Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.6: La ecuación de Hamilton-Jacobi.

Ramón G. Plaza
IIMAS-UNAM

Octubre 13, 2020.

1. La ecuación de Hamilton-Jacobi
2. Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi
3. Ejemplos
4. Epílogo: la transformada de Legendre

La ecuación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de primer orden

$$u_t + H(t, x, \nabla u) = 0, \qquad \text{(HJ)}$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, se conoce en la literatura como la **ecuación de Hamilton-Jacobi**.

- La función $H = H(t,x,p)$, con $x, p \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, es el **hamiltoniano** de la ecuación.
- H es usualmente **nolineal** en p.
- Aparece frecuentemente en **mecánica clásica y relativista**.

Problema de Cauchy

Ecuación de (HJ) en una dimensión especial con dato inicial:

$$\begin{aligned} u_t + H(t,x,u_x) &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{CHJ}$$

con f función conocida. La **curva inicial** es

$$I' = \{(0,\xi,f(\xi)) : \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Supondremos también que el hamiltoniano $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en su dominio. La ecuación se puede escribir $F(t,x,u,u_x,u_t) = 0$, con

$$F(t,x,u,p,q) := q + H(t,x,p).$$

Sistema característico

Como $F_x = H_x$, $F_t = H_t$, $F_u = 0$, $F_p = H_p$ y $F_q = 1$, el **sistema característico** es

$$
\begin{aligned}
\frac{dt}{d\eta} &= 1, && t(0) = 0,\\
\frac{dx}{d\eta} &= H_p(t,x,p), && x(0) = \xi,\\
\frac{dp}{d\eta} &= -H_x(t,x,p), && p(0) = p_0, \qquad \text{(SC)}\\
\frac{dq}{d\eta} &= -H_t(t,x,p), && q(0) = q_0,\\
\frac{du}{d\eta} &= pH_p(t,x,p) + q, && u(0) = f(\xi),
\end{aligned}
$$

$(p_0, q_0) = (p_0, q_0)(\xi)$ son soluciones al sistema nolineal

$$\begin{aligned} q + H(0, \xi, p) &= 0, \\ p - f'(\xi) &= 0. \end{aligned}$$

La **única** solución a este sistema es

$$p_0 = f'(\xi), \quad q_0 = -H(0, \xi, f'(\xi)),$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo. Resolviendo la ecuación para t notamos que $t = \eta$, por lo que denotaremos las derivadas temporales mediante $\dot{} = d/dt = d/d\eta$.

Ecuaciones de Hamilton

El subsistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(t,x,p), & x(0) &= \xi, \\ \dot{p} &= -H_x(t,x,p), & p(0) &= f'(\xi), \end{aligned} \tag{sH}$$

conocido como las **ecuaciones de Hamilton** para la posición (x) y el momento ($p = u_x$).

Resto del sistema característico (sistema **geodésico**):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pH_p(t,x,p) + q, & u(0) &= f(\xi), \\ \dot{q} &= -H_t(t,x,p), & q(0) &= -H(0,\xi,f'(\xi)). \end{aligned} \tag{sG}$$

Ecuaciones de Hamilton

El subsistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(t,x,p), & x(0) &= \xi, \\ \dot{p} &= -H_x(t,x,p), & p(0) &= f'(\xi), \end{aligned} \tag{sH}$$

conocido como las **ecuaciones de Hamilton** para la posición (x) y el momento ($p = u_x$).

Resto del sistema característico (sistema **geodésico**):

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pH_p(t,x,p) + q, & u(0) &= f(\xi), \\ \dot{q} &= -H_t(t,x,p), & q(0) &= -H(0,\xi,f'(\xi)). \end{aligned} \tag{sG}$$

Observaciones:

- El sistema de Hamilton (sH) es **independiente**: podemos resolver primero (sH) y sustituir el resultado en el sistema (sG).
- Típicamente en aplicaciones lo que se busca es la solución para x y p (posición y momento), y no la solución para u y q.
- u (llamada **función principal de Hamilton o función geodésica**) se utiliza para encontrar las variables x y p explícitamente como funciones del tiempo, y en casos en los que es posible integrar la ecuación directamente.

- Por ejemplo, cuando el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo q es constante y la ecuación para u se integra directamente.
- El método de Hamilton-Jacobi consiste en encontrar dicha integral para despejar x y p a partir del valor de u.
- La independencia del hamiltoniano con respecto del tiempo ocurre en muchos ejemplos de interés.

