Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.5: Ejemplos. La ecuación de la eikonal.

Ramón G. Plaza
IIMAS-UNAM

1. Ejemplos
2. La ecuación de la eikonal

Ecuaciones completamente nolineales

Ecuación **completamente nolineal** (forma general):

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \qquad \text{(ECN)}$$

para $u = u(x,y) \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $F \in C^2(\mathbb{R}^5;\mathbb{R})$.
Datos de Cauchy: u es conocida sobre una **curva de datos** en el plano $\mathscr{I}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{I} &= \{(\tilde{x},\tilde{y})(\xi) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^2, \\ u_{|\mathscr{I}} &= f(\xi), \end{aligned} \qquad \text{(CI)}$$

donde $\tilde{x},\tilde{y},f \in C^1(I;\mathbb{R})$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo abierto
Curva inicial:

$$\mathscr{I}' = \{(\tilde{x},\tilde{y},f)(\xi) \, : \, \xi \in I\} \subset \mathbb{R}^3,$$

Hipótesis

- Curva de datos $\mathscr{I} \subset \Omega$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y **conexo**.
- $F = F(x,y,u,p,q)$ es de clase C^2, $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$.
- $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$
- $\tilde{x}, \tilde{y}, f \in C^1(I;\mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
- Para todo $\xi \in I$, $P_0 = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ satisface la **condición de transversalidad generalizada**.

Definición

Sea $\xi_0 \in I$ y sea $P_0 \in \mathbb{R}^5$ el punto

$$P_0 = (\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), \tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0)) =: (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0).$$

Se dice que P_0 satisface la **condición de transversalidad generalizada** si el par $(p_0, q_0) = (\tilde{p}(\xi_0), \tilde{q}(\xi_0))$ es solución del sistema

$$\begin{aligned} G(p_0, q_0) &= p_0 \tilde{x}'(\xi_0) + q_0 \tilde{y}'(\xi_0) - f'(\xi_0) = 0, \\ H(p_0, q_0) &= F(\tilde{x}(\xi_0), \tilde{y}(\xi_0), f(\xi_0), p_0, q_0) = 0, \end{aligned} \tag{S∇}$$

y además

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{x}'(\xi_0) & F_p(P_0) \\ \tilde{y}'(\xi_0) & F_q(P_0) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{C3p}$$

Sistema característico

$$
\begin{aligned}
\frac{d\check{x}}{d\eta} &= F_p, & \check{x}(0) &= \tilde{x}(\xi), \\
\frac{d\check{y}}{d\eta} &= F_q, & \check{y}(0) &= \tilde{y}(\xi), \\
\frac{d\check{p}}{d\eta} &= -(\check{p}F_u + F_x), & \check{p}(0) &= \tilde{p}(\xi), \\
\frac{d\check{q}}{d\eta} &= -(\check{q}F_u + F_y), & \check{q}(0) &= \tilde{q}(\xi), \\
\frac{d\check{u}}{d\eta} &= \check{p}F_p + \check{q}F_q, & \check{u}(0) &= f(\xi),
\end{aligned}
\qquad \text{(SC)}
$$

para cada $\xi \in I$ fijo, donde las derivadas de F están evaluadas en $(\check{x}, \check{y}, \check{u}, \check{p}, \check{q})$. $(\tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ es alguna solución de (S∇).

Teorema de existencia local - caso completamente no lineal

Teorema

Sea $F = F(x, y, u, p, q)$ *de clase* C^2 *tal que* $F_p^2 + F_q^2 \neq 0$*. Supongamos que* $\tilde{x}$*,* $\tilde{y}$ *y* f *son de clase* C^1 *en* $\xi \in I \subseteq \mathbb{R}$*. Si para todo* $\xi \in I$ *el punto* $P_0 = (\tilde{x}, \tilde{y}, f, \tilde{p}, \tilde{q})(\xi)$ *satisface la condición de transversalidad generalizada, entonces existe una solución al problema de Cauchy* (ECN) - (CI)*, de clase* C^1*, en una vecindad de la curva* $\mathscr{I}'$*, la cual está determinada paramétricamente por la solución al sistema* (SC) *para cada* $\xi \in I$*.*

Observación: No se especifica que la solución sea **única**.

