Lección 1.7: Modelo de tráfico de LWR. Introducción a leyes de conservación, parte I

LWR = $\underbrace{\text{Lighthill - Whitham}}$ - Richards

ca. 1955

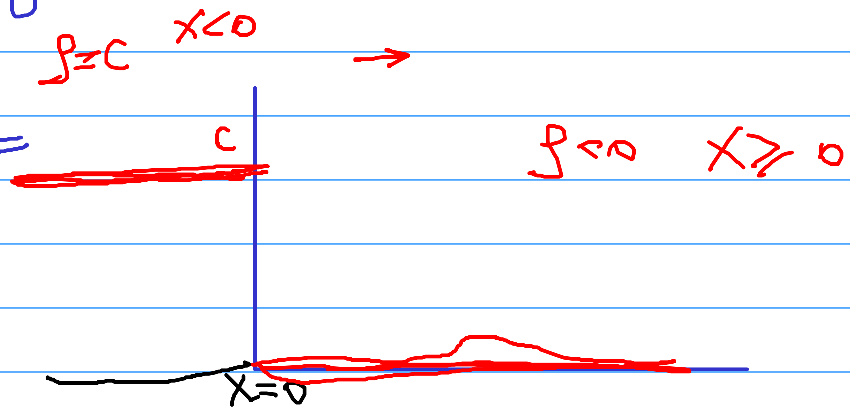
(H_1): Autopista unidimensional, $x \in \mathbb{R}$
Autos no se rebasan. (Tiene un sentido.)
No hay entradas ni salidas.

(H_2): # de autos x unidad de longitud en la posición $x \in \mathbb{R}$ a tiempo $t > 0$ se aproxima por una función diferenciable $\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}$ "densidad de masa vehicular" unidades: masa vehicular x unidad de longitud $[M]/[L]$.

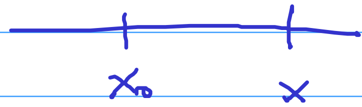
(H_3): Condición inicial $\rho(x,0) = \rho_0(x)$ $x \in \mathbb{R}$ conocida. Distribución de autos a tiempo $t = 0$.

Semáforo rojo $\rightarrow$ verde en $t = 0$

$\rho(x,0) =$



/ $x_0, x \in \mathbb{R}$ arbitrarios.



$t \geq 0$ $$M(t) = \int_{x_0}^{x} \rho(\xi, t)\, d\xi$$

\# de autos a tiempo $t \geq 0$ entre x_0 y x

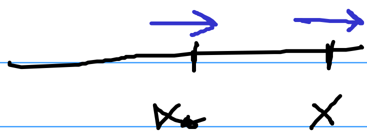
$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x} \rho(\xi, t)\, d\xi$$

$$\cong \left\{ \begin{array}{l} \text{\# autos que} \\ \text{entran en } x_0 \\ \text{por unidad de tiempo} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{\# autos que salen} \\ \text{en } x \text{ por unidad} \\ \text{de tiempo} \end{array} \right\}$$

"Flujo"

(H_4): Existe $\tilde{F} = \tilde{F}(x,t)$ continua que aproxima el "flujo" de autos en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Unidades : $$[\tilde{F}] = \frac{[M]}{[T]}$$



Ley de conservación :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x} \rho(\xi, t)\, d\xi = \tilde{F}(x_0, t) - \tilde{F}(x, t)$$

¿ Quién es $\tilde{F}$?

Razonable: $\tilde{F}$ depende de (x,t) a través de $\rho(x,t)$.

En general $\tilde{F} = \tilde{F}(x, t, \rho, \rho_x, \rho_{xx}, \dots)$

Si $\rho(x,t) = 0$ entonces $\tilde{F} = 0$.

Si $\rho(x,t) \gg 1$ entonces $\tilde{F} = 0$

<u>Primer modelo:</u> $\tilde{F} = \tilde{F}(x,t) = F(\rho(x,t))$

con $F(\rho)$ función de $\rho \geq 0$.

Relación constitutiva.

Pedimos:
- $F(0) = 0$
- Sea $\rho_m > 0$, constante densidad máxima de la autopista.
  $F(\rho_m) = 0$ (embotellamiento).