1. La ecuación de Hamilton-Jacobi
2. Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi
3. Ejemplos
4. Epílogo: la transformada de Legendre

Formulación lagrangiana

Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función suave que denominaremos el **lagrangiano**:

$$L = L(t, y, z), \qquad t \in \mathbb{R}, \;\; y, z \in \mathbb{R}^n,$$

Notación:

$$\begin{aligned} D_y L &= (L_{y_1}, \ldots, L_{y_n}) \in \mathbb{R}^n, \\ D_z L &= (L_{z_1}, \ldots, L_{z_n}) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Acción

Sean dos puntos en el espacio, $a, x \in \mathbb{R}^n$, $a \neq x$. Sea $y = y(s) \in \mathbb{R}^n$ una trayectoria parametrizada por $s \in [0,t]$ tal que $y(0) = a$, $y(t) = x$, al menos de clase C^2. Definimos la **acción** como el siguiente funcional:

$$I[y] := \int_0^t L(s, y(s), y'(s))\, ds, \qquad I : \mathcal{A} \to \mathbb{R},$$

donde la trayectoria $y = y(s)$ pertenece a la clase de **trayectorias admisibles** $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} := \{y \in C^2([0,t];\mathbb{R}) \, : \, y(0) = a, \, y(t) = x\}.$$

Trayectoria minimizante

Problema variacional: ¿cuál es el mínimo valor de $I[y]$ para $y \in \mathcal{A}$? ¿Existe una trayectoria minimizante, $\bar{y} \in \mathcal{A}$, tal que

$$I[\bar{y}] = \min_{y \in \mathcal{A}} I[y]?$$

Condición necesaria: ecuaciones de **Euler-Lagrange**.

Teorema

Si existe una trayectoria minimizante $\bar{y} \in \mathcal{A}$ entonces ésta satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-\frac{d}{ds}\big((D_z L)(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s))\big) + (D_y L)(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s))) = 0, \qquad \text{(EL)}$$

for all $0 \leq s \leq t$.

Trayectoria minimizante

Problema variacional: ¿cuál es el mínimo valor de $I[y]$ para $y \in \mathcal{A}$? ¿Existe una trayectoria minimizante, $\bar{y} \in \mathcal{A}$, tal que

$$I[\bar{y}] = \min_{y \in \mathcal{A}} I[y]?$$

Condición necesaria: ecuaciones de **Euler-Lagrange**.

Teorema

Si existe una trayectoria minimizante $\bar{y} \in \mathcal{A}$ entonces ésta satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$-\frac{d}{ds}\Big((D_z L)(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s))\Big) + (D_y L)(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s))) = 0, \tag{EL}$$

for all $0 \leq s \leq t$.

Demostración: Sea $\varphi \in C^\infty([0,t];\mathbb{R}^n)$ una función de prueba tal que $\varphi(0) = \varphi(t) = 0$. Se define para cada $h \in \mathbb{R}$,

$$y(s) = \bar{y}(s) + h\varphi(s), \quad s \in [0,t],$$

donde $\bar{y} \in \mathcal{A}$ es una trayectoria minimizante. Por lo tanto, $y \in \mathcal{A}$ y, por ser mínimo, $I[y] \geq I[\bar{y}]$. La función de variable real

$$g(h) = I[\bar{y} + h\varphi] = \int_0^t L(s, \bar{y}(s) + h\varphi(s), \bar{y}'(s) + h\varphi'(s))\, ds$$

tiene un mínimo en $h = 0$ y además es continuamente diferenciable en h. En consecuencia,

$$\frac{dg}{dh}(0) = 0.$$

Calculemos la derivada. Integrando por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dh} &= \int_0^t \sum_{j=1}^n \Big(L_{y_j}(s,\bar{y}+h\varphi,\bar{y}'+h\varphi')\varphi_j(s) + L_{z_j}(s,\bar{y}+h\varphi,\bar{y}'+h\varphi')\varphi_j'(s)\Big)\, ds \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^t \Big(L_{y_j}(s,\bar{y}+h\varphi,\bar{y}'+h\varphi') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s,\bar{y}+h\varphi,\bar{y}'+h\varphi')\big)\Big)\varphi_j(s)\, ds + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \underbrace{\big(L_{z_j}((s,\bar{y}+h\varphi,\bar{y}'+h\varphi'))\varphi_j(s)\big)\Big|_{s=0}^{s=t}}_{=0}.\end{aligned}$$

Evaluando en $h=0$ obtenemos,

$$0 = \sum_{j=1}^n \int_0^t \Big(L_{y_j}(s,\bar{y},\bar{y}') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s,\bar{y},\bar{y}')\big)\Big)\varphi_j(s)\, ds.$$

