Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.2: Ecuaciones cuasi-lineales, parte I

Ramón G. Plaza

IIMAS-UNAM

Septiembre 29, 2020.

Clasificación de ecuaciones de primer orden

Definición

- Una ecuación diferencial parcial (EDP) de orden $m \in \mathbb{N}$ es una relación entre u y sus derivadas de hasta orden m

$$F(x, u, D^{\alpha} u) = 0, \qquad |\alpha| \leq m.$$

- Una EDP es de **primer orden** si las derivadas parciales de orden más alto son de primer orden $(m = 1)$
- Una EDP de primer orden es **lineal** si sus coeficientes no dependen de u o de sus derivadas

Definición (continuación)

- Una EDP de primer orden es **semi-lineal** si los coeficientes de las derivadas de orden más alto no dependen de u o de sus derivadas
- Una EDP de primer orden es **cuasi-lineal** si los coeficientes no dependen de las derivadas de u
- Una EDP de primer orden es **completamente no lineal** en el caso más general $F(x, u, \nabla u) = 0$.

Ejemplos

- **Lineal**:
  - $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y)$
  - $u_t + a \cdot \nabla u = g$ (ec. de transporte)
- **Semi-lineal**:
  - $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u)$, con c no lineal en u
  - $u_x + (x+y)u_y = u^3$
- **Cuasi-lineal**:
  - $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$
  - $u_t + uu_x = 0$ (ec. de Burgers)
- **Completamente no-lineal**:
  - $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$
  - $|\nabla u|^2 = C$ (ec. de la eikonal)
  - $u_t + H(x,t,\nabla u) = 0$ (ec. de Hamilton-Jacobi)

Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden

Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden de la forma

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \qquad \text{(CL)}$$

donde $a,b,c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas que satisfacen ciertas propiedades de regularidad.

Por simplicidad, vamos a ilustrar la teoría de existencia local para el caso de **dos variables independientes**, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cuya interpretación geométrica es naturalmente más intuitiva. Sin embargo, la teoría es **extrapolable** a más dimensiones.

Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden

Ecuaciones cuasi-lineales de primer orden de la forma

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \qquad \text{(CL)}$$

donde $a,b,c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas que satisfacen ciertas propiedades de regularidad.

Por simplicidad, vamos a ilustrar la teoría de existencia local para el caso de **dos variables independientes**, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cuya interpretación geométrica es naturalmente más intuitiva. Sin embargo, la teoría es **extrapolable** a más dimensiones.

Observación:

Ecuaciones cuasi-lineales incluyen como casos particulares: **ecuaciones lineales**,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u + d(x,y),$$

(con $\tilde{c}(x,y,u) = c(x,y)u + d(x,y)$), y **ecuaciones semi-lineales**,

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u).$$

Datos iniciales

u es conocida sobre una **curva de datos** en el plano parametrizada por $\xi \in I \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^2, \\ u_{|\mathscr{I}} &= f(\xi), \end{aligned} \tag{CI}$$

donde $\tilde{x}, \tilde{y}, f \in C^1(I; \mathbb{R})$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto (puede ser $I = \mathbb{R}$). La curva de datos $\mathscr{I}$ es suficientemente regular.

La imagen de $\mathscr{I}$ bajo f,

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi)) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^3.$$

es una curva en $\mathbb{R}^3$ que llamaremos **curva inicial**.

Problema inverso

El **problema inverso** consiste en suponer que **existe** una solución continuamente diferenciable $u = u(x,y) \in C^1(D)$ al problema de Cauchy definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene a la curva inicial $\mathscr{I}$, con el fin de interpretarla geométricamente y así obtener el sistema característico asociado.

