat{x}(t) = (1-x_0)t + x_0$



$$T_* = -\frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} u_0'(x)} = 1 \qquad u_0'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

solución para $0 < t < T_* = 1$:

(I) $x < t$, $\quad u(x,t) \equiv 1$

(III) $x > 1$, $\quad u(x,t) \equiv 0$

(II), $\quad 0<t<1, \quad t<x<1$

Sea (x,t) fijo, $\in (\mathrm{II})$, $\quad x_0 = \dfrac{x-t}{1-t}$

$$u_0(x_0) = 1 - \frac{x-t}{1-t} = \frac{1-x}{1-t}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \begin{cases} 1, & x \le t < 1 \\ \dfrac{1-x}{1-t}, & t \le x \le 1, \quad 0<t<1 \\ 0, & x > 1, \quad 0<t<1 \end{cases}$$

En $t = T* = 1$ se forma una discontinuidad.
Extendemos la solución para $t \geq T* = 1$.

$$\Sigma = \{ (\hat{x}(t), t) \ : \ t \in [1, \infty) \}$$

La discontinuidad "inicia" en
$(x_0, t_0) = (1, 1)$.

Para puntos cerca de Σ por la derecha $u=0$
" " " " izq. $u=1$.

Por RH: $\quad \sigma = \dfrac{d\hat{x}}{dt} = \dfrac{[\![f]\!]}{[\![u]\!]} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$

$u_R = 0$
$u_L = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{1}{2}, \quad \hat{x}(1) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma = \{ (\hat{x}(t), t) = \tfrac{1}{2}(t+1) \ ; \ t \in [1, \infty) \}$$

Solución para $t \geq T_* = 1$:

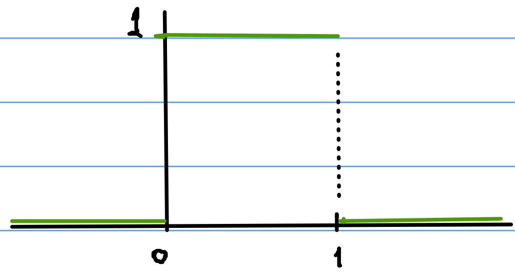
$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}(1+t) \\ 0, & x > \frac{1}{2}(1+t) \end{cases}$$

$t \in [1, \infty)$

Es la única solución entrópica al problema de cauchy.

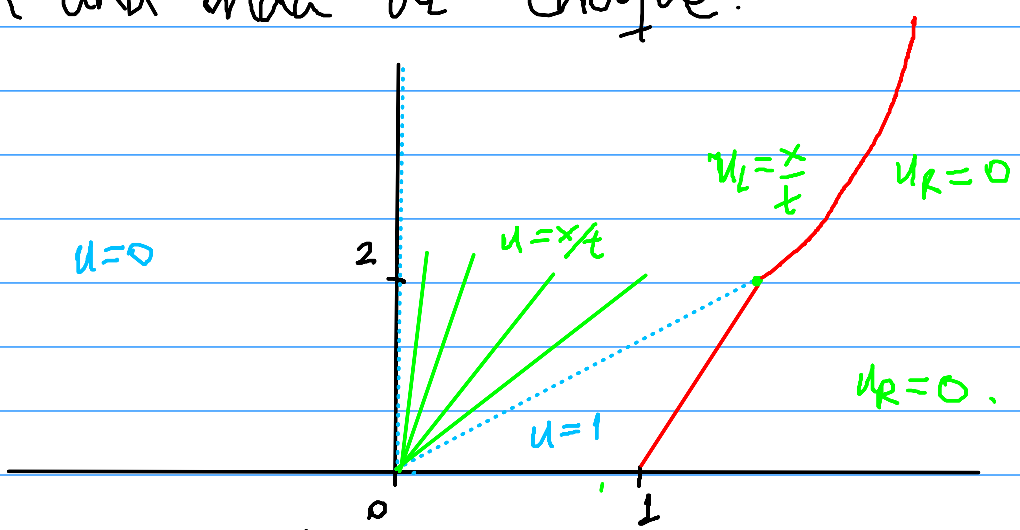
(D) Ejercicio: Resolver

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$$

$u(x,0) =$ 

$= \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0,\ x > 1 \end{cases}$

Demostrar que $\forall\ 0 < t < T_* = 2$ la solución es una onda de rarefacción con una onda de choque.



Tarea 1: Viernes 13 nov. $\leq$ 24:00 hrs.