Sustituimos:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x} \rho(\xi,t)\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \rho_t(\xi,t)\, dx$$

$$= F(\rho(x_0,t)) - F(\rho(x,t)).$$

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x} \rho(\xi,t)\, d\xi = F(\rho(x_0,t)) - F(\rho(x,t))$$

Ley de conservación

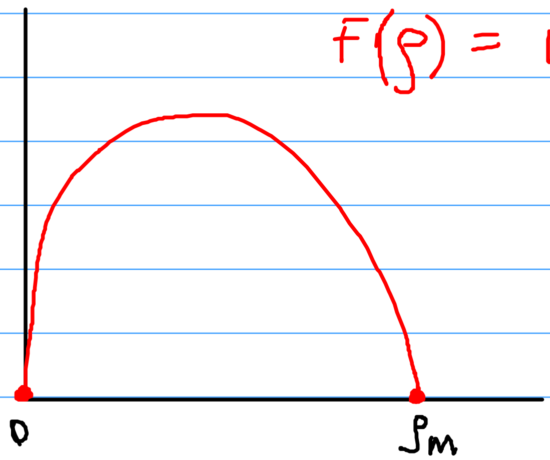
$\rho \in C^1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \left(\rho_t(\xi,t) + F(\rho(\xi,t))_\xi \right) d\xi = 0$

Teorema de localización:

(1) .- $\rho_t + F(\rho)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$

LWR: Perfil parabólico.

$F(0) = F(\rho_m) = 0$



$F(\rho) = u_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$ .. (2)

$u_m > 0$ constante

Máximo flujo $\rho_* = \frac{1}{2}\rho_m$.

Modelo LWR:

$$(3) \cdots \begin{cases} \rho_t + \left(u_m \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\right)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Def.: $u(\rho) := \frac{F(\rho)}{\rho} = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)$

$[u] = \frac{[F]}{[\rho]} = \frac{[\cancel{M}]}{[T]} \cdot \frac{[L]}{[\cancel{M}]} = \frac{[L]}{[T]}$

tiene unidades de velocidad.

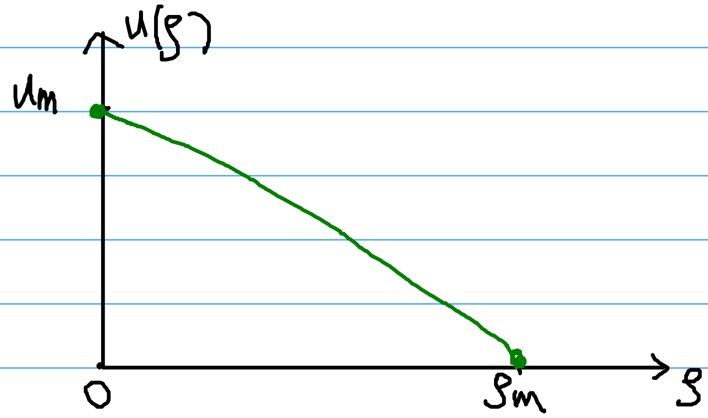
" velocidad euleriana "

$u(\rho)$ es la velocidad de los autos en $x \in \mathbb{R}$ a tiempo $t > 0$ cuando la densidad es $\rho(x,t)$.

$u_m > 0$ tiene unidades de velocidad

$$\rho \in [0, \rho_m] \Rightarrow 0 \leq u(\rho) \leq u_m$$

u_m = límite de velocidad.



Nota: Modelo con "difusión"

Ansatz: $\tilde{F} = \hat{F}(\rho, \rho_x) = \rho \, \hat{u}(\rho, \rho_x)$

Conductor: acelera [frena] si detecta una disminucion [aumento] de la densidad de autos con respecto a la distancia enfrente.

Propuesta: $\hat{u}(\rho) = u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - \varepsilon \rho_x$

con $0 < \varepsilon \ll 1$ pequeño.

$$\hat{F}(\rho, \rho_x) = \rho \, \hat{u}(\rho) = \rho u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right) - \varepsilon \rho \rho_x$$

Sust:

$$\rho_t + \left(\rho u_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m}\right)\right)_x = \varepsilon(\rho \rho_x)_x$$

$x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$

Modelo de tráfico con "difusión" (2o. orden)

$$\rho_t + [\ \ ]_x = \varepsilon(D(\rho)\rho_x)_x$$

$D(\rho) = \rho$ difusividad.