En su dominio de definición D, esta solución determina una **superficie**,

$$\mathcal{S} = \{(x,y,u(x,y)) \, : \, (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3,$$

que, a su vez, contiene a la curva de datos $\mathscr{I}'$

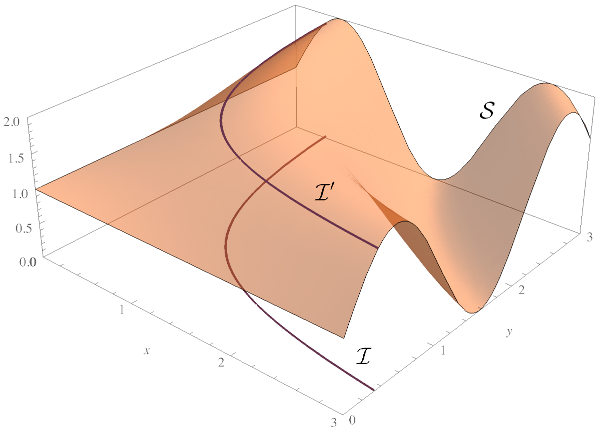

Figura: Superficie solución $\mathcal{S}$, curva de datos $\mathscr{I}$ en el plano y curva inicial $\mathscr{I}'$ sobre $\mathcal{S}$.

Dado que u es diferenciable, la superficie $\mathcal{S}$ está **bien parametrizada** y tiene una dirección normal definida por el vector

$$N = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que el campo vectorial

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} a(x,y,u(x,y)) \\ b(x,y,u(x,y)) \\ c(x,y,u(x,y)) \end{pmatrix}$$

es **tangente a la superficie para todo** $(x,y) \in D$. Como u es solución de la ecuación se tiene que

$$N \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = au_x + bu_y - c = 0.$$

Curvas características

Definición

Sea $(\tilde{x}, \tilde{y})(\xi)$, con $\xi \in I \subset \mathbb{R}$, un punto **fijo** sobre la curva $\mathscr{I}$. Las curvas en el **plano** $(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta))$ parametrizadas por $\eta \in \mathbb{R}$, soluciones al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d\check{x}}{d\eta} &= a(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y})), \qquad \check{x}(0) = \tilde{x}(\xi), \\ \frac{d\check{y}}{d\eta} &= b(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y})), \qquad \check{y}(0) = \tilde{y}(\xi), \end{aligned} \tag{SCP}$$

se denominan **curvas características** asociadas a la solución u de la ecuación (CI).

Teorema de Picard

Teorema (Picard)

Sea $F : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F = F(t,y)$, *con* $J \subseteq \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto, una función continua y Lipschitz continua con respecto a* $y \in \Omega$. *Si* $(t_0, y_0) \in J \times \Omega$ *entonces existen una vecindad de* $(t_0, y_0) \in J_0 \times \Omega_0 \subset J \times \Omega$ *y una función* $y \in C^1(J_0)$, $y(t) \in \Omega_0$, $\forall t \in J_0$, *tales que* y *es la única solución en* $J_0 \times \Omega_0$ *al sistema*

$$\frac{dy}{dt} = F(t,y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

Referencias: Braun, Chicone, Coddington-Levinson.

Observamos que:

- Las curvas características son curvas en el plano, con tangente $(a,b)^\top$, que inician sobre la curva $\mathscr{I}$ cuando $\eta = 0$.
- Si las funciones a, b son Lipschitz continuas (por ejemplo, si son de clase C^1) por el **teorema de Picard** existe una vecindad de $\eta = 0$, a saber, $\eta \in (-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$, donde el sistema (SCP) tiene una única solución $(\check{x}, \check{y})(\eta)$ de clase C^1.

Dado que $u = u(x,y)$ es solución de la ecuación, la existencia local de las curvas características implica la **existencia local de una curva**,

$$\Gamma = \{(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta), u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta)) \, : \, \eta \in (-\delta, \delta)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

que satisface

$$\frac{d}{d\eta}\big(u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta))\big) = u_x \frac{d\check{x}}{d\eta} + u_y \frac{d\check{y}}{d\eta} = a u_x + b u_y = c,$$

y además,

$$u(\check{x}(0), \check{y}(0)) = u(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = f(\xi).$$

Por lo tanto, **la curva Γ es tangente a la superficie $\mathcal{S}$**.

