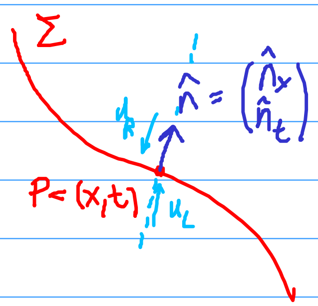
Lección 1.9: Introducción a leyes de conservación, parte III. Condiciones de entropía.

Ley de conservación $\quad u_t + f(u)_x = 0 \quad \cdots (1)$

Sol. débil u : condición de RH



$$\left.\begin{array}{l} \hat{n}_x [\![f(u)]\!] + \hat{n}_t [\![u]\!] = 0 \\ \text{sobre } \Sigma \end{array}\right\} (RH)$$

$$[\![g(u)]\!] = g(u_R) - g(u_L)$$

$$u_R = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u((x,t) + \varepsilon \hat{n})$$

$$u_L = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u((x,t) - \varepsilon \hat{n})$$

$\Sigma = \{ \hat{x}(t) = x \}$ $\qquad (RH) \Leftrightarrow -\sigma [\![u]\!] + [\![f(u)]\!] = 0$

$\sigma := \dfrac{d\hat{x}}{dt}$ "velocidad" de Σ.

Proposición: Sea u de clase C^1 por pedazos. u es solución débil si y sólo si u satisface la condición de salto de RH en cada punto P de cada discontinuidad Σ_j, $j \in \mathbb{N}$, y además u es solución de (1) en las regiones donde $u \in C^1$.

Demostración: ejercicio.

Pérdida de unicidad

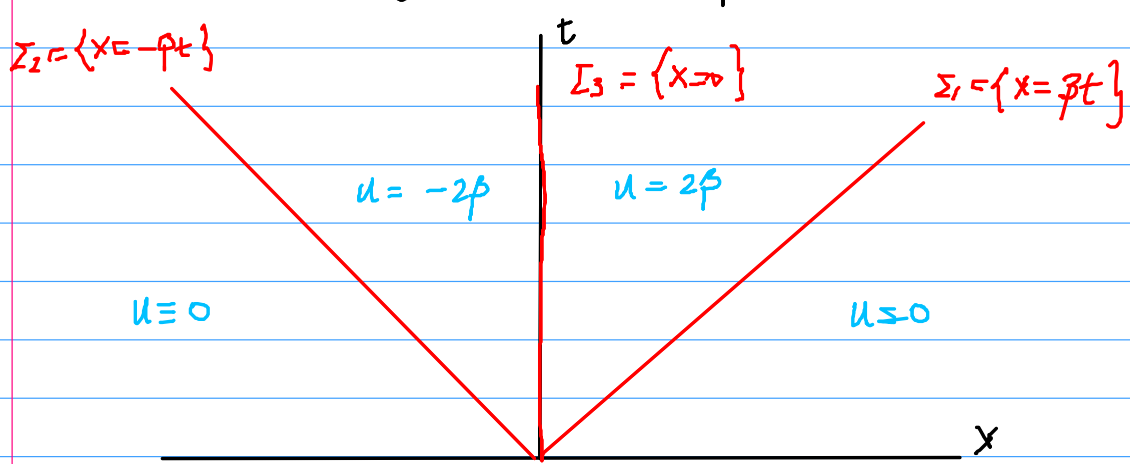
Ejemplos:

(i) $\left.\begin{array}{l} u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \\ u_0(x,0) \equiv 0 \end{array}\right\} \cdots (2)$ $\quad$ ec. de Burgers

Solución débil trivial $u(x,t) \equiv 0$.

$\exists$ infinidad de soluciones. Para cada $\beta > 0$ sea

$$u^\beta(x,t) := \begin{cases} 0, & x < -\beta t \\ -2\beta, & -\beta t < x < 0 \\ 2\beta, & 0 < x < \beta t \\ 0, & x > \beta t \end{cases}$$



Σ_1 : $\quad u_R = 0 \qquad \sigma = \frac{d\hat{x}}{dt} = \beta$

$\qquad u_L = 2\beta$

$$[\![f(u)]\!] = -\tfrac{1}{2}(2\beta)^2 = -2\beta^2 = \sigma [\![u]\!] \quad \checkmark$$
$$= \beta(-2\beta) \quad RH$$

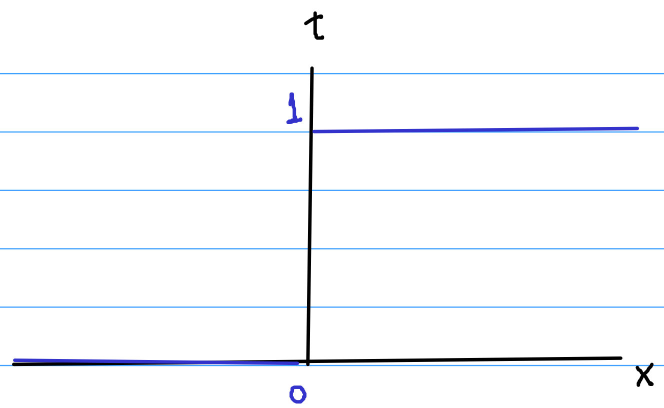
Sobre Σ_3, Σ_2 también se cumple (RH).