Ejemplos

(I) Sea la ecuación

$$u = u_x^2 - 3u_y^2,$$

con datos de Cauchy

$$u(x,0) = x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Consistentemente con nuestra notación tenemos que,

$$F(x,y,u,p,q) = p^2 - 3q^2 - u,$$

y la **curva de datos** es $\mathscr{I} = \{(\tilde{x},\tilde{y},f)(\xi) = (\xi,0,\xi^2) : \xi \in \mathbb{R}\}$.
Claramente, $F_x = F_y = 0$, $F_u = -1$, $F_p = 2p$ y $F_q = -6q$.

Por lo tanto, para cada $\xi \in I$ fijo el sistema característico asociado a este problema es

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, & x(0) &= \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= -6q, & y(0) &= 0, \\
\frac{du}{d\eta} &= 2p^2 - 6q^2, & u(0) &= \xi^2, \\
\frac{dp}{d\eta} &= p, & p(0) &= p_0, \\
\frac{dq}{d\eta} &= q, & q(0) &= q_0,
\end{aligned}$$

¿Quiénes son $(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$?

$(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$ debe ser solución del sistema

$$\begin{aligned} p^2 - 3q^2 - \xi^2 = 0, \\ p - 2\xi = 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene **dos** soluciones: $(p_0, q_0)(\xi) = (2\xi, \pm\xi)$.

Escogiendo $(p_0, q_0)(\xi) := (2\xi, +\xi)$ resolvemos el sistema para p y q. El resultado es $p = 2\xi e^\eta$ y $q = \xi e^\eta$. Sustituyendo en las ecuaciones para x y y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\eta} &= 4\xi e^\eta, & x(0) &= \xi, \\ \frac{dy}{d\eta} &= -6\xi e^\eta, & y(0) &= 0, \end{aligned}$$

La solución al subsistema para x y y es

$$x = 4\xi(e^{\eta} - 1) + \xi, \qquad y = -6\xi(e^{\eta} - 1).$$

Finalmente, sustituyendo en la ecuación para u,

$$\frac{du}{d\eta} = 2\xi^2 e^{2\eta}, \qquad u(0) = \xi^2,$$

con lo cual obtenemos $u = \xi^2 e^{2\eta}$. Dado que $x + \frac{1}{2}y = \xi e^{\eta}$, encontramos una posible solución,

$$u(x,y) = \left(\xi e^{\eta}\right)^2 = \left(x + \tfrac{1}{2}y\right)^2.$$

Si escogemos $(p_0, q_0)(\xi) := (2\xi, -\xi)$ entonces la solución que se obtiene es

$$u(x,y) = \left(x - \tfrac{1}{2}y\right)^2.$$

Ambas funciones son de clase C^1 **globalmente** y son soluciones del problema de Cauchy. **La pérdida de unicidad se debe a que existe más de una solución al sistema** (S∇)**.**

(II) Sea la ecuación

$$
\begin{aligned}
u_x^2 + u_y^2 &= 4u, \\
u(x,-1) &= x^2, \qquad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

De acuerdo con nuestra notación, $F = p^2 + q^2 - 4u$, por lo que $F_x = F_y = 0$, $F_u = -4$, $F_p = 2p$ y $F_q = 2q$.
La curva de datos $\mathscr{I}$ es

$$
\mathscr{I} = \{(\tilde{x}, \tilde{y})(\xi) = (\xi, -1), \xi \in \mathbb{R}\},
$$

con dato inicial $u_{|\mathscr{I}} = f(\xi) = \xi^2$.

El sistema (S∇) se escribe como

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - 4\xi^2 &= 0, \\ p - 2\xi &= 0, \end{aligned}$$

el cual tiene una solución **única**: $\tilde{p} = 2\xi$, $\tilde{q} = 0$.

El **sistema característico** asociado es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= 2p, & x(0) &= \xi, \\
\frac{dy}{d\eta} &= 2q, & y(0) &= 0, \\
\frac{du}{d\eta} &= 2(p^2+q^2), & u(0) &= \xi^2, \\
\frac{dp}{d\eta} &= 4p, & p(0) &= 2\xi, \\
\frac{dq}{d\eta} &= 4q, & q(0) &= 0,
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$.

