Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.4: Ecuaciones completamente no lineales

Ramón G. Plaza
IIMAS-UNAM

Octubre 6, 2020.

1. Problema inverso: conos de Monge
2. Problema directo: banda característica
3. Ejemplos

Ecuaciones completamente no lineales

Ecuaciones generales no lineales de la forma:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{ECN}$$

para $u = u(x, y) \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supondremos que $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ es una función suave (al menos de clase C^2) de sus argumentos:

$$F = F(x, y, u, p, q).$$

Asociamos

$$u_x \leftrightarrow p, \qquad u_y \leftrightarrow q$$

Para evitar casos triviales, supondremos también que

$$F_p^2 + F_q^2 \neq 0, \tag{Cn}$$

es decir, F_p y F_q no se anulan **simultáneamente**. Por ejemplo, en el caso cuasi-lineal,

$$F(x,y,u,p,q) = a(x,y,u)p + b(x,y,u)q - c(x,y,u) = 0,$$

por lo que la condición (Cn) implica simplemente que a y b no son cero al mismo tiempo.

Problema de Cauchy

El problema de Cauchy asociado a la ecuación (ECN) requiere que u sea conocida sobre una **curva de datos** en el plano $\mathscr{I}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^2, \\ u_{|\mathscr{I}} &= f(\xi), \end{aligned} \qquad \text{(CI)}$$

donde $\tilde{x},\tilde{y},f \in C^1(I;\mathbb{R})$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto

Curva inicial:

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x},\tilde{y},f)(\xi) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^3,$$

Ejemplos

(a) La ecuación de la **eikonal** en óptica geométrica:

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{c^2},$$

donde $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$. Aproximación de **frentes de onda** (por ejemplo, ondas electromagnéticas) que se propagan con velocidad $c \neq 0$.

(b) La **ecuación de Hamilton-Jacobi**:

$$u_t + H(x, \nabla_x u) = 0,$$

donde $u = u(x,t)$, $\nabla_x u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. $H = H(x,p)$, con $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ es el **hamiltoniano** en mecánica clásica, función usualmente no lineal en p.

Problema inverso

Supongamos que $u = u(x,y)$ es una función de clase C^2 en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, abierto y **conexo**, que contiene a la curva de datos $\mathscr{I}$. Esta solución define una superficie,

$$\mathcal{S} = \{(x,y,u(x,y)) \,:\, (x,y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3.$$

De manera análoga al caso cuasi-lineal, la ecuación (ECN) es una **relación para la normal a la superficie** $\mathcal{S}$. Sin embargo, esta relación es **más complicada**.

Conos de Monge

La normal a la superficie $\mathcal{S}$ es

$$N = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p \\ q \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Si $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ es un punto sobre la superficie $\mathcal{S}$ entonces el plano tangente en ese punto tiene como ecuación

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0,$$

donde p y q satisfacen la relación

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0.$$

Observamos que la ecuación diferencial limita los **posibles planos tangentes** de una superficie integral (es decir, de la superficie determinada por una solución de la ecuación) en cada punto, a una **familia uniparamétrica**: en efecto, por la condición (Cn) supongamos que $F_q \neq 0$. Por el teorema de la función implícita la ecuación $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ determina una función $q = q(p)$ en una vecindad del punto P_0, tal que

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q(p)) = 0, \qquad \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}.$$

En consecuencia, los posibles planos tangentes a la superficie en el punto P_0 forman una familia uniparamétrica, definida por

$$p(x-x_0)+q(p)(y-y_0)=z-z_0, \qquad p\in\mathbb{R}.$$

En general, ya que la función $q=q(p)$ puede ser no lineal, esta familia de planos genera un cono con vértice P_0, que se conoce como **cono de Monge**. Cada posible plano tangente toca al cono de Monge en un posible **generador** de la superficie.

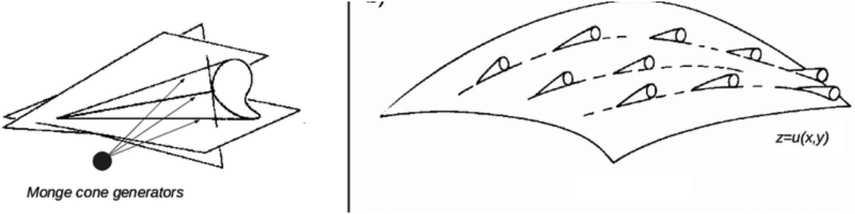

Figura: Conos de Monge sobre la superficie solución $z = u(x,y)$.