Asimismo, observamos que dicha curva es solución del sistema

$$\frac{dv}{d\eta} = c(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta), v),$$
$$v(0) = f(\xi),$$

para $\eta \sim 0$. Por la unicidad de las soluciones al sistema (SCP) en una vecindad de $\eta = 0$ (una vez más, por el teorema de Picard), la solución v coincide (localmente) con la curva Γ:

$$v(\eta) = u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta)), \qquad \eta \sim 0.$$

La dirección $(a, b, c)^\top$ en el espacio es tangente a la superficie y la llamaremos **dirección característica**.

Asimismo, observamos que dicha curva es solución del sistema

$$\frac{dv}{d\eta} = c(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta), v),$$
$$v(0) = f(\xi),$$

para $\eta \sim 0$. Por la unicidad de las soluciones al sistema (SCP) en una vecindad de $\eta = 0$ (una vez más, por el teorema de Picard), la solución v coincide (localmente) con la curva Γ:

$$v(\eta) = u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta)), \qquad \eta \sim 0.$$

La dirección $(a, b, c)^{\top}$ en el espacio es tangente a la superficie y la llamaremos **dirección característica**.

Lema

*Sea $(\check{x},\check{y},\check{u})(\eta)$, con $\eta \in (-\delta,\delta)$, una **curva integral** del campo $(a,b,c)^\top$, es decir, resuelve*

$$\frac{d}{d\eta}\begin{pmatrix}\check{x}\\ \check{y}\\ \check{u}\end{pmatrix} = \alpha(\eta)\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix},$$

con condición inicial sobre la curva $\mathscr{I}'$: $(\check{x},\check{y},\check{u})(0) = (\tilde{x},\tilde{y},f)(\xi)$, para $\xi \in I$, y donde $\alpha = \alpha(\eta)$ es una función continua. Entonces la familia de curvas

$$\Gamma_\xi = \{(\check{x},\check{y},\check{u})(\eta) \,:\, \eta \in (-\delta,\delta)\}, \quad \xi \in I,$$

está contenida enteramente en $\mathcal{S}$.

Demostración: En $\eta = 0$, $(\check{x}, \check{y}, \check{u})(0) = (\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi)$ por lo que la familia Γ_ξ evaluada en $\eta = 0$ coincide con la curva de datos $\mathscr{I}'$ que está contenida, a su vez, en $\mathcal{S}$. Para demostrar que Γ está contenida en $\mathcal{S}$ para $\eta \in (-\delta, \delta)$ basta con demostrar que la curva es tangente a la superficie en todo punto. Pero esto se cumple ya que la tangente es paralela al campo $(a, b, c)^\top$, el cual es tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en todo punto. $\square$

Metodología

- **Idea**: resolver **simultáneamente** los sistemas para x y t y para v en una vecindad de la curva inicial $\mathscr{I}'$.
- El resultado es una familia (parametrizada por $\xi \in I$) de curvas características (parametrizadas por $\eta \sim 0$).
- La unión de dicha familia **podría** generar una parametrización de la solución $u = u(x,y)$ cerca de la curva inicial $\mathscr{I}'$.
- Al suponer que la solución existe (problema inverso), esto implica automáticamente que la superficie $\mathcal{S}$ está bien parametrizada ($N \neq 0$, para todo $(x,y) \in D$).
- Sin embargo, podría suceder que la superficie parametrizada por las variables (η, ξ), no sea, a su vez, parametrizable en las variables (x,y).