Resolviendo las dos últimas ecuaciones obtenemos $q(\eta) \equiv 0$, $p(\eta) = 2\xi e^{4\eta}$. Sustituyendo en las dos primeras y resolviendo se tiene que $x(\eta) = \xi e^{4\eta}$ y que $y(\eta) \equiv -1$. Finalmente, sustituyendo p y q en la ecuación para u y resolviendo obtenemos $u(\eta) = \xi^2 e^{8\eta} = (\xi e^{4\eta})^2 = x^2$. Por lo tanto la función

$$u(x,y) = x^2,$$

es claramente una solución de clase C^1 al problema de Cauchy.

Cuidado: Existen otras soluciones de clase C^1. Por ejemplo,

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2,$$

también es solución del mismo problema.

Resolviendo las dos últimas ecuaciones obtenemos $q(\eta) \equiv 0$, $p(\eta) = 2\xi e^{4\eta}$. Sustituyendo en las dos primeras y resolviendo se tiene que $x(\eta) = \xi e^{4\eta}$ y que $y(\eta) \equiv -1$. Finalmente, sustituyendo p y q en la ecuación para u y resolviendo obtenemos $u(\eta) = \xi^2 e^{8\eta} = (\xi e^{4\eta})^2 = x^2$. Por lo tanto la función

$$u(x,y) = x^2,$$

es claramente una solución de clase C^1 al problema de Cauchy.

Cuidado: Existen otras soluciones de clase C^1. Por ejemplo,

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2,$$

también es solución del mismo problema.

En este caso la pérdida de unicidad se debe a que **la condición de transversalidad** (C3p) **no se cumple**:

$$\det \begin{pmatrix} e^{4\eta} & 4\xi e^{4\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

y a que los vectores

$$\begin{pmatrix} 4\xi e^{4\eta} \\ 0 \\ 8\xi^2 e^{8\eta} \end{pmatrix}_{|\eta=0} = \begin{pmatrix} 4\xi \\ 0 \\ 8\xi^2 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 \end{pmatrix}$$

son colineales para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

1. Ejemplos

2. La ecuación de la eikonal

La ecuación de la eikonal en óptica geométrica

- La ecuación de la **eikonal** (del griego, $\varepsilon\iota\kappa\omega\nu$, imagen) es una ecuación **completamente no lineal** que describe de manera **aproximada** la propagación de frentes de onda.
- Se puede obtener mediante una **expansión asintótica** en serie de potencias, por ejemplo, de soluciones a las ecuaciones de Maxwell en teoría electromagnética.
- Método de aproximación: **WKB**, **expansiones de Hilbert**, **expansión de óptica geométrica**

Derivación de la ecuación de la eikonal

Ecuaciones de Maxwell en unidades MKS (Jackson, 1975):

$$\begin{aligned} \mu B_t + \nabla \times E &= 0, \\ \varepsilon E_t - \nabla \times B &= -\sigma E, \\ \mathrm{div}(\mu B) &= 0, \\ \mathrm{div}(\varepsilon E) &= \rho. \end{aligned} \tag{M}$$

Aquí $E = E(x,t)$, $B = B(x,t) \in \mathbb{R}^3$ son los campos vectoriales eléctrico y magnético, respectivamente, con $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. Las funciones $\varepsilon = \varepsilon(x)$, $\mu = \mu(x)$ y $\sigma = \sigma(x)$ corresponden a la permisividad eléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad del medio, respectivamente. La densidad de carga eléctrica es $\rho = \rho(x,t)$.

Nota: Hemos sustituído en la ley de Ampère (segunda ecuación en (M)) la **ley de Ohm**, $J = \sigma E$, donde $J \in \mathbb{R}^3$ es la densidad de corriente eléctrica.

Ansatz: Vamos a buscar soluciones de (M) que sean funciones armónicas en el tiempo, de la forma

$$E(x,t) = \mathrm{Re}\,(\hat{E}(x)e^{-i\omega t}), \qquad B(x,t) = \mathrm{Re}\,(\hat{B}(x)e^{-i\omega t}),$$

donde $\hat{E}(x), \hat{B}(x) \in \mathbb{C}^3$, son campos vectoriales **complejos**, y $\omega \in \mathbb{R}$ es la frecuencia.

Nota: Hemos sustituído en la ley de Ampère (segunda ecuación en (M)) la **ley de Ohm**, $J = \sigma E$, donde $J \in \mathbb{R}^3$ es la densidad de corriente eléctrica.