Características

En el **problema inverso**, buscamos curvas características en el plano tangente; a esta curva le llamamos **generador del cono de Monge**. Una solución $u = u(x,y)$ que genera a la superficie $\mathcal{S}$ y que pasa por P_0 toca al cono de Monge en el vértice P_0.

Ejemplo: ecuación **cuasi-lineal**. Si $F_q \neq 0$ entonces en el caso cuasi-lineal, $b \neq 0$. La solución $q = q(p)$ de

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = a_0 p + b_0 q - c_0 = 0,$$

es **lineal** en p, $q(p) = b_0^{-1}(c_0 - a_0 p)$.

Sustituyendo notamos que la familia de planos,

$$p(x-x_0)+b_0^{-1}(c_0-a_0p)(y-y_0)=z-z_0,$$

parametrizada por $p \in \mathbb{R}$ tiene como intersección la **línea recta**

$$\begin{cases} x-x_0=b_0^{-1}a_0(y-y_0), \\ z-z_0=b_0^{-1}c_0(y-y_0), \end{cases}$$

es decir, la línea recta que pasa por P_0 en dirección (a_0,b_0,c_0).

En el caso cuasi-lineal el cono de Monge se colapsa en una línea recta que pasa por P_0 en la dirección característica (a,b,c)

Sistema característico

Análogamente al caso cuasi-lineal, vamos a encontrar el sistema característico asociado. Suponiendo que $u = u(x,y)$ es una solución de clase C^2 derivamos la ecuación (ECN) con respecto a x y a y:

$$\begin{aligned} F_x + F_u u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{yx} &= 0, \\ F_y + F_u u_y + F_p u_{xy} + F_q u_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Dado que u es de clase C^2 en un dominio **conexo** Ω, $u_{xy} = u_{yx}$. Denotando $u_x = p$ y $u_y = q$ podemos **desacoplar** el sistema en ecuaciones para p y para q:

$$\begin{aligned} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q p_y &= 0, \\ F_y + F_u q + F_p q_x + F_q q_y &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación para p es **cuasi-lineal**. La solución $p = u_x$ está asociada al siguiente sistema característico:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi),
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in I$, y donde F_p, F_q, F_x y F_u están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), \check{p}, u_y(\check{x}, \check{y}))$. **El valor de $\tilde{p}(\xi)$ no está determinado**.

Análogamente, la ecuación para q también es **cuasi-lineal**. La solución $q = u_y$ está determinada por la solución al sistema,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi),
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in I$, y donde ahora las derivadas F_p, F_q, F_y y F_u están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), u_y(\check{x}, \check{y}), \check{q})$. **Tampoco conocemos el valor inicial $\check{q}(0) = \tilde{q}(\xi)$.**

¿Cómo determinar $\tilde{p}(\xi)$ y $\tilde{q}(\xi)$?

Para ello, hacemos dos observaciones:

(i) Dado que u es solución, se debe cumplir la ecuación diferencial sobre la curva $\mathscr{I}'$:

$$F(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi),f(\xi),\tilde{p}(\xi),\tilde{q}(\xi)) = 0,$$

para cada $\xi \in I$.

(ii) Problema inverso, al suponer que existe una solución, la superficie $\mathcal{S}$ contiene a la curva de datos $\mathscr{I}'$. Así, para cada $\xi \in I$, el vector tangente τ a la curva $\mathscr{I}'$ es **perpendicular al vector normal a la superficie**, $N = (\tilde{p}(\xi),\tilde{q}(\xi),-1)$:

$$\tau \cdot N = \tilde{p}(\xi)\tilde{x}'(\xi) + \tilde{q}(\xi)\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

para cada $\xi \in I$.

¿Cómo determinar $\tilde{p}(\xi)$ y $\tilde{q}(\xi)$?

Para ello, hacemos dos observaciones:

(i) Dado que u es solución, se debe cumplir la ecuación diferencial sobre la curva $\mathscr{I}'$:

$$F(\tilde{x}(\xi),\tilde{y}(\xi),f(\xi),\tilde{p}(\xi),\tilde{q}(\xi)) = 0,$$

para cada $\xi \in I$.