En virtud de que la relación anterior se cumple para toda función de prueba $\varphi \in C^\infty([0,t];\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(0) = \varphi(t) = 0$, concluímos que, para todo índice $1 \leq j \leq n$,

$$L_{y_j}(s,\bar{y},\bar{y}') - \frac{d}{ds}\big(L_{z_j}(s,\bar{y},\bar{y}')\big) = 0,$$

es decir, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL). $\square$

Ejemplo

- Partícula de masa $m > 0$, constante, sujeta a un potencial $V = V(y)$, que depende de la posición de la partícula $y \in \mathbb{R}^3$.
- La fuerza ejercida sobre la misma es el gradiente del potencial, $F = D_y V$.
- La variable z está asociada a la derivada de y con respecto del tiempo (velocidad), la energía cinética de la partícula es $\frac{1}{2}m|z|^2$.
- Definimos el **lagrangiano**:

$$L(y,z) = \tfrac{1}{2}m|z|^2 - V(y), \qquad z,y \in \mathbb{R}^3.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a una trayectoria $\bar{y}$ que minimiza la acción $I[y]$ son

$$-\frac{d}{ds}L_{z_j} + L_{y_j} = -\frac{d}{ds}\left(m\bar{y}_j'(s)\right) - V_{y_j}(\bar{y}(s)) = 0,$$

para $1 \leq j \leq 3$. Escritas en forma vectorial, reconocemos que éstas corresponden a la **segunda ley de Newton**:

$$m\bar{y}''(s) = F(\bar{y}(s)).$$

Momento generalizado

- Las ecuaciones de Euler-Lagrange constituyen una condición necesaria (más no suficiente) para la existencia de una trayectoria minimizante.
- Si una trayectoria en la clase $\mathscr{A}$ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces se denomina **trayectoria crítica o punto crítico**.
- Si $\bar{y} = \bar{y}(s)$ es una trayectoria crítica entonces definimos el **momento generalizado** $p = p(s)$, correspondiente a la posición $\bar{y}(s)$ con velocidad $\bar{y}'(s)$, mediante

$$p(s) = D_z L(s, \bar{y}(s), \bar{y}'(s)), \quad s \in [0, t].$$

Hipótesis de invertibilidad

Hipótesis

Para todo $y, p \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, la ecuación

$$p = D_z L(s, y, q),$$

se puede resolver de manera única para $q \in \mathbb{R}^n$ mediante una función $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ suficientemente diferenciable, de modo que,

$$q = Q(s, y, p),$$

para $(s, y, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Hamiltoniano

Definición

Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un lagrangiano que satisface la hipótesis de invertibilidad. Entonces para cada $s \in \mathbb{R}$, $y, p \in \mathbb{R}^n$ definimos el **hamiltoniano** asociado mediante

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ H(s,y,p) &:= p \cdot Q(s,y,p) - L(s,y,Q(s,y,p)), \end{aligned} \tag{H}$$

para cada $(s,y,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

La hipótesis de invertibilidad está asociada a la existencia de la **transformada de Legendre**.

Hamiltoniano

Definición

Sea $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un lagrangiano que satisface la hipótesis de invertibilidad. Entonces para cada $s \in \mathbb{R}$, $y, p \in \mathbb{R}^n$ definimos el **hamiltoniano** asociado mediante

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ H(s,y,p) &:= p \cdot Q(s,y,p) - L(s,y,Q(s,y,p)), \end{aligned} \tag{H}$$

para cada $(s,y,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

La hipótesis de invertibilidad está asociada a la existencia de la **transformada de Legendre**.

Lema (ecuaciones de Hamilton)

Bajo la hipótesis de invertibilidad, sea $\bar{y} = \bar{y}(s)$, $s \in [0,t]$, *una trayectoria crítica. Entonces* $\bar{y}(s)$ *y el momento generalizado asociado* $p = p(s)$ *satisfacen el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \bar{y}'(s) &= D_p H(s, \bar{y}(s), p(s)), \\ p'(s) &= -D_y H(s, \bar{y}(s), p(s)), \end{aligned} \tag{sH}$$

para $s \in [0,t]$, *conocido como el sistema de ecuaciones de Hamilton. Mas aún, si* $H = H(y,p)$ *no depende explícitamente de* s *entonces el mapeo* $s \mapsto H(\bar{y}(s), p(s))$ *es* ***constante***.