La condición de transversalidad

La solución $(\check{x},\check{y})(\eta)$ del sistema (SCP) para cada $\xi \in I$ define una parametrización

$$(\eta,\xi) \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x}(\eta,\xi) \\ \bar{y}(\eta,\xi) \end{pmatrix}, \qquad (\eta,\xi) \in (-\delta,\delta) \times I, \qquad \text{(M)}$$

que satisface $\bar{x}_\eta = a, \bar{y}_\eta = b$, $\bar{x}(0,\xi) = \tilde{x}(\xi)$, $\bar{y}(0,\xi) = \tilde{y}(\xi)$. Por el teorema de Picard, el mapeo (M) es continuamente diferenciable en η. Dado que la parametrización de la curva $\mathscr{I}$ es de clase C^1, podemos suponer que el mapeo (M) también es continuamente diferenciable en ξ (¿por qué?) y, por ende, de clase C^1 en $(\eta,\xi) \in (-\delta,\delta) \times I$.

La superficie definida mediante

$$(\eta,\xi) \mapsto Z(\eta,\xi) := \begin{pmatrix} \bar{x}(\eta,\xi) \\ \bar{y}(\eta,\xi) \\ u(\bar{x}(\eta,\xi),\bar{y}(\eta,\xi)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

$$(\eta,\xi) \in (-\delta,\delta) \times I,$$

estará bien parametrizada si se satisface la condición

$$Z_\xi \times Z_\eta = \begin{pmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{y}_\xi \\ * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\eta \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta - \bar{y}_\xi \bar{x}_\eta \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{(C1)}$$

para cada $(\eta,\xi) \in (-\delta,\delta) \times I$.

El vector normal es diferente de cero si la última componente es distinta de cero, es decir, si

$$\det\begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\xi & \bar{y}_\eta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & a \\ \bar{y}_\xi & b \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \forall (\eta,\xi) \in (-\delta,\delta)\times I. \tag{C2}$$

Claramente (C2) $\Rightarrow$ (C1). Por continuidad de las soluciones del teorema de Picard, la condición (C2) se cumple en una vecindad (posiblemente más pequeña) de $\eta = 0$ si

$$\det\begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\xi & \bar{y}_\eta \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \det\begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{y}'(\xi) & b \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \forall \xi \in I. \tag{C3}$$

En otras palabras, (C3) $\Rightarrow$ (C2) $\Rightarrow$ (C1) en una vecindad (tal vez más pequeña) de $\eta = 0$.

La condición (C3) es la **condición de transversalidad**, la cual significa, geométricamente, que en $\eta = 0$ la curva de datos $\mathscr{I}$ no es tangente a la dirección característica determinada por la ecuación. Esta condición garantiza que el mapeo $(\eta, \xi) \mapsto (x, y)$ es invertible **localmente** y que es posible escribir la solución de la forma $u = u(x, y)$ en una vecindad de la curva inicial $\mathscr{I}'$

1. El problema inverso
2. El problema directo
3. Ejemplos

Sistema característico

Motivados por el **problema inverso**, busquemos curvas que pasan por la curva inicial $\mathscr{I}'$ con tangente $(a,b,c)^\top$. Es decir, para cada $\xi \in I$, fijo, consideremos el siguiente **sistema característico**:

$$\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= a(\check{x},\check{y},\check{u}), & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= b(\check{x},\check{y},\check{u}), & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{d\check{u}}{d\eta} &= c(\check{x},\check{y},\check{u}), & \check{u}(0) &= f(\xi).
\end{aligned} \tag{SC}$$

Hipótesis

Con el fin de aplicar el teorema de Picard, es suficiente con suponer que las funciones a, b y c son Lipschitz continuas de sus argumentos. De este modo vamos a suponer que:

- a, b, c son **Lipschitz continuas**.
- La **condición de transversalidad** (C3) se cumple en $\eta = 0$, es decir,

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi)) \\ \tilde{y}'(\xi) & b(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi)) \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \forall \xi \in I.$$

Teorema de existencia local

Teorema (existencia local, caso cuasi-lineal)

Sean $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *Lipschitz continuas. Sean* $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ *y* f *de clase* C^1 *en* $\xi \in I$, *de manera que se cumple la condición de transversalidad. Entonces el problema de Cauchy para la ecuación cuasi-lineal* (CL) *con condición inicial* (CI) *tiene una única solución de clase* C^1, $u = u(x, y)$, *en una vecindad de la curva* $\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi) \, : \, \xi \in I\}$, *determinada paramétricamente por la solución al sistema* (SC).