$\therefore$ cada u^β es solución débil.

(ii) Burgers con condición inicial discontinua

$$(3).- \begin{cases} u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad u(x,0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

"Problema de Riemann"



$u_R = 1$
$u_L = 0$

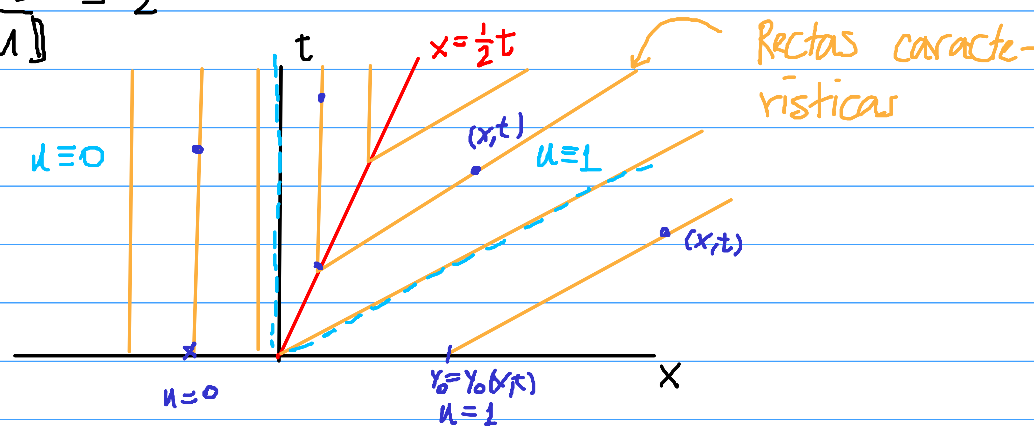
Frente plano :

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > \sigma t = \frac{1}{2}t \\ 0, & x < \sigma t = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

$f''(u) = 1 > 0$

$$\sigma = \frac{[\![f]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{1}{2}$$

$a(u_L) = 0 < \sigma = \frac{1}{2} < a(u_R) = 1$



Otra solución débil al problema de Riemann (3) :

El frente plano es una solución autosimilar, depende de x/t.

Proponemos $u(x,t) = v(\xi)$, $\quad \xi = \frac{x}{t}$.

Sea $v \in C^1$. $\quad u_t = v'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right)$

$$u_x = v'\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\right)$$

$u \in C^1 \Rightarrow$ Burgers $\Leftrightarrow$ $u_t + u u_x = 0$.

Sustituyendo:

$$0 = u_t + u u_x = -\frac{x}{t^2} v'\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} v\left(\frac{x}{t}\right) v'\left(\frac{x}{t}\right)$$

Mult. por $t>0$:

$$v'(\xi)\left(v(\xi) - \xi\right) = 0.$$

Basta con definir $v(\xi) = \xi$ para tener una solución. En otras palabras, $\frac{x}{t}$ es solución de Burgers (si $t>0$).

Condiciones: $v(0) = u_L = 0$
$v(1) = u_R = 1$

$\therefore$ $v(\xi) = \xi$ es solución.

Propuesta:

es continua

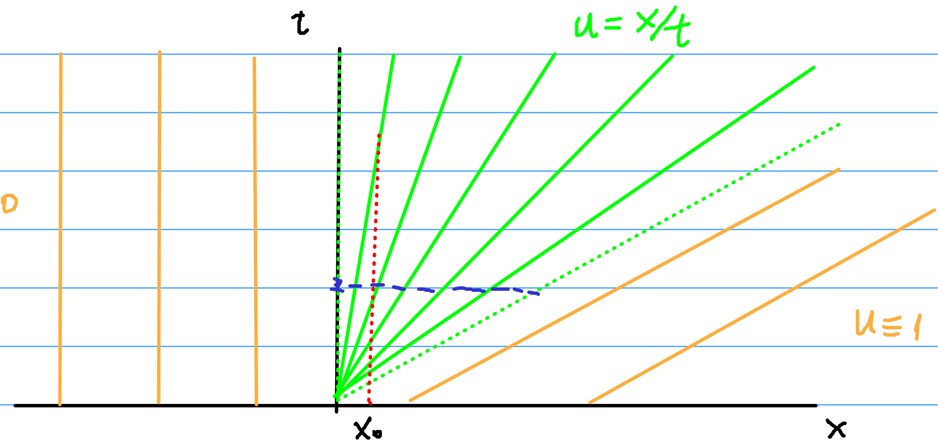
$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{x}{t}, & 0 < x < t \\ 1, & x \geq t \end{cases} \qquad \cdots (4)$$

$x \in \mathbb{R}$, $t>0$

La solución (4) se le llama onda de rarefacción.