Demostración: Por la hipótesis de invertibilidad $(p = D_z L(s,y,q) \overset{\exists!}{\Rightarrow} q = Q(s,y,p))$ se puede definir para cada $s \in [0,t]$,

$$\bar{y}'(s) = Q(s, \bar{y}(s), p(s)),$$

para cierta función suave Q y donde p es el momento generalizado $p(s) = D_z L(s, \bar{y}, \bar{y}')$.
Notación:

$$Q(\cdot) = (q_1(\cdot), \ldots, q_n(\cdot)),$$

donde $q_j = q_j(\cdot) \in \mathbb{R}$. Para cada $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = -\frac{\partial L}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))) + \sum_{j=1}^{n} p_j(s) \frac{\partial q_j}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) +$$
$$- \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial z_j}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))) \frac{\partial q_j}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)).$$

Pero el momento generalizado es, por definición, $p = D_z L$, por lo que se cancelan las sumas:

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = -\frac{\partial L}{\partial y_i}(s, \bar{y}(s), Q((s, \bar{y}(s), p(s)))).$$

Usando el mismo argumento se puede verificar que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = q_i(s, \bar{y}(s), p(s)).$$

Dado que $\bar{y}' = Q(s, \bar{y}, p)$ concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}(s, \bar{y}(s), p(s)) = \bar{y}_i'(s),$$

para todo $1 \leq i \leq n$: primera ecuación en (sH).

Por otra parte, sustituyendo, y dado que $\bar{y} = \bar{y}(s)$ es una trayectoria crítica,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial y_i}(s,\bar{y}(s),p(s)) &= -\frac{\partial L}{\partial y_i}(s,\bar{y}(s),\bar{y}'(s)) \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial z_i}(s,\bar{y}(s),\bar{y}'(s))\right) \\ &= -p_i'(s),\end{aligned}$$

para todo $1 \leq i \leq n$, es decir,

$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}(s,\bar{y}(s),p(s)) = p_i'(s),$$

segunda ecuación en (sH).

Finalmente, si suponemos que el hamiltoniano no depende explícitamente de s, usando el sistema (sH) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}H(\bar{y}(s),p(s)) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}p_j'(s)+\frac{\partial H}{\partial y_j}\bar{y}_j'(s)\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial y_j}-\frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)=0,\end{aligned}$$

para todo $0 \leq s \leq t$. Es decir, el hamiltoniano es constante. $\square$

Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Sea $\bar{y} = \bar{y}(s)$ una **trayectoria crítica** tal que $\bar{y}(0) = a$, $\bar{y}(t) = x$, y **de clase C^1 en los datos**: $\bar{y}$ y $\bar{y}'$ tienen derivadas continuas con respecto a $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Extendemos la notación y escribimos

$$\bar{y}(s) := Y(s,t,x), \qquad \bar{y}'(s) := \frac{\partial Y}{\partial s}(s,t,x).$$

Función geodésica

Definimos la **función geodésica**, $u = u(x,t)$, como la acción

$$u(x,t) := I[\bar{y}] = \int_0^t L\Big(s, Y(s,t,x), \frac{\partial Y}{\partial s}(s,t,x)\Big)\, ds. \qquad \text{(G)}$$

A la curva $Y(s,t,x)$ se le llama **curva geodésica** entre $(a,0)$ y (x,t).

Como la trayectoria crítica es de clase C^1 en los datos entonces u **es continuamente diferenciable en** (x,t)**.**

Así,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(L_{y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x_i \partial s} \right) ds \\
&= \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(\Big(\frac{d}{ds} L_{z_j} \Big) \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x_i \partial s} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{d}{ds} \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) ds \\
&= \sum_{j=1}^n \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \right) \Bigg|_{s=0}^{s=t},
\end{aligned}
$$

tras haber aplicado las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Pero $Y_j(0,t,x) = a$ es independiente de x, y $Y_j(t,t,x) = x_j$ para todo t y todo j. Por lo tanto,

$$\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(0,t,x) = 0, \quad \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}(t,t,x) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases},$$

para cualesquiera $1 \leq i,j \leq n$. Por la definición de momento generalizado, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = L_{z_i}(t,x,\bar{y}'(t)) = p_i.$$

Igualmente, usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para calcular:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(L_{y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} + L_{z_j} \frac{\partial^2 Y_j}{\partial t \partial s} \right) ds \\ &= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{d}{ds} \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) ds \\ &= L(t,x,\bar{y}'(t)) + \sum_{j=1}^n \left(L_{z_j} \frac{\partial Y_j}{\partial t} \right) \Bigg|_{s=0}^{s=t} .\end{aligned}$$