Demostración: Por el teorema de Picard, para cada $\xi \in I$ existe una única solución al sistema (SC) de clase C^1 en una vecindad de $\eta \in (-\delta, \delta)$. Para cada $\xi \in I$ fijo, denotamos dicha curva mediante $(\check{x}, \check{y}, \check{u}) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^3$. Al variar continuamente $\xi \in I$ obtenemos una familia paramétrica de curvas,

$$Z(\eta, \xi) = \begin{pmatrix} \bar{x}(\eta, \xi) \\ \bar{y}(\eta, \xi) \\ \bar{u}(\eta, \xi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \check{x}(\eta) \\ \check{y}(\eta) \\ \check{u}(\eta) \end{pmatrix}, \qquad (\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I.$$

Z satisface:

$$Z_\eta = \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\eta \\ \bar{u}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad (\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I,$$

$$Z(0,\xi) = \begin{pmatrix} \bar{x}(0,\xi) \\ \bar{y}(0,\xi) \\ \bar{u}(0,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}(\xi) \\ \tilde{y}(\xi) \\ f(\xi) \end{pmatrix}, \qquad \xi \in I,$$

y además, Z es de clase C^1 en $(-\delta, \delta) \times I$.

Asimismo, gracias a la condición (C3), por continuidad de las soluciones existe una vecindad $\eta \in (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta})$ donde la solución existe y satisface la condición (C2). Esto implica que el mapeo

$$(\eta, \xi) \mapsto (\bar{x}(\eta, \xi), \bar{y}(\eta, \xi)),$$

es invertible localmente.

Sea la vecindad en el plano $\mathscr{O} := (\bar{x},\bar{y})((-\tilde{\delta},\tilde{\delta}) \times I) \subset \mathbb{R}^2$. Por el teorema de la función inversa, la condición (C2) implica que existen funciones de clase C^1,

$$(\bar{\eta},\bar{\xi}) : \mathscr{O} \to (-\tilde{\delta},\tilde{\delta}) \times I,$$

tales que el mapeo $(x,y) \mapsto (\bar{\eta}(x,y),\bar{\xi}(x,y))$, es el mapeo inverso de $(\eta,\xi) \mapsto (\bar{x}(\eta,\xi),\bar{y}(\eta,\xi))$. Dado que $(\bar{x},\bar{y})(0,\xi) = (\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi))$, estas funciones satisfacen

$$(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi)),\bar{\xi}(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi))) = (0,\xi),$$

para cada $\xi \in I$.
De este modo definimos, para cada $(x,y) \in \mathscr{O}$,

$$u(x,y) := \bar{u}(\bar{\eta}(x,y),\bar{\xi}(x,y)). \tag{U}$$

En la vecindad $\mathscr{O}$, (U) es solución del problema de Cauchy (CL) - (CI). En efecto, para cada $\xi \in I$ tenemos que

$$u(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi)) = \bar{u}(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi)),\bar{\xi}(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi))) = \bar{u}(0,\xi) = f(\xi),$$

es decir, u **satisface la condición inicial** (CI). Por otro lado, usando la regla de la cadena, calculamos

$$au_x + bu_y = (a\bar{\eta}_x + b\bar{\eta}_y)\bar{u}_\eta + (a\bar{\xi}_x + b\bar{\xi}_y)\bar{u}_\xi.$$

Por el teorema de la función inversa, en la vecindad $\mathscr{O}$,

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_x & \bar{\eta}_y \\ \bar{\xi}_x & \bar{\xi}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta & \bar{x}_\xi \\ \bar{y}_\eta & \bar{y}_\xi \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \bar{y}_\xi & -\bar{x}_\xi \\ -\bar{y}_\eta & \bar{x}_\eta \end{pmatrix},$$

donde $\Delta := \bar{x}_\eta \bar{y}_\xi - \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta = a\bar{y}_\xi - b\bar{x}_\xi \neq 0$ para todo $(\eta,\xi) \in (-\tilde{\delta},\tilde{\delta}) \times I$, por la condición (C2).