(4) es solución débil del problema de Riemann (3). No es de clase C^1, pero sí es continua.

Ejercicio: (4) es solución débil.



$x = x_0$ const. $\quad u = \frac{x_0}{t} \approx \frac{c}{t} \searrow 0 \quad t \to \infty$ "se rarifica"

Hay más soluciones débiles: para cada $\alpha \in [0,1]$

$$u^\alpha(x,t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\alpha t}{2} \\ \alpha, & \frac{\alpha t}{2} \leq x \leq \alpha t \\ \frac{x}{t}, & \alpha t \leq x < t \\ 1, & t \leq x \end{cases}$$

también es sol. débil de (3).

Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ onda de rarefacción

Si $\alpha = 1 \Rightarrow$ frente plano.

Necesitamos un criterio para discernir cuál es la solución "admisible" desde un punto de vista físico.

Condición de entropía

Ec. Burgers $\quad u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0$

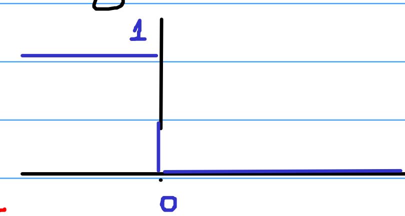
Frente plano

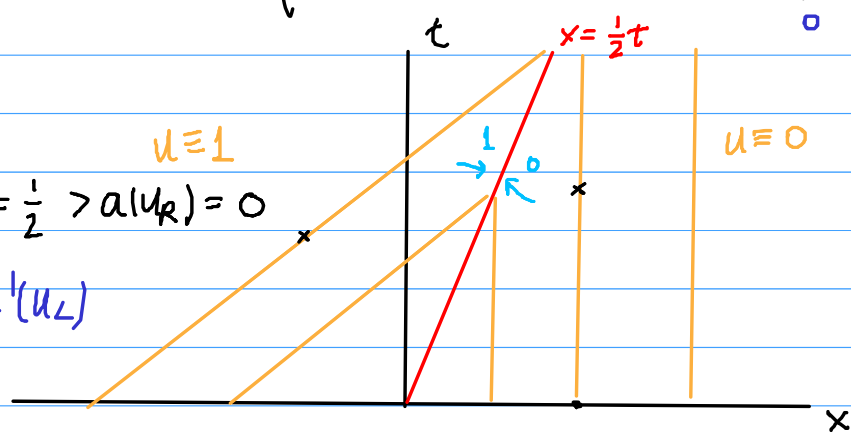
(i) $$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > \frac{1}{2}t \\ 0, & x < \frac{1}{2}t \end{cases}$$

(ii) $$u(x,t) = \begin{cases} 0, & x > \frac{1}{2}t \\ 1, & x < \frac{1}{2}t \end{cases}$$

(ii) es solución débil de Burgers con

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$





$a(u_L) = 1 > \sigma = \frac{1}{2} > a(u_R) = 0$

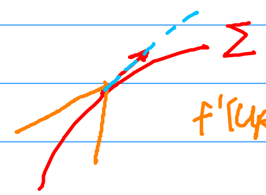
$f'(u_R) \leq \sigma \leq f'(u_L)$

Las características "aparentan entrar" en la discontinuidad.

<u>Condición de entropía de Lax</u> : Sea u una solución débil de la ley de conservación $u_t + f(u)_x = 0$. Sea Σ una discontinuidad $\Sigma = \{(x,t) : x = \hat{x}(t)\}$, $\hat{x} \in C^1(\mathbb{R})$. $\sigma := d\hat{x}/dt$. Se dice que u satisface la condición de entropía de Lax sobre Σ si

$(L) \cdots \quad f'(u_R) \leq \sigma \leq f'(u_L)$ sobre cada punto de Σ.

(u_L, u_R son los límites a cada lado de Σ sobre cada punto de Σ).



__Def:__ Una solución débil $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ de una ley de conservación se denomina __entrópica__ si en cada eventual discontinuidad Σ se cumple la condición de entropía de Lax.

Ejemplo: un frente plano que cumple la condición de entropía de Lax se llama __onda de choque__.