(ii) Problema inverso, al suponer que existe una solución, la superficie $\mathcal{S}$ contiene a la curva de datos $\mathscr{I}'$. Así, para cada $\xi \in I$, el vector tangente τ a la curva $\mathscr{I}'$ es **perpendicular al vector normal a la superficie**, $N = (\tilde{p}(\xi),\tilde{q}(\xi),-1)$:

$$\tau \cdot N = \tilde{p}(\xi)\tilde{x}'(\xi) + \tilde{q}(\xi)\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

para cada $\xi \in I$.

Sistema no lineal para el gradiente

De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones para $\tilde{p}(\xi)$ y $\tilde{q}(\xi)$:

$$\begin{aligned} G(p,q) &:= p\tilde{x}'(\xi) + q\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0, \\ H(p,q) &:= F(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi), f(\xi), p, q) = 0. \end{aligned} \qquad (\mathrm{S}\nabla)$$

Para cada $\xi \in I$, $(\tilde{p},\tilde{q})(\xi)$ debe ser solución del sistema (S∇). Geométricamente, esto significa que debemos determinar **la dirección del plano tangente sobre las curvas características**, es decir, hallar u_x y u_y.

Observamos también que el sistema (S∇) es usualmente **no lineal** y que puede tener más de una solución. Una condición **suficiente** para la existencia de una solución es que

$$\det \begin{pmatrix} G_p & G_q \\ H_p & H_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & F_p \\ \tilde{y}'(\xi) & F_q \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \xi \in I. \quad \text{(C3p)}$$

Esta condición es equivalente a la condición de transversalidad (C3) en el caso cuasi-lineal.

Observamos también que el sistema (S∇) es usualmente **no lineal** y que puede tener más de una solución. Una condición **suficiente** para la existencia de una solución es que

$$\det \begin{pmatrix} G_p & G_q \\ H_p & H_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi) & F_p \\ \tilde{y}'(\xi) & F_q \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \xi \in I. \qquad \text{(C3p)}$$

Esta condición es equivalente a la condición de transversalidad (C3) en el caso cuasi-lineal.

Sistema característico

Por lo tanto, suponiendo que para todo $\xi \in I$ existe una solución $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ al sistema (S∇), consideramos el siguiente sistema característico:

$$\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi),\\
\frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi),
\end{aligned}$$

donde las derivadas de F están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, u(\check{x}, \check{y}), \check{p}, \check{q})$.

Por el teorema de Picard existe una única solución de clase C^1 en una vecindad de $\eta = 0$ (la solución es única para cada $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ solución de (S∇), la cual puede no ser única). Además, si definimos $\check{u}(\eta) := u(\check{x}(\eta), \check{y}(\eta))$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\check{u}}{d\eta} &= u_x \frac{d\check{x}}{d\eta} + u_y \frac{d\check{y}}{d\eta} = \check{p}F_p + \check{q}F_q, \\ \check{u}(0) &= f(\xi). \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos **la última ecuación característica a considerar en el problema directo**.

1. Problema inverso: conos de Monge
2. Problema directo: banda característica
3. Ejemplos

Problema directo

Objetivo: Encontrar una solución de clase C^1 a la ecuación completamente nolineal (ECN) sujeta a las condiciones iniciales (CI) sobre la curva de datos $\mathscr{I}$.

Extrapolando del caso cuasi-lineal, proponemos resolver un sistema característico asociado al problema de Cauchy: generar curvas parametrizadas por η y que inician sobre puntos de la curva inicial $\mathscr{I}'$ en el espacio (para cada ξ fijo). Debemos poner atención a:

(a) Las condiciones de invertibilidad del mapeo $(\eta,\xi) \mapsto (x,y)$

(b) La solubilidad del sistema nolineal para el gradiente (S∇)

Sistema característico

Buscamos curvas que inician en la curva de datos $\mathscr{I}'$, soluciones del sistema

$$\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi), \\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi), \\
\frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi), \\
\frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi), \\
\frac{d\check{u}}{d\eta} &= \check{p}F_p + \check{q}F_q, & \check{u}(0) &= f(\xi),
\end{aligned} \tag{SC}$$

para cada $\xi \in I$, donde las derivadas de F están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, \check{u}, \check{p}, \check{q})$. Aquí suponemos que **existe (al menos) una solución** $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ **del sistema** (S∇).