De este modo,

$$a\bar{\eta}_x + b\bar{\eta}_y = \frac{1}{\Delta}\left(a\bar{y}_\xi - b\bar{x}_\xi\right) = \frac{\Delta}{\Delta} = 1,$$
$$a\bar{\xi}_x + b\bar{\xi}_y = \frac{1}{\Delta}(-a\bar{y}_\eta + b\bar{x}_\eta) = \frac{-ab+ba}{\Delta} = 0.$$

Sustituyendo obtenemos,

$$au_x + bu_y = \bar{u}_\eta = c(\bar{x},\bar{y},\bar{u}) = c(x,y,u(x,y)),$$

para todo $(x,y) \in \mathscr{O}$. Es decir, u es **solución de la ecuación diferencial**. Es de clase C^1 en la vecindad $\mathscr{O}$ por el teorema de la función inversa y para cada $(x,y) \in \mathscr{O}$, la gráfica $(x,y,u(x,y))$ está en una vecindad de la curva inicial $\mathscr{I}'$. La unicidad de la solución es consecuencia de la unicidad de la solución al sistema característico. $\square$

1. El problema inverso
2. El problema directo
3. Ejemplos

Ejemplos

(I) Sea la ecuación **lineal**

$$u_x + x u_y = y,$$

con datos de Cauchy

$$u(0, y) = \cos y, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Curva de datos $\mathscr{I} = \{(0, \xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$, con $u_{|\mathscr{I}} = \cos \xi$.
Aquí $a(x, y, u) = 1$, $b(x, y, u) = x$, y $c(x, y, u) = y$.

Curva inicial: $\mathscr{I}' = \{(0, \xi, \cos \xi) : \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Por el **teorema de existencia local**, la solución está determinada localmente por la solución al sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= 1, & x(0) &= 0, \\ \frac{dy}{d\eta} &= x, & y(0) &= \xi, \\ \frac{du}{d\eta} &= y, & u(0) &= \cos\xi, \end{aligned}$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$.

El sistema es fácil de resolver: la solución es

$$x(\eta) = \eta, \qquad y(\eta) = \tfrac{1}{2}\eta^2 + \xi, \qquad u(\eta) = \tfrac{1}{6}\eta^3 + \xi\eta + \cos\xi.$$

El mapeo $(\eta, \xi) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})(\eta, \xi) := (\eta, \frac{1}{2}\eta^2 + \xi)$ es siempre invertible, ya que

$$\det \begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ \bar{y}_\xi & \bar{y}_\eta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$. Claramente, el mapeo inverso es $\eta = x$, $\xi = y - \frac{1}{2}x^2$, por lo que, sustituyendo en la expresión para u, obtenemos la solución:

$$u(x,y) = xy - \tfrac{1}{3}x^3 + \cos\left(y - \tfrac{1}{2}x^2\right).$$

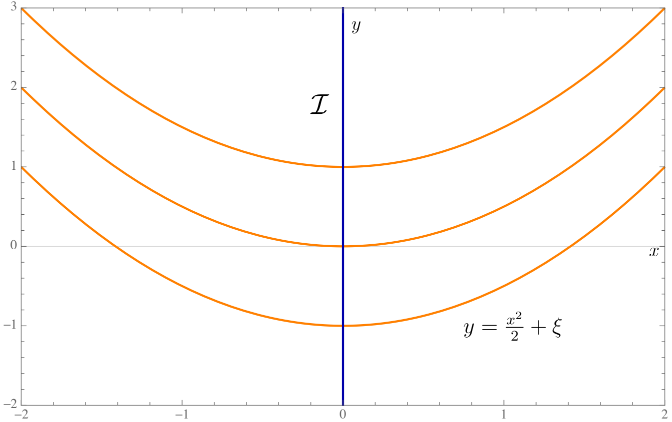

Figura: Características en el plano y curva de datos $\mathscr{I}$.