Ansatz: Vamos a buscar soluciones de (M) que sean funciones armónicas en el tiempo, de la forma

$$E(x,t) = \text{Re}\,(\hat{E}(x)e^{-i\omega t}), \qquad B(x,t) = \text{Re}\,(\hat{B}(x)e^{-i\omega t}),$$

donde $\hat{E}(x), \hat{B}(x) \in \mathbb{C}^3$, son campos vectoriales **complejos**, y $\omega \in \mathbb{R}$ es la frecuencia.

Sustituyendo en (M):

$$0 = \mu B_t + \nabla \times E = \text{Re}\,\big((\nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B})e^{-i\omega t}\big),$$

$$0 = \varepsilon E_t - \nabla \times B + \sigma E = \text{Re}\,\big((\sigma\hat{E} - \nabla \times \hat{B} - i\omega\varepsilon\hat{E})e^{-i\omega t}\big).$$

Por lo tanto, una condición suficiente para tener una solución es que los vectores complejos $\hat{E}$ y $\hat{B}$ sean soluciones de las siguientes ecuaciones **reducidas** (independientes del tiempo):

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B} &= 0, \\ \nabla \times \hat{B} + i\omega\varepsilon\hat{E} &= \sigma\hat{E}. \end{aligned} \qquad \text{(R)}$$

De la primera ecuación se deduce inmediatamente la ley de Gauss magnética ($\text{div}(\mu B) = 0$). Resolviendo (R) se obtiene $\hat{E}$, que a su vez determina la densidad de carga eléctrica ($\rho = \text{div}(\varepsilon E)$).

Sustituyendo en (M):

$$0 = \mu B_t + \nabla \times E = \text{Re}\left((\nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B})e^{-i\omega t}\right),$$

$$0 = \varepsilon E_t - \nabla \times B + \sigma E = \text{Re}\left((\sigma\hat{E} - \nabla \times \hat{B} - i\omega\varepsilon\hat{E})e^{-i\omega t}\right).$$

Por lo tanto, una condición suficiente para tener una solución es que los vectores complejos $\hat{E}$ y $\hat{B}$ sean soluciones de las siguientes ecuaciones **reducidas** (independientes del tiempo):

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{E} - i\omega\mu\hat{B} &= 0, \\ \nabla \times \hat{B} + i\omega\varepsilon\hat{E} &= \sigma\hat{E}. \end{aligned} \tag{R}$$

De la primera ecuación se deduce inmediatamente la ley de Gauss magnética ($\text{div}(\mu B) = 0$). Resolviendo (R) se obtiene $\hat{E}$, que a su vez determina la densidad de carga eléctrica ($\rho = \text{div}(\varepsilon E)$).

Método WKB

Para resolver las ecuaciones reducidas (R) proponemos una **expansión en serie de potencias en términos del número de onda**. Este método resulta muy útil para estudiar el comportamiento aproximado de las soluciones y se conoce como **método WKB o expansión de óptica geométrica**.

Referencia: J. B. Keller, R. M. Lewis, *Asymptotic methods for partial differential equations: The reduced wave equation and Maxwell's equations*, in Surveys in Applied Mathematics, J. B. Keller, D. W. McLaughlin, and G. C. Papanicolaou, eds., vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1995, pp. 1–82.

Idea:

En el vacío, $\varepsilon(x)$ y $\mu(x)$ toman valores constantes, $\varepsilon_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$, respectivamente. La constante $c_0 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Definimos el **número de onda** como $k = \omega / c_0$ y proponemos expansiones asintóticas para $\hat{E}$ y $\hat{B}$ de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(x) &\sim e^{iku(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} (ik)^{-m} \hat{E}_m(x), \\
\hat{B}(x) &\sim e^{iku(x)} \sum_{m=0}^{+\infty} (ik)^{-m} \hat{B}_m(x),
\end{aligned} \tag{S}
$$

donde $u = u(x) \in \mathbb{R}$ es la **fase de la onda**.

Observaciones:

- El símbolo "$\sim$" indica que la solución es aproximada, ya que **no estamos considerando el problema de convergencia de la serie**.
- Los coeficientes son vectores reales ($\hat{E}_m(x)$, $\hat{B}_m(x) \in \mathbb{R}^3$, para cada $m = 0, 1, \ldots$).
- El método **no es riguroso** pero ofrece mucha información relevante.