Sin embargo, derivando $Y_j(0,t,x) = a$ notamos que

$$\frac{\partial Y_j}{\partial t}(0,t,x) = 0.$$

Igualmente, $Y_j(t,t,x) = x_j$ para todo j implica que

$$\left(\frac{\partial Y_j}{\partial s} + \frac{\partial Y_j}{\partial t}\right)(t,t,x) = \frac{d}{dt}\big(Y_j(t,t,x)\big) = 0.$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= L(t,x,\bar{y}'(t)) - \sum_{j=1}^{n}\left(L_{z_j}(t,x,\bar{y}'(t))\frac{\partial Y_j}{\partial s}(t,t,x)\right)\\ &= L(t,x,\bar{y}'(t)) - \sum_{j=1}^{n} p_j \bar{y}_j'(t).\end{aligned}$$

Bajo la hipótesis de invertibilidad, $p = D_z L(t,x,q)$ es invertible con $q = Q(t,x,p)$, para cualesquiera $(t,x,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Como el hamiltoniano es

$$H(t,x,p) = p \cdot Q(t,x,p) - L(t,x,Q(t,x,p)),$$

por la ecuación $\frac{\partial u}{\partial x_i} = L_{z_i}(t,x,\bar{y}'(t)) = p_i$ obtenemos finalmente la **ecuación de Hamilton-Jacobi**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t,x,D_x u) = 0.$$

Receso: regresamos en 5 min.

1. La ecuación de Hamilton-Jacobi
2. Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi
3. Ejemplos
4. Epílogo: la transformada de Legendre

Oscilador armónico simple en una dimensión

Partícula ideal de masa $m > 0$ sujeta a un resorte elástico que se deforma de acuerdo con la **ley de Hooke**: la fuerza que ejerce dicho resorte sobre la partícula es proporcional al elongamiento en sentido opuesto, $F = -kx$, donde $k > 0$ es una constante y $x \in \mathbb{R}$ denota la posición de la partícula. De esta forma el potencial es $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ y la energía cinética es $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

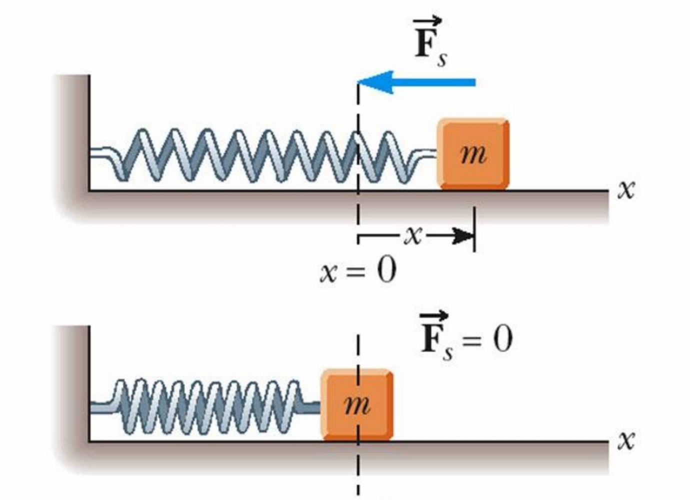

Figura: Idealización del oscilador armónico simple.

Sea el **lagrangiano**:

$$L(y,z) = \frac{1}{2}mz^2 - \frac{1}{2}ky^2, \qquad y,z \in \mathbb{R}.$$

La ecuación para el momento generalizado, $p = \partial_z L(t,y,q)$, se resuelve trivialmente de manera única para $q = p/m =: Q(y,p)$, por lo que el hamiltoniano toma la siguiente forma

$$H(x,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi para la función geodésica $u = u(x,t)$ es, por lo tanto,

$$u_t + \frac{1}{2m}u_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0.$$

Sea la condición inicial de la forma $u(x,0) = f(x)$.

El sistema de Hamilton (característico) asociado es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= H_p(x,p) = p/m, & x(0) &= \xi, \\ \frac{dp}{dt} &= -H_x(x,p) = -kx, & p(0) &= p_0 = f'(\xi), \end{aligned}$$

el cual tiene una solución muy conocida

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi \cos(\omega_0 t) + \frac{p_0(\xi)}{\omega_0 m} \sin(\omega_0 t), \\ p(t) &= -m\omega_0 \xi \sin(\omega_0 t) + p_0(\xi) \cos(\omega_0 t), \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de oscilación. La energía total (hamiltoniano) es constante

$$H = \frac{1}{2m} p(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2 \equiv H_0 = \frac{1}{2m} p_0(\xi)^2 + \frac{1}{2} k \xi^2,$$