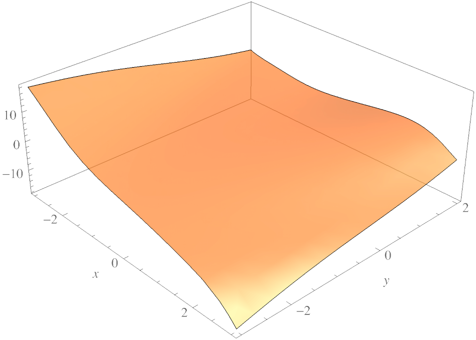

Figura: $u(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 + \cos\left(y - \frac{1}{2}x^2\right)$.

Observaciones:

- u resuelve la ecuación diferencial y satisface las condiciones iniciales (ejercicio).
- La solución está definida **globalmente** (es decir, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), a pesar de que el teorema sólo nos garantiza la existencia **local** de la solución.

(II) Consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$u_x + u_y = e^u,$$
$$u(x,0) = x.$$

La ecuación es **semi-lineal** y de acuerdo con nuestra notación

$$a = 1, \qquad b = 1, \qquad c = e^u.$$

Curva de datos:

$$\mathscr{I} = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = (\xi, 0) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\}$$

Datos iniciales: $u_{|\mathscr{I}} = f(\xi) := \xi$.
Verificamos la condición (C3):

$$\det \begin{pmatrix} a & \tilde{x}'(\xi) \\ b & \tilde{y}'(\xi) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$

El sistema característico asociado es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= 1, \qquad & x(0) &= \xi, \\ \frac{dy}{d\eta} &= 1, \qquad & y(0) &= 0, \\ \frac{du}{d\eta} &= e^u, \qquad & u(0) &= \xi. \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones para x y para y obtenemos

$$x = \eta + \xi, \qquad y = \eta.$$

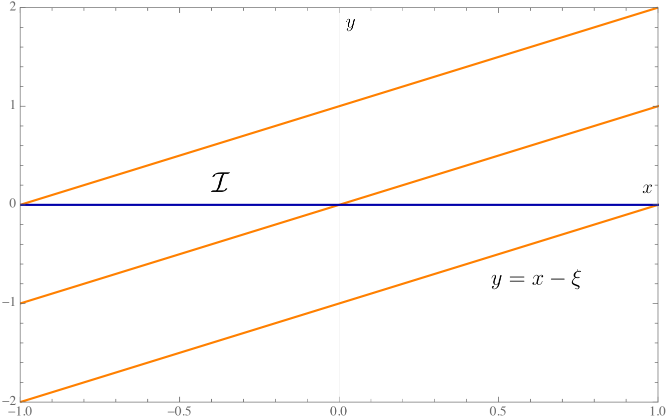

Figura: Características en el plano y curva de datos $\mathscr{I}$.

La ecuación para u se puede resolver por separación de variables

$$\frac{d}{d\eta}\left(-e^{-u}\right) = 1 \;\Rightarrow\; e^{-u} = e^{-\xi} - \eta,$$

ya que $u(0) = \xi$.
La solución es

$$u = -\log(e^{-\xi} - \eta).$$

Sustituyendo en términos de x y y se obtiene

$$u(x,y) = -\log(e^{y-x} - y).$$

Claramente u resuelve la ecuación diferencial y satisface las condiciones iniciales (ejercicio).

La ecuación para u se puede resolver por separación de variables

$$\frac{d}{d\eta}\left(-e^{-u}\right) = 1 \;\Rightarrow\; e^{-u} = e^{-\xi} - \eta,$$

ya que $u(0) = \xi$.

La solución es

$$u = -\log(e^{-\xi} - \eta).$$

Sustituyendo en términos de x y y se obtiene

$$u(x,y) = -\log(e^{y-x} - y).$$

Claramente u resuelve la ecuación diferencial y satisface las condiciones iniciales (ejercicio).