Primer orden

Sustituir las expansiones (S) en las ecuaciones reducidas y a **igualar coeficientes de las mismas potencias de** ik.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \hat{E} &= e^{iku(x)}\Big((ik)\nabla u \times \hat{E}_0 + (\nabla \times \hat{E}_0 + \nabla u \times \hat{E}_1) + O((ik)^{-1})\Big) \\
&\underset{\text{(R)}}{=} i\omega\mu\hat{B} \\
&= i\omega\mu e^{iku(x)}\Big(\hat{B}_0 + \frac{1}{ik}\hat{B}_1 + O((ik)^{-2})\Big) \\
&\underset{k=\omega/c_0}{=} c_0\mu e^{iku(x)}\Big((ik)\hat{B}_0 + \hat{B}_1 + O((ik)^{-1})\Big).
\end{aligned}$$

Igualando coeficientes de orden $O(ik)$ obtenemos

$$\nabla u \times \hat{E}_0 = c_0\mu\hat{B}_0.$$

Análogamente, calculando el rotacional de la expansión de $\hat{B}$, sustituyendo en la segunda ecuación del sistema reducido (R), e igualando coeficientes de orden $O(ik)$, se llega a la ecuación

$$\nabla u \times \hat{B}_0 = -c_0 \varepsilon \hat{E}_0.$$

De ambas ecuaciones notamos

$$\nabla u \cdot \hat{B}_0 = \nabla u \cdot \big(\tfrac{1}{c_0 \mu} \nabla u \times \hat{E}_0 \big) = 0, \quad \nabla u \cdot \hat{E}_0 = -\nabla u \cdot \big(\tfrac{1}{c_0 \varepsilon} \nabla u \times \hat{B}_0 \big) = 0.$$

Por lo tanto, ∇u es **simultáneamente ortogonal** a $\hat{E}_0$ y a $\hat{B}_0$.

Eliminando $\hat{B}_0$ de las ecuaciones,

$$-c_0\varepsilon\hat{E}_0 = \nabla u \times \Big(\frac{1}{c_0\mu}\nabla u \times \hat{E}_0\Big) = \frac{1}{c_0\mu}\Big(\big(\underbrace{\nabla u \cdot \hat{E}_0}_{=0}\big) - |\nabla u|^2\hat{E}_0\Big)$$

$$= -\frac{1}{c_0\mu}|\nabla u|^2\hat{E}_0,$$

es decir,

$$\big(|\nabla u|^2 - c_0^2\varepsilon\mu\big)\hat{E}_0 = 0.$$

Si el campo $\hat{E}_0 = \hat{E}_0(x)$ no es idénticamente cero entonces esta ecuación se satisface siempre que la fase de la onda sea solución de la **ecuación de la eikonal**:

$$|\nabla u|^2 = n(x)^2.$$

Eliminando $\hat{B}_0$ de las ecuaciones,

$$-c_0\varepsilon\hat{E}_0 = \nabla u \times \Big(\frac{1}{c_0\mu}\nabla u \times \hat{E}_0\Big) = \frac{1}{c_0\mu}\Big(\big(\underbrace{\nabla u \cdot \hat{E}_0}_{=0}\big) - |\nabla u|^2\hat{E}_0\Big)$$

$$= -\frac{1}{c_0\mu}|\nabla u|^2\hat{E}_0,$$

es decir,

$$\big(|\nabla u|^2 - c_0^2\varepsilon\mu\big)\hat{E}_0 = 0.$$

Si el campo $\hat{E}_0 = \hat{E}_0(x)$ no es idénticamente cero entonces esta ecuación se satisface siempre que la fase de la onda sea solución de la **ecuación de la eikonal**:

$$|\nabla u|^2 = n(x)^2.$$

$n(x)$ es el índice de refracción del medio:

$$n(x)^2 = c_0^2 \varepsilon(x)\mu(x) = c_0^2/\tilde{c}(x)^2$$

con $\tilde{c}(x)^2 = 1/(\varepsilon(x)\mu(x))$. La **velocidad relativa de la luz en el medio** (velocidad de fase) es

$$c(x) = \frac{\tilde{c}(x)}{c_0},$$

por lo que la ecuación de la eikonal se puede escribir de la forma

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{c(x)^2}. \tag{E}$$

Interpretación

- Las superficies de nivel con fase constante ($u(x) =$ constante) se denominan **frentes de onda**.
- Las curvas ortogonales a ellos son las curvas características de la ecuación no lineal de primer orden (E) y se denominan **rayos** en la terminología de óptica geométrica.
- Las ecuaciones características son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. La fase y las amplitudes de los campos eléctrico y magnético satisfacen ecuaciones diferenciales ordinarias sobre los rayos.