para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo

Proyectil en un potencial gravitacional

Sea una partícula en el espacio con posición $x \in \mathbb{R}^3$, masa $m > 0$, y sujeta a la acción de un potencial gravitacional $V(x) = mgx_3$, donde $g > 0$ es una constante. La energía cinética es $\frac{1}{2}m|\dot{x}|^2$, de manera que el lagrangiano asociado toma la forma

$$L(y,z) = \frac{1}{2}m|z|^2 - mgy_3, \qquad y,z \in \mathbb{R}^3.$$

El momento generalizado, $p = D_z L(y,q) = mq$ se puede resolver para $q = p/m =: Q(x,p)$ de modo que el hamiltoniano es

$$H(x,p) = p \cdot Q(x,p) - L(x,Q(x,p)) = \frac{1}{2m}|p|^2 + mgx_3,$$

es decir, la energía total.

La ecuación de Hamilton-Jacobi asociada es

$$u_t + \frac{1}{2m}|\nabla u|^2 + mgx_3 = 0,$$

donde $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$. Si consideramos una condición inicial de la forma $u(x,0) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^3$, el método de características reduce el problema a resolver el siguiente sistema de Hamilton:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dt} &= p_j/m, & x_j(0) &= \xi_j, \quad 1 \leq j \leq 3,\\
\frac{dp_1}{dt} &= 0, & p_1(0) &= f_{x_1}(\xi) =: p_1^0,\\
\frac{dp_2}{dt} &= 0, & p_2(0) &= f_{x_2}(\xi) =: p_2^0,\\
\frac{dp_3}{dt} &= -mg, & p_3(0) &= f_{x_3}(\xi) =: p_3^0.
\end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones para los momentos encontramos que

$$p_1(t) = p_1^0, \quad p_2(t) = p_2^0, \quad p_3(t) = -mgt + p_3^0.$$

Sustituyendo en las ecuaciones para la posición obtenemos,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{m} p_1^0 t + \xi_1, \\ x_2(t) &= \frac{1}{m} p_2^0 t + \xi_2, \\ x_3(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{m} p_1^0 t + \xi_1, \end{aligned}$$

que es el conocido **perfil parabólico** del movimiento de un proyectil.

Ejercicio: Movimiento con potencial central. La tercera ley de Kepler

Cuando una partícula clásica de masa $m > 0$ se mueve en el espacio ($x \in \mathbb{R}^3$) bajo la acción de un **potencial central** $V = V(r)$, $r = |x| > 0$, el lagrangiano se expresa en **coordenadas esféricas** mediante

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\phi}\right) - V(r),$$

donde $\cdot = d/dt$.

Preguntas:

- ¿Qué forma tiene el hamiltoniano, $H = H(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$?

- Demuestra que la ecuación de Hamilton-Jacobi asociada es

$$u_t + \frac{1}{2m} u_r^2 + \frac{1}{2mr^2} u_\theta^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} u_\phi^2 + V(r) = 0.$$

- Propón una solución de la forma $u(t, r, \theta, \phi) = u_1(t) + u_2(r) + u_3(\theta) + u_4(\phi)$ y demuestra que

$$u_1(t) = -Et, \qquad u_4(\phi) = \tilde{K},$$

con E, $\tilde{K}$ constantes. Demuestra que u_3 satisface la ecuación

$$(\partial_\theta u_3)^2 + \frac{\tilde{K}^2}{\sin^2 \theta} = \text{constante} =: K.$$

- Prueba que la ecuación para la parte radial es

$$\frac{1}{2m}(\partial_r u_2)^2 + \frac{K^2}{2mr^2} + V(r) = E,$$

suponiendo que $\tilde{K}^2 \geq K^2$. Observa que resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a integrar la ecuación

$$\partial_r u_2 = \sqrt{2mE - 2mV(r) - \frac{K^2}{r^2}}.$$

- Considera el **potencial gravitacional** (movimiento de Kepler),

$$V(r) = -\frac{GMm}{r},$$

donde G y M son constantes positivas (constante gravitacional y masa central, respectivamente). Suponiendo que $\sin\theta = 1$ y $K = \tilde{K}$ demuestra que es posible integrar la ecuación y obtener

$$\phi = \text{arc cos}\left(\frac{K^2 - GMm^2 r}{r\sqrt{2mEK^2 + G^2M^2m^4}}\right) + \phi_0,$$

es decir,

$$\left(GMm^2 + \sqrt{G^2M^2m^4 + 2mEK^2}\cos(\phi - \phi_0)\right)r = K^2,$$

que tiene la forma de una cónica, $r = ed(1 - e\cos\alpha)$ con excentricidad e. Verifica que la cónica es cerrada, una **elipse** ($e > 1$) si $E < 0$.