LWR: ec. de primer orden.

Leyes de conservación (escalares)

$u = u(x,t) \in \mathbb{R}$ "solución" de

$$(4) \cdots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ flujo (función de)
u_0 conocida

(4) = versión diferencial de

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(\xi,t)\,d\xi = f(u(a,t)) - f(u(b,t)) \quad \cdots (5)$$

Nota: Si $u \in C^1$ entonces la ley de conservación (4) es equivalente a:

[forma cuasi-lineal]

$$\left.\begin{array}{l} u_t + a(u)\,u_x = 0, \qquad x\in\mathbb{R},\quad t>0 \\ \text{con} \quad a(u) = f'(u). \end{array}\right\} \dots (6)$$

Teorema (lección 1.2): Sean $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^2$. Entonces el problema de Cauchy (4) tiene una única solución de clase C^1 en una vecindad de la curva inicial

$$\Gamma' = \{ (\xi, 0, u_0(\xi)) \; : \; \xi \in \mathbb{R} \}.$$

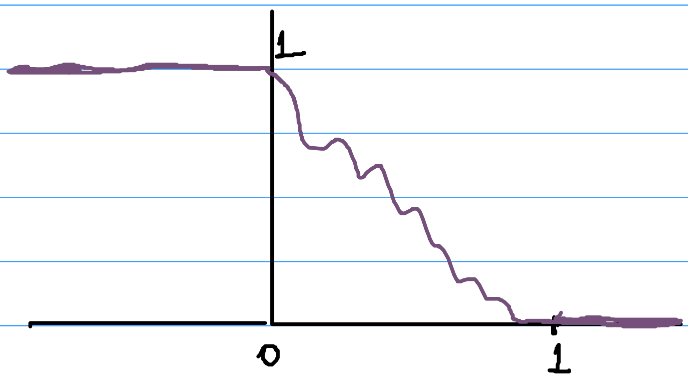
Ejemplo: Burgers $\quad f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad a(u) = u$

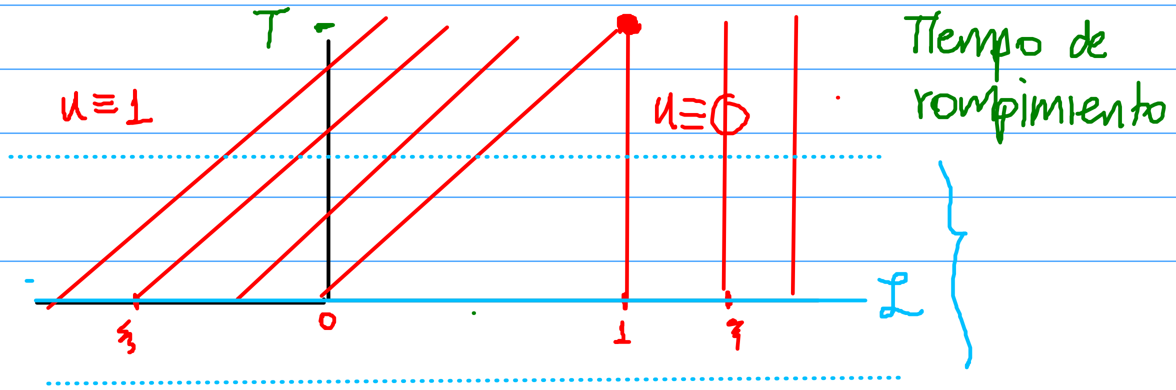
$$u_0(\xi) = \frac{dx}{dt} = a(u), \qquad x(0) = \xi$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad u(0) = u_0(\xi)$$

$$\Rightarrow \quad u \equiv u_0(\xi) \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}$$

$$u_0(x) = \quad = \begin{cases} 1, & x<0 \\ \psi(x), & 0<x<1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$





$$(4) \ldots \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: Sea $f \in C^2$, $u_0 \in C^1$. u_0 es acotada y con derivada acotada, $\exists\, C>0$ uniforme tal que, $|u_0(x)|, |u_0'(x)| \le C$.
$a(u) = f'(u) \in C^1$ (velocidad característica).
Definimos:

$$T_* := \begin{cases} \infty, & \text{si } a(u_0(x)) \text{ es no decreciente} \\ -\dfrac{1}{\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx}\left(a(u_0(x))\right)}, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces el problema de Cauchy (4) tiene una única solución $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,T_*)) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T_*))$.

$$T_* = \frac{-1}{\inf a(u_0(x))_x}$$ se le llama tiempo de rompimiento.