- El término dominante en la expansión de los campos se denomina término de óptica geométrica, ya que sólo involucra cantidades que también ocurren en la **teoría clásica de óptica** (como el índice de refracción, o la velocidad en el medio, entre otras).
- Una **trayectoria ortogonal** al frente de onda coincide con un rayo, que se asocia a un rayo de luz, en virtud de que ∇u es ortogonal a los campos eléctrico y magnético **a primer orden** ($\hat{E}_0$ y $\hat{B}_0$).

Ejemplo: consideremos el frente de onda $u(x) = t$, con $t > 0$. Una trayectoria $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^3$ sobre un rayo, satisface

$$u(\hat{x}(t)) = t.$$

Derivando obtenemos

$$\nabla u \cdot \hat{x}'(t) = 1.$$

Como el vector tangente al rayo, a saber $\hat{x}'(t)$, es paralelo a ∇u, esta ecuación y la ecuación de la eikonal implican que

$$1 = |\nabla u \cdot \hat{x}'(t)| = |\nabla u||\hat{x}'(t)| = \frac{1}{|c(\hat{x}(t))|}|\hat{x}'(t)|,$$

por lo que la velocidad del rayo es $|\hat{x}'(t)| = |c(\hat{x}(t))|$.

Receso: regresamos en 5 min.

Problema de Cauchy

Vamos a aplicar el teorema de existencia local (método de características) para resolver la ecuación de la eikonal. Para simplificar el análisis supondremos que $c > 0$ es **constante** y consideraremos la ecuación en $\mathbb{R}^2$:

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{c^2}, \tag{$E_{\mathbb{R}^2}$}$$

Condiciones iniciales sobre una **curva de datos**:

$$\mathscr{I} = \{(\tilde{x}(\xi), \tilde{y}(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, \qquad u_{|\mathscr{I}} = f(\xi).$$

Aquí suponemos que f es una función conocida. Sea

$$F(x, y, u, p, q) := \tfrac{1}{2}(c^2(p^2 + q^2) - 1).$$

Por lo tanto, $F_x = F_y = F_u = 0$, y $F_p = c^2 p$, $F_q = c^2 q$.

Sistema característico

El **sistema característico** asociado es

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\eta} &= c^2 p, & x(0) &= \tilde{x}(\xi),\\
\frac{dy}{d\eta} &= c^2 q, & y(0) &= \tilde{y}(\xi),\\
\frac{dp}{d\eta} &= 0, & p(0) &= p_0(\xi),\\
\frac{dq}{d\eta} &= 0, & q(0) &= q_0(\xi),\\
\frac{du}{d\eta} &= c^2(p^2+q^2), & u(0) &= f(\xi),
\end{aligned}
$$

para cada $\xi \in I$ fijo.

p_0 y q_0 son soluciones del sistema (S∇):

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{c^2},$$
$$p\tilde{x}'(\xi) + q\tilde{y}'(\xi) = f'(\xi).$$

Geométricamente, las soluciones a este sistema representan la **intersección** entre un círculo y una línea recta en el plano (p, q).

La distancia de la recta al centro del círculo está dada por la fórmula

$$L = \frac{|f'(\xi)|}{\sqrt{\tilde{x}'(\xi)^2 + \tilde{y}'(\xi)^2}}.$$

Existen **dos** puntos de intersección si

$$\text{(i):} \qquad L < \frac{1}{c} \iff \tilde{x}'(\xi)^2 + \tilde{y}'(\xi)^2 > c^2 f'(\xi)^2.$$

No hay puntos de intersección si

$$\text{(ii):} \qquad L > \frac{1}{c} \iff \tilde{x}'(\xi)^2 + \tilde{y}'(\xi)^2 < c^2 f'(\xi)^2.$$

Hay un sólo punto de intersección en el caso **degenerado**, cuando la recta es tangente al círculo, es decir, si $L = 1/c$.