1. La ecuación de Hamilton-Jacobi
2. Derivación de la ecuación de Hamilton-Jacobi
3. Ejemplos
4. Epílogo: la transformada de Legendre

La transformada de Legendre

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de clase C^2 que satisface

$$f''(u)\geq 1/C>0, \ \text{para toda} \ u\in\mathbb{R}, \tag{H$_1$}$$

$$\lim_{u\to\pm\infty} f'(u)=\pm\infty, \tag{H$_2$}$$

Es decir, f es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}$ y su derivada $a:=f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, es invertible.

Definición

Si f satisface (H$_1$) y (H$_2$), definimos **la transformada de Legendre** de f como

$$f^*(v):=\max_{u\in\mathbb{R}}\big(uv-f(u)\big), \qquad v\in\mathbb{R}. \tag{tL$_1$}$$

Observaciones:

- f^* está bien definida. Para cada $v \in \mathbb{R}$ fijo, existe un único $u_* \in \mathbb{R}$ tal que $v = f'(u_*) = a(u_*)$, ya que $a = f'$ es inyectiva y sobre. Así, $(\psi^v)(u) := uv - f(u)$ tiene un máximo único en $u = u_*$, en vista de que $(\psi^v)'(u_*) = 0$ y $(\psi^v)''(u_*) = -f''(u_*) < 0$. Por lo tanto, $f^*(v) = u_* v - f(u_*)$. Denotamos a la inversa de a como $g = a^{-1}$. De esta manera obtenemos, $u_* = g(v)$. Por ende, para toda $v \in \mathbb{R}$, $f^*(v)$ está determinada por

$$f^*(v) = vg(v) - f(g(v)). \qquad \text{(tL}_2\text{)}$$

- Diferenciando (tL_2),

$$\frac{df^*}{dv} = vg'(v) + g(v) - a(g(v))g'(v) = g(v),$$

por lo cual,

$$\frac{d^2f^*}{dv^2} = g'(v) = \frac{1}{a'(g(v))} = \frac{1}{f''(g(v))} > 0,$$

esto es, f^* **también es estrictamente convexa y de clase C^2.**

Autodualidad

Lema

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^2 *y satisface* (H$_1$) *y* (H$_2$), *entonces* $(f^*)^* = f$.

Demostración: Por definición de la transformada de Legendre,

$$f^*(v) = \max_{u\in\mathbb{R}} (uv - f(u)) \geq uv - f(u),$$

para toda $u \in \mathbb{R}$, es decir, $f(u) + f^*(v) \geq uv$, para todo $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$. Así,

$$f(u) \geq \sup_{v\in\mathbb{R}} (uv - f^*(v)).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sup_{w\in\mathbb{R}}(uw - f^*(w)) &= \sup_{w\in\mathbb{R}}\left(uw - \sup_{v\in\mathbb{R}}(wv - f(v))\right) \\ &= \sup_{w\in\mathbb{R}}\left(\inf_{v\in\mathbb{R}}(w(u-v) + f(v))\right). \end{aligned}$$

Dado que f es estrictamente convexa (y de clase C^2) sabemos que

$$f(v) + f'(u)(u-v) \geq f(u),$$

para todo par $v, u \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, tomando $w = f'(u)$, obtenemos

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}(uw - f^*(w)) \geq \inf_{v\in\mathbb{R}}(f'(u)(u-v) + f(v)) \geq f(u).$$

Combinando con $f(u) \geq \sup_{v\in\mathbb{R}}(uv - f^*(v))$ concluimos que

$$\sup_{w\in\mathbb{R}}(uw - f^*(w)) = \max_{w\in\mathbb{R}}(uw - f^*(w)) = (f^*)^*(u) = f(u),$$

para toda $u \in \mathbb{R}$. $\square$

Aplicación: dualidad convexa entre lagrangiano y hamiltoniano

Dado un lagrangiano $L = L(t,y,z)$, suponemos que para (t,y) fijo, el mapeo $z \mapsto L(\cdot,\cdot,z) =: \widetilde{L}(z)$ satisface:

$$\left.\begin{array}{c} z \mapsto \widetilde{L}(z) \quad \text{es convexa,} \\ \lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{\widetilde{L}(z)}{|z|} = \infty. \end{array}\right\}$$

Entonces podemos definir

$$\widetilde{L}^*(p) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \{p \cdot z - \widetilde{L}(z)\}$$

Nota: aquí tenemos una función de $p \in \mathbb{R}^n$. La demostración es prácticamente la misma (ver Evans, p. 120-121).