Banda característica

La solución al sistema característico (SC) se denomina **banda característica**, en virtud de que ahora se reemplaza la curva característica en el caso cuasi-lineal en dirección (a, b, c) por una estructura geométrica más complicada: **en cada punto es necesario determinar la dirección del plano tangente, dada por** $(\tilde{p}, \tilde{q}, -1)$

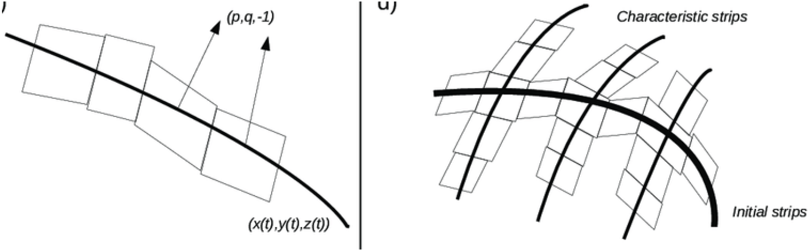

Figura: Banda característica.

Definición

Sea $\xi_0 \in I$ y sea $P_0 \in \mathbb{R}^5$ el punto

$$P_0 = (\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), \tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0)) =: (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Se dice que P_0 satisface la **condición de transversalidad generalizada** si el par $(p_0, q_0) = (\tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0))$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} G(p_0, q_0) &= p_0 \tilde{x}'(\xi_0) + q_0 \tilde{y}'(\xi_0) - f'(\xi_0) = 0, \\ H(p_0, q_0) &= F(\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), p_0, q_0) = 0, \end{aligned}$$

y además

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) & F_p(P_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) & F_q(P_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Existencia local - caso completamente no lineal

Teorema

Sea $F = F(x, y, u, p, q)$ de clase C^2 tal que $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$. Supongamos que $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ y f son de clase C^1 en $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$. Si para todo $\xi \in I$ el punto $P_0 = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ satisface la condición de transversalidad generalizada, entonces existe una solución al problema de Cauchy (ECN) - (CI), *de clase C^1, en una vecindad de la curva $\mathscr{I}'$, la cual está determinada paramétricamente por la solución al sistema* (SC) *para cada $\xi \in I$.*

Observación: No se especifica que la solución sea **única**.

Existencia local - caso completamente no lineal

Teorema

Sea $F = F(x, y, u, p, q)$ *de clase* C^2 *tal que* $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$*. Supongamos que* $\tilde{x}$*,* $\tilde{y}$ *y* f *son de clase* C^1 *en* $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$*. Si para todo* $\xi \in I$ *el punto* $P_0 = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ *satisface la condición de transversalidad generalizada, entonces existe una solución al problema de Cauchy* (ECN) - (CI)*, de clase* C^1*, en una vecindad de la curva* $\mathscr{I}'$*, la cual está determinada paramétricamente por la solución al sistema* (SC) *para cada* $\xi \in I$*.*

Observación: No se especifica que la solución sea **única**.

Demostración: Por las hipótesis del teorema, para cada $\xi \in I$ es posible encontrar un par $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$, solución de (S$\nabla$) (sist. gradiente) y (C3p) (transversalidad). De este modo, podemos plantear el sistema (SC). Dado que F es de clase C^2 y $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$, por el **teorema de Picard** concluímos que, para cada $\xi \in I$ fijo, el sistema (SC) tiene una única solución en una vecindad de $\eta = 0$. Si variamos $\xi \in I$ obtenemos una **banda característica** que denotamos mediante

$$\bar{P}(\eta, \xi) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})(\eta, \xi)^\top, \qquad (\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I,$$

y que satisface

- $\bar{P}(0, \xi) = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$,
- $(\partial/\partial\eta)\bar{P} = (F_p, F_q, \bar{p}F_p + \bar{q}F_q, -F_x - \bar{p}F_u, -F_y - \bar{q}F_u)$.