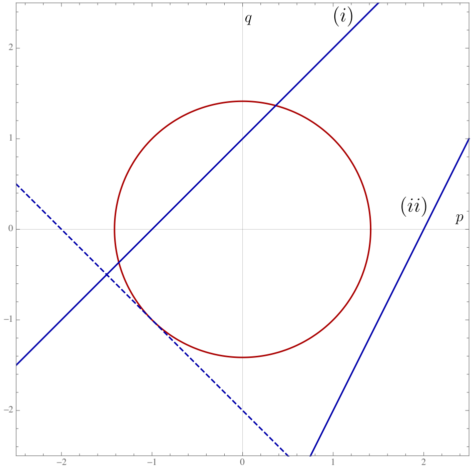

Figura: Soluciones a (S∇).

Cono de luz

Sea $\theta = \arctan c$. La superficie $c^2 z^2 = x^2 + y^2$ es un cono que forma un ángulo θ con el eje z, que llamaremos **cono de luz**.

- Caso (i), la curva inicial $\mathscr{I}' = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, f)(\xi)\}$ forma un ángulo con el eje z mayor a θ y es exterior al cono de luz. En este caso se dice que $\mathscr{I}'$ es una **curva espacial**, y **el problema de Cauchy tiene soluciones**.
- Caso (ii), $\mathscr{I}'$ forma un ángulo con el eje z menor a θ, por lo que está contenida dentro del cono de luz y se denomina **curva temporal**. El problema de Cauchy **no tiene soluciones**.

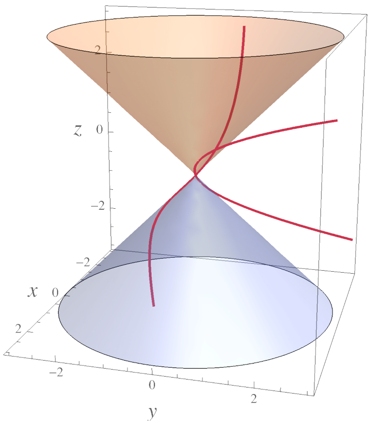

Figura: Cono de luz.

Solución en el caso (i)

Suponiendo que la curva inicial $\mathscr{I}'$ es **espacial**, y que la condición (i) se cumple, tomamos una solución (p_0, q_0) al sistema (S∇). Resolviendo el sistema característico obtenemos

$$x(\eta) = c^2 p_0(\xi)\eta + \tilde{x}(\xi), \qquad y(\eta) = c^2 q_0(\xi)\eta + \tilde{y}(\xi),$$

$$u(\eta) = c^2 (p_0(\xi)^2 + q_0(\xi)^2)\eta + f(\xi).$$

Denotamos $\eta = t$ para asociar la variable η con el tiempo.

A lo largo de las características la velocidad del vector $(x(t), y(t))$ es

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = c^2\sqrt{p_0(\xi)^2 + q_0(\xi)^2} = c,$$

y se propaga en dirección de $(p_0, q_0) = (u_x, u_y)$. Esto significa que las **curvas características en el plano coinciden con los rayos de luz**.

Ejemplo

Curva de datos: círculo de radio $1/c$ con centro en el origen,

$$\mathscr{I} = \left\{ \frac{1}{c}(\cos\xi, \sin\xi) \,:\, \xi \in \mathbb{R} \right\},$$

con valor inicial $u_{|\mathscr{I}} \equiv 0$. En este caso el sistema (S∇) se lee

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{c^2}, \qquad -\frac{p}{c}\sin\xi + \frac{q}{c}\cos\xi = 0.$$

De la segunda ecuación deducimos la existencia de $\alpha(\xi) \in \mathbb{R}$ tal que $p = \cos\alpha(\xi)$ y $q = \sin\alpha(\xi)$. De este modo $\sin(\alpha(\xi) - \xi) = 0$. Por simplicidad, tomamos $\alpha(\xi) = \xi$.