Aplicación: dualidad convexa entre lagrangiano y hamiltoniano

Dado un lagrangiano $L = L(t,y,z)$, suponemos que para (t,y) fijo, el mapeo $z \mapsto L(\cdot,\cdot,z) =: \widetilde{L}(z)$ satisface:

$$\left.\begin{array}{c} z \mapsto \widetilde{L}(z) \quad \text{es convexa,} \\ \displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{\widetilde{L}(z)}{|z|} = \infty. \end{array}\right\}$$

Entonces podemos definir

$$\widetilde{L}^*(p) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \{p\cdot z - \widetilde{L}(z)\}$$

Nota: aquí tenemos una función de $p \in \mathbb{R}^n$. La demostración es prácticamente la misma (ver Evans, p. 120-121).

El “sup” es en realidad un “max” ya que $\lim \widetilde{L}(z)/|z| = \infty$. Por lo tanto

$$\widetilde{L}^*(p) = p \cdot z_* - \widetilde{L}(z_*),$$

para cierto $z_* \in \mathbb{R}^n$. Por ser máximo,

$$0 = D_z(p \cdot z - \widetilde{L}(z))_{|z=z_*} = p - D_z\widetilde{L}(z_*).$$

Es decir, la ecuación $p = D_z\widetilde{L}(q)$ tiene **al menos una solución**, $z_* = q = q(p)$. Por lo tanto obtenemos,

$$\widetilde{L}^*(p) = p \cdot q(p) - \widetilde{L}(p).$$

Con estas hipótesis, se define el hamiltoniano:

$$\widetilde{H}(p) := \widetilde{L}^*(p) = p \cdot q(p) - \widetilde{L}(p) [= p \cdot Q(t,y,p) - L(t,y,Q(t,y,p))].$$

El “sup” es en realidad un “max” ya que $\lim \widetilde{L}(z)/|z| = \infty$. Por lo tanto

$$\widetilde{L}^*(p) = p \cdot z_* - \widetilde{L}(z_*),$$

para cierto $z_* \in \mathbb{R}^n$. Por ser máximo,

$$0 = D_z(p \cdot z - \widetilde{L}(z))_{|z=z_*} = p - D_z\widetilde{L}(z_*).$$

Es decir, la ecuación $p = D_z\widetilde{L}(q)$ tiene **al menos una solución**, $z_* = q = q(p)$. Por lo tanto obtenemos,

$$\widetilde{L}^*(p) = p \cdot q(p) - \widetilde{L}(p).$$

Con estas hipótesis, se define el hamiltoniano:

$$\widetilde{H}(p) := \widetilde{L}^*(p) = p \cdot q(p) - \widetilde{L}(p) [= p \cdot Q(t,y,p) - L(t,y,Q(t,y,p))].$$

Observaciones:

- Se puede demostrar bajo las hipótesis de L que
$$\left.\begin{aligned} p \mapsto \widetilde{H}(p) \quad &\text{es convexa,} \\ \lim_{|p|\to\infty} \frac{\widetilde{H}(p)}{|p|} &= \infty. \end{aligned}\right\}$$
- $\widetilde{H}^* = \widetilde{L}$
- Si L es diferenciable (y por ende, $\widetilde{H}$) entonces los tres enunciados:
$$\begin{aligned} p \cdot z &= \widetilde{L}(z) + \widetilde{H}(p), \\ p &= D_z \widetilde{L}(z), \\ z &= D_p \widetilde{H}(p). \end{aligned}$$
son equivalentes.

Véase Evans, p. 120-122.

Observaciones:

- Se puede demostrar bajo las hipótesis de L que

$$\left.\begin{aligned} p \mapsto \widetilde{H}(p) \quad \text{es convexa,} \\ \lim_{|p|\to\infty} \frac{\widetilde{H}(p)}{|p|} = \infty. \end{aligned}\right\}$$

- $\widetilde{H}^* = \widetilde{L}$
- Si L es diferenciable (y por ende, $\widetilde{H}$) entonces los tres enunciados:

$$\begin{aligned} p \cdot z &= \widetilde{L}(z) + \widetilde{H}(p), \\ p &= D_z\widetilde{L}(z), \\ z &= D_p\widetilde{H}(p). \end{aligned}$$

  son equivalentes.

Véase Evans, p. 120-122.

Próxima lección: el modelo de tráfico de LWR. Leyes de conservación, parte I.