Notamos que en $\eta = 0$, $F(\bar{P}(0,\xi)) = F(\tilde{x},\tilde{y},f,\tilde{p},\tilde{q})_{|\xi\in I} = 0$, ya que $(\tilde{p},\tilde{q})$ es solución de (S∇). Mas aún, para cada $\xi \in I$ fijo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \eta} &= F_x\bar{x}_\eta + F_y\bar{y}_\eta + F_u\bar{u}_\eta + F_p\bar{p}_\eta + F_q\bar{q}_\eta \\ &= F_xF_p + F_yF_q + F_u(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) - F_p(F_x + \bar{p}F_u) - F_q(F_y + \bar{q}F_u) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Esto implica que F es constante sobre la banda característica, y por ende

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

Finalmente, por la condición inicial, $F \equiv 0$ **sobre la banda característica**.

Para cada $(\eta,\xi) \in (-\delta,\delta)\times I$, definimos

$$Z(\eta,\xi) := \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{u} \end{pmatrix}(\eta,\xi).$$

El mapeo define una superficie bien parametrizada si

$$Z_\eta \times Z_\xi = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta - \bar{y}_\xi \bar{x}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \bar{x}_\xi F_q - \bar{y}_\xi F_p \end{pmatrix} \neq 0.$$

Dado que en $\eta = 0$ se cumple la condición (C3p), podemos afirmar que, en una vecindad (tal vez más pequeña) de $\eta = 0$,

$$\Delta = \bar{x}_\xi \bar{y}_\eta - \bar{y}_\xi \bar{x}_\eta = \bar{x}_\xi F_q - \bar{y}_\xi F_p \neq 0.$$

Esto implica que el mapeo $(\eta,\xi) \mapsto (\bar{x},\bar{y})(\eta,\xi)$ es invertible en una vecindad $(\eta,\xi) \in (-\delta,\delta) \times I$. Sea $\mathscr{O} = (\bar{x},\bar{y})((-\delta,\delta) \times I) \subset \mathbb{R}^2$. Por el teorema de la función inversa existe un mapeo $(\bar{\eta},\bar{\xi}) : \mathscr{O} \to (-\delta,\delta) \times I$ tal que $(\bar{\eta},\bar{\xi})(x,y)$ es el **mapeo inverso** de $(\bar{x},\bar{y})(\eta,\xi)$. Por el teorema de la función inversa y la regla de la cadena tenemos que

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_x & \bar{\xi}_x \\ \bar{\eta}_y & \bar{\xi}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta & \bar{y}_\eta \\ \bar{x}_\xi & \bar{y}_\xi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \bar{y}_\xi & -\bar{y}_\eta \\ -\bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_\eta \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $\bar{u}_\eta = \bar{p}F_p + \bar{q}F_q$, $\bar{x}_\eta = F_p$ y $\bar{y}_\eta = F_q$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \bar{y}_\xi(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) - \bar{u}_\xi F_q \\ -\bar{x}_\xi(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) + \bar{u}_\xi F_p \end{pmatrix}.$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x - \bar{p} \\ u_y - \bar{q} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \bar{y}_\xi(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) - \bar{u}_\xi F_q - \bar{p}(F_p\bar{y}_\xi - F_q\bar{x}_\xi) \\ -\bar{x}_\xi(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) + \bar{u}_\xi F_p - \bar{q}(F_p\bar{y}_\xi - F_q\bar{x}_\xi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\bar{p}\bar{x}_\xi + \bar{q}\bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi)}{\Delta}\begin{pmatrix} F_q \\ -F_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definimos

$$A(\eta,\xi) := \bar{p}\bar{x}_\xi + \bar{q}\bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi,$$

en la vecindad. Claramente $A(0,\xi) = \tilde{p}\tilde{x}'(\xi) + \tilde{q}\tilde{y}'(\xi) - f'(\xi) = 0$. Por lo tanto, para cada $\xi \in I$ fijo, sea $\hat{A}(\eta) := A(\eta,\xi)$, con condición inicial $\hat{A}(0) = 0$. Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{A}}{d\eta} &= \bar{p}_\eta \bar{x}_\xi + \bar{p}\bar{x}_{\eta\xi} + \bar{q}_\eta \bar{y}_\xi + \bar{q}\bar{y}_{\eta\xi} - \bar{u}_{\eta\xi} \\
&= -(F_x + \bar{p}F_u)\bar{x}_\xi + \bar{p}\partial_\xi F_p - (F_y + \bar{q}F_u)\bar{y}_\xi + \bar{q}\partial_\xi F_q - \partial_\xi(\bar{p}F_p + \bar{q}F_q) \\
&= -\big(F_x\bar{x}_\xi + F_y\bar{y}_\xi + F_u\bar{u}_\xi + F_p\bar{p}_\xi + F_q\bar{q}_\xi\big) - F_u\big(\bar{p}\bar{x}_\xi + \bar{q}\bar{y}_\xi - \bar{u}_\xi\big) \\
&= -\underbrace{\partial_\xi F}_{=0} - F_u\hat{A}.
\end{aligned}$$