Ejemplo

Curva de datos: círculo de radio $1/c$ con centro en el origen,

$$\mathscr{I} = \left\{ \frac{1}{c}(\cos\xi, \sin\xi) \, : \, \xi \in \mathbb{R} \right\},$$

con valor inicial $u_{|\mathscr{I}} \equiv 0$. En este caso el sistema (S∇) se lee

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{c^2}, \qquad -\frac{p}{c}\sin\xi + \frac{q}{c}\cos\xi = 0.$$

De la segunda ecuación deducimos la existencia de $\alpha(\xi) \in \mathbb{R}$ tal que $p = \cos\alpha(\xi)$ y $q = \sin\alpha(\xi)$. De este modo $\sin(\alpha(\xi) - \xi) = 0$. Por simplicidad, tomamos $\alpha(\xi) = \xi$.

Obtenemos una solución:

$$p_0 = \frac{1}{c}\cos\xi, \qquad q_0 = \frac{1}{c}\sin\xi.$$

De hecho, es **la única solución**, ya que en este caso $L = 0$. Sustituyendo, las soluciones para los rayos son

$$x(t) = c(t+1)\cos\xi, \qquad y(t) = c(t+1)\sin\xi,$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, mientras que la solución para el frente de onda es simplemente

$$u(t) = t.$$

El gradiente de u está determinado por

$$p = \frac{1}{c}\cos\xi, \qquad q = \frac{1}{c}\sin\xi.$$

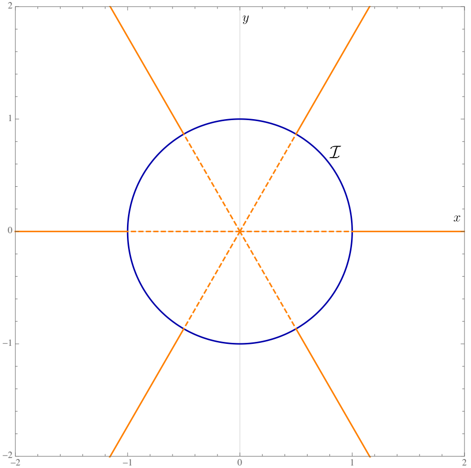

Figura: Curva de datos $\mathscr{I} = (1/c)(\cos\xi, \sin\xi)$ (azul). Características $(x,y)(t)$ con $t > 0$ (naranja).

Cuando $t = -1$ las curvas características o rayos se intersectan en el origen. La solución está bien definida para todo tiempo $t > -1$. Las curvas de nivel de u son **círculos concéntricos** de radio $c(t+1) > 0$.

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, la curva en el espacio $(x,y,u)(t) = ((t+1)\cos\xi, (t+1)\sin\xi, t)$ es una recta con tangente $(\cos\xi, \sin\xi, 1)$. Forma un ángulo $\theta = \arctan c$ con el eje z. Al variar $\xi \in \mathbb{R}$, obtenemos un **cono** en el espacio.

Cuando $t = -1$ las curvas características o rayos se intersectan en el origen. La solución está bien definida para todo tiempo $t > -1$. Las curvas de nivel de u son **círculos concéntricos** de radio $c(t+1) > 0$.

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, la curva en el espacio $(x, y, u)(t) = ((t+1)\cos\xi, (t+1)\sin\xi, t)$ es una recta con tangente $(\cos\xi, \sin\xi, 1)$. Forma un ángulo $\theta = \arctan c$ con el eje z. Al variar $\xi \in \mathbb{R}$, obtenemos un **cono** en el espacio.

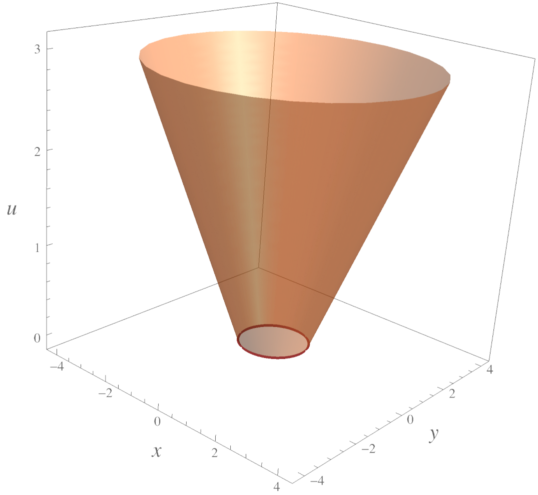

Figura: Solución de la ec. de la eikonal con curva de datos $\mathscr{I} = (1/c)(\cos\xi, \sin\xi)$ (rojo).

Próxima lección: la ecuación de Hamilton-Jacobi