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2}t \\ 0, & x > \frac{1}{2}t \end{cases}$$ onda de choque

$u_L = 1, \quad u_R = 0, \qquad f(u) = \frac{1}{2}u^2$

$f'(u) = a(u) = u$

$\sigma = \frac{1}{2} \qquad f'(u_R) = 0 < \sigma = \frac{1}{2} < f'(u_L) = 1$

Def. Un frente discontinuo de la forma

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < \sigma t \\ u_R, & x > \sigma t \end{cases} = \varphi(x - \sigma t)$$

con $u_L \neq u_R$, constantes, tal que

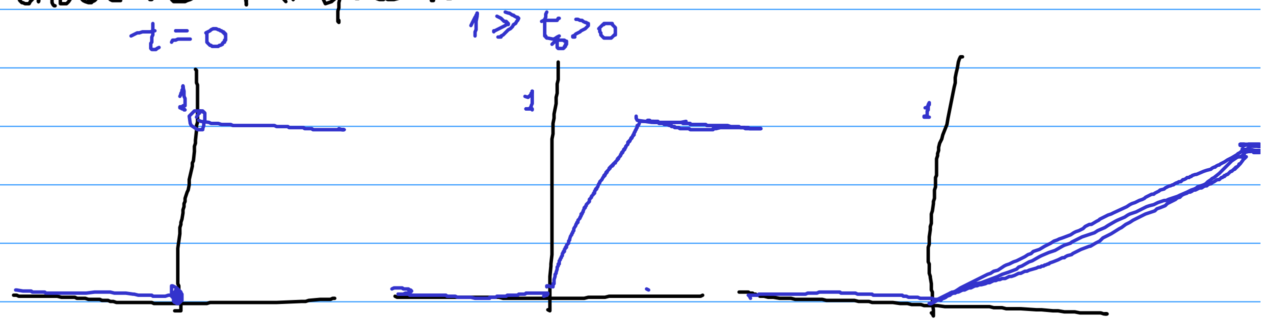
$$\text{(RH)}: \qquad \sigma = \frac{[\![f(u)]\!]}{[\![u]\!]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

que además satisface la condición de entropía de Lax,

$$f'(u_R) \leq \sigma \leq f'(u_L)$$

se denomina <u>onda de choque</u>.

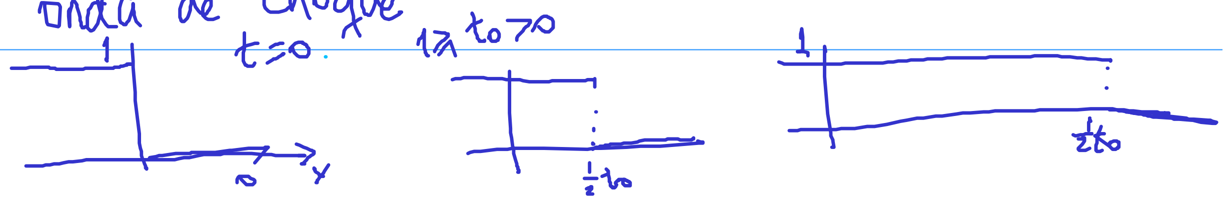
Onda de rarefacción



$$0 < \frac{x}{t_0} \leq 1$$

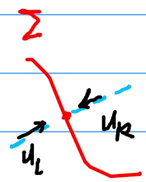
$$0 < x \leq t_0$$

onda de choque



Observaciones :

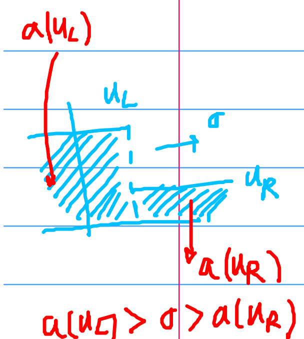
(A) $\quad I[u_L, u_R] = \begin{cases} [u_L, u_R], & u_R > u_L \\ [u_R, u_L], & u_L > u_R \end{cases}$

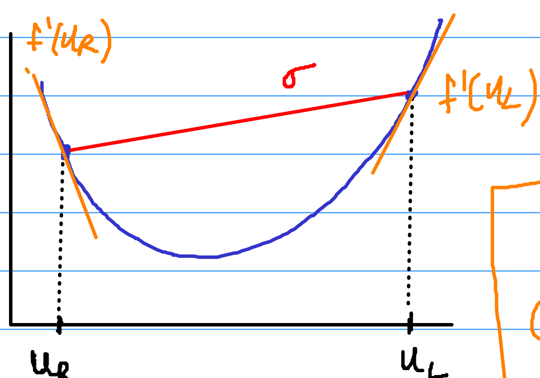


Si $f = f(u)$ no tiene puntos de inflexión en $I[u_L, u_R]$ entonces la desigualdad es necesariamente estricta :

$$f'(u_R) < \sigma < f'(u_L)$$

$f''(u) \geq \delta_0 > 0 \quad \forall u \quad$ estrictamente convexa