Así, tenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\hat{A}}{d\eta} = -F_u \hat{A}, \qquad \hat{A}(0) = 0,$$

cuya solución es

$$\hat{A}(\eta) = \hat{A}(0) \exp\big(- \int_0^\eta F_u(s)\, ds + \psi(\xi)\big) \equiv 0.$$

Por lo tanto

$$A(\eta, \xi) = 0,$$

en la vecindad $(\eta, \xi) \in (-\delta, \delta) \times I$. Esto implica que

$$u_x = \bar{p}, \qquad u_y = \bar{q},$$

en la vecindad y sobre la banda característica.

Por lo tanto, si definimos para cada $(x,y) \in \mathscr{O}$,

$$u(x,y) := \bar{u}(\bar{\eta}(x,y), \bar{\xi}(x,y)),$$

entonces se tiene que:

- Para cada $(x,y) \in \mathscr{O}$,

$$F(x,y,u(x,y),u_x,u_y) = F(\bar{x}(\bar{\eta}(x,y),\bar{\xi}(x,y)),\bar{y}(\cdot),\bar{u}(\cdot),\bar{p}(\cdot),\bar{q}(\cdot)) \equiv 0,$$

  donde $(\cdot) = (\bar{\eta}(x,y), \bar{\xi}(x,y))$.

- Para cada $\xi \in I$,

$$u(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = \bar{u}(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)), \bar{\xi}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi))) = \bar{u}(0, \xi) = f(\xi),$$

ya que, por ser mapeos inversos, $(\bar{x}, \bar{y})(0, \xi) = (\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi))$ implica que

$$(\bar{\eta}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)), \bar{\xi}(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) = (0, \xi).$$

Por lo tanto en la vecindad $\mathscr{O}$, la función $u = u(x, y)$ es de clase C^1, es solución al problema de Cauchy (ECN) y (CI), y la gráfica de la solución existe en una vecindad de la curva $\mathscr{I}'$.

$\square$

Receso: regresamos en 5 min.

1. Problema inverso: conos de Monge

2. Problema directo: banda característica

3. Ejemplos

Ejemplos

(I) Sea la ecuación

$$u = u_x^2 - 3u_y^2,$$

con datos de Cauchy

$$u(x,0) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Consistentemente con nuestra notación tenemos que,

$$F(x,y,u,p,q) = p^2 - 3q^2 - u,$$

y la **curva de datos** es $\mathscr{I} = \{(\tilde{x},\tilde{y},f)(\xi) = (\xi,0,\xi^2) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Claramente, $F_x = F_y = 0$, $F_u = -1$, $F_p = 2p$ y $F_q = -6q$.

Por lo tanto, para cada $\xi \in I$ fijo el sistema característico asociado a este problema es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, & x(0) &= \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= -6q, & y(0) &= 0, \\
\frac{du}{d\eta} &= 2p^2 - 6q^2, & u(0) &= \xi^2, \\
\frac{dp}{d\eta} &= p, & p(0) &= p_0, \\
\frac{dq}{d\eta} &= q, & q(0) &= q_0,
\end{aligned}
$$

¿Quiénes son $(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$?

$(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$ debe ser solución del sistema

$$
\begin{aligned}
p^2 - 3q^2 - \xi^2 &= 0, \\
p - 2\xi &= 0.
\end{aligned}
$$

Este sistema tiene **dos** soluciones: $(p_0, q_0)(\xi) = (2\xi, \pm\xi)$.