<u>Demostración</u>:
Si $\exists$ solución de clase C^1 entonces es constante sobre rectas características:

$$\hat{x}(t) = a(u_0(y_0))\,t + y_0, \qquad y_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

$$\alpha(x) := a(u_0(x)), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Para cada $t>0$ fijo definimos

$$F^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F^t(y) := y + \underbrace{\alpha(y)}_{} t.$$

$u_0 \in C^1 \Rightarrow$ F^t es continua en $y \in \mathbb{R}$.

u_0 acotada $\Rightarrow$ $\alpha(y) = a(u_0(y)) \in a([-C,C])$.

Así:
$$\lim_{y \to \pm\infty} F^t(y) = \pm\infty, \qquad \forall t>0 \text{ fijo.}$$

Por teo. valor intermedio $\exists$ $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F^t(y_0) = x$.

$$\frac{dF^t}{dy} = 1 + \alpha'(y)t$$

$\alpha'(y) = a'(u_0(y))\, u_0'(y)$.

$f \in C^2,\ u_0 \in C^1 \Rightarrow \alpha \in C^1$.

Casos:

(a) $\alpha'(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\frac{dF^t}{dy} \geq 1 > 0 \quad \Rightarrow$$ F^t es estrictamente creciente.

$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ existe un único valor $y_0 = y_0(x,t)$ tal que $F^t(y_0) = x$.

$T_* := \infty$ la solución se define como

$$\boxed{u(x,t) = u_0(y_0(x,t)).} \quad \cdots (7)$$

caso (b):

$\alpha'(y) < 0$ para algún $y \in \mathbb{R}$

$$\infty > T_* = -\frac{1}{\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} \alpha'(x)} > 0$$

Si $0 < t < T_*$ entonces

$$\frac{dF^t}{dy} = 1 + \alpha'(y)t \geq 1 - \frac{t}{T_*} > 0$$

$\Rightarrow \exists!\ y_0 = y_0(x,t)$ tal que $x = F^t(y_0)$.

$\Rightarrow u(x,t) = u_0(y_0(x,t)), \qquad 0 < t < T_*$

$u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,T_*))$. :

$(x,y,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0,T_*)$.

$$G(x,y,t) := F^t(y) - x = y + \alpha(y)t - x.$$

- $G(x, y_0(x,t), t) = 0$
- $\frac{dG}{dy} = 1 + \alpha'(y)t > 0 \quad$ si $t \in (0,T_*)$

Teo. función implícita: $\exists!\ y = y(x,t) \in C^1$ en una vecindad de cada (x,t) arbitrario.
tal que
- $G(x, y(x,t), t) = 0$
- $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{G_x}{G_y} = \frac{1}{1+\alpha'(y)t}$
- $\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{G_t}{G_y} = \frac{-\alpha(y)}{1+\alpha'(y)t}$

Por unicidad $y_0(x,t) = y(x,t) \in C^1$ en una vecindad de $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, T_*)$ arbitrario.

$$\Rightarrow \quad y \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T_*)).$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = u_0(y(x,t)) \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T_*))$$

$$u_t + f(u)_x = u_0'(y(x,t)) \left(\frac{-\alpha(y)}{1+\alpha'(y)t} \right) +$$

$$+ \; a(u_0(y(x,t)))\, u_0'(y(x,t)) \left(\frac{1}{1+\alpha'(y)t} \right)$$

$$= \frac{u_0'(y)}{1+\alpha'(y)t} \underbrace{\left[-\alpha(y) + a(u_0(y)) \right]}_{=0} = 0.$$

$\therefore$ $u \in C^1$ es solución de la ley de conservación.

En $t=0$ $\quad G(x,y,0) = F^0(y) - x = y - x$

$$\therefore \quad \lim_{t \to 0^+} y(x,t) = y(x,0) = x$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t \to 0^+} u(x,t) = u_0(y(x,0)) = u_0(x)$$

Satisface (4) y $u \in C(\mathbb{R} \times [0, T_*))$.

$\square$