La solución es de clase C^1 en una vecindad de la condición inicial, pero **no está definida globalmente**. Para que esté bien definida se requiere que $e^{y-x} > y$. El dominio de definición D de la solución es

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, e^{y-x} > y\}.$$

Notamos que u está bien definida para todo $y < 0$. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ con $\xi \to \infty$ la vecindad donde existe la solución al sistema característico es cada vez más pequeña.

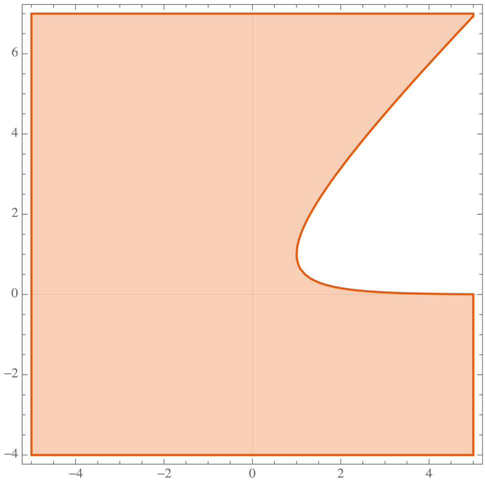

Figura: Dominio $e^{y-x} - y > 0$.

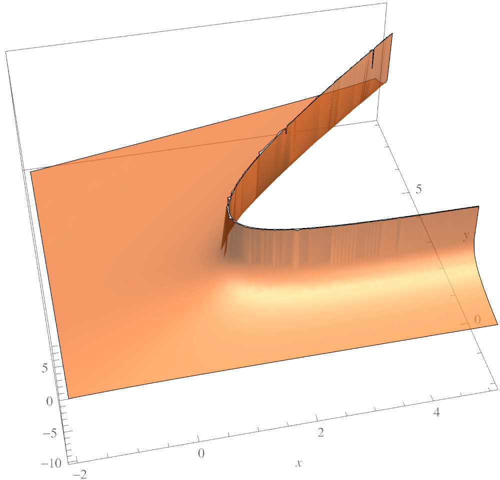

Figura: Solución $u(x,y) = -\log(e^{y-x} - y)$.

(III) Leyes de conservación (caso escalar)

Sea el siguiente problema de Cauchy para una **ley de conservación escalar**:

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = 0, \qquad & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{LC}$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$ es la función de flujo, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

Ejemplo: Burgers $f(u) = \frac{1}{2}u^2$. Sabemos que la solución no puede ser global (puede haber cruce de características en el caso general). Sin embargo, si u_0 es C^1 el teorema garantiza la existencia de una solución **local**.

Si la solución es de clase C^1, la ecuación es equivalente a

$$u_t + f'(u)u_x = 0.$$

La ecuación es cuasi-lineal, y de acuerdo con nuestra notación

$$a = f'(u) =: a(u), \qquad b = 1, \qquad c = 0.$$

Curva de datos:

$$\mathscr{I} = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{t}(\xi)) = (\xi, 0) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\}$$

Datos iniciales: $u_{|\mathscr{I}} = u_0(\xi)$.

Lema (existencia local, ley escalar de conservación)

Sean $u_0 \in C^1(\mathbb{R}), f \in C^2(\mathbb{R})$*. Entonces el problema de Cauchy* (LC) *tiene una única solución de clase* C^1 *en una vecindad de la curva inicial* $\mathscr{I}' = \{(\xi, 0, u_0(\xi)) = (\tilde{x}, \tilde{t}, u_0)(\xi) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\}$.

Demostración: Dado que f es de clase C^2, $a = f'$ es de clase C^1. Además, la condición (C3) en este caso se lee

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & a \\ \tilde{t}'(\xi) & b \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & a(u_0(\xi)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema y concluir la existencia de un cierto $T > 0$ tal que existe una solución única de clase $C^1(\mathbb{R} \times (-T, T))$. $\square$

Próxima lección: pérdida de unicidad