Escogiendo $(p_0, q_0)(\xi) := (2\xi, +\xi)$ resolvemos el sistema para p y q. El resultado es $p = 2\xi e^{\eta}$ y $q = \xi e^{\eta}$.
Sustituyendo en las ecuaciones para x y y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 4\xi e^{\eta}, \qquad & x(0) = \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= -6\xi e^{\eta}, \qquad & y(0) = 0,
\end{aligned}
$$

La solución al subsistema para x y y es

$$x = 4\xi(e^{\eta} - 1) + \xi, \qquad y = -6\xi(e^{\eta} - 1).$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación para u,

$$\frac{du}{d\eta} = 2\xi^2 e^{2\eta}, \qquad u(0) = \xi^2,$$

con lo cual obtenemos $u = \xi^2 e^{2\eta}$. Dado que $x + \frac{1}{2}y = \xi e^{\eta}$, encontramos una posible solución,

$$u(x,y) = \left(\xi e^{\eta}\right)^2 = \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2.$$

Si escogemos $(p_0, q_0)(\xi) := (2\xi, -\xi)$ entonces la solución que se obtiene es

$$u(x,y) = \left(x - \tfrac{1}{2}y\right)^2.$$

Ambas funciones son de clase C^1 **globalmente** y son soluciones del problema de Cauchy. **La pérdida de unicidad se debe a que existe más de una solución al sistema** (S∇)**.**

(II) Sea la ecuación

$$u_x^2 + u_y^2 = 4u,$$
$$u(x,-1) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo con nuestra notación, $F = p^2 + q^2 - 4u$, por lo que $F_x = F_y = 0$, $F_u = -4$, $F_p = 2p$ y $F_q = 2q$.
La curva de datos $\mathscr{I}$ es

$$\mathscr{I} = \{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi) = (\xi,-1), \xi \in \mathbb{R}\},$$

con dato inicial $u_{|\mathscr{I}} = f(\xi) = \xi^2$.

El sistema (S∇) se escribe como

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - 4\xi^2 &= 0, \\ p - 2\xi &= 0, \end{aligned}$$

el cual tiene una solución **única**: $\tilde{p} = 2\xi$, $\tilde{q} = 0$.

El **sistema característico** asociado es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, && x(0) = \xi,\\
\frac{dy}{d\eta} &= 2q, && y(0) = 0,\\
\frac{du}{d\eta} &= 2(p^2+q^2), && u(0) = \xi^2,\\
\frac{dp}{d\eta} &= 4p, && p(0) = 2\xi,\\
\frac{dq}{d\eta} &= 4q, && q(0) = 0,
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$.

Resolviendo las dos últimas ecuaciones obtenemos $q(\eta) \equiv 0$, $p(\eta) = 2\xi e^{4\eta}$. Sustituyendo en las dos primeras y resolviendo se tiene que $x(\eta) = \xi e^{4\eta}$ y que $y(\eta) \equiv -1$. Finalmente, sustituyendo p y q en la ecuación para u y resolviendo obtenemos $u(\eta) = \xi^2 e^{8\eta} = (\xi e^{4\eta})^2 = x^2$. Por lo tanto la función

$$u(x,y) = x^2,$$

es claramente una solución de clase C^1 al problema de Cauchy.

Cuidado: Existen otras soluciones de clase C^1. Por ejemplo,

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2,$$

también es solución del mismo problema.

Resolviendo las dos últimas ecuaciones obtenemos $q(\eta) \equiv 0$, $p(\eta) = 2\xi e^{4\eta}$. Sustituyendo en las dos primeras y resolviendo se tiene que $x(\eta) = \xi e^{4\eta}$ y que $y(\eta) \equiv -1$. Finalmente, sustituyendo p y q en la ecuación para u y resolviendo obtenemos $u(\eta) = \xi^2 e^{8\eta} = (\xi e^{4\eta})^2 = x^2$. Por lo tanto la función

$$u(x,y) = x^2,$$

es claramente una solución de clase C^1 al problema de Cauchy.

Cuidado: Existen otras soluciones de clase C^1. Por ejemplo,

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2,$$

también es solución del mismo problema.

En este caso la pérdida de unicidad se debe a que **la condición de transversalidad** (C3p) **no se cumple**:

$$\det\begin{pmatrix} e^{4\eta} & 4\xi e^{4\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

y a que los vectores

$$\begin{pmatrix} 4\xi e^{4\eta} \\ 0 \\ 8\xi^2 e^{8\eta} \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \begin{pmatrix} 4\xi \\ 0 \\ 8\xi^2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 \end{pmatrix}$$

son colineales para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Próxima lección: ecuación de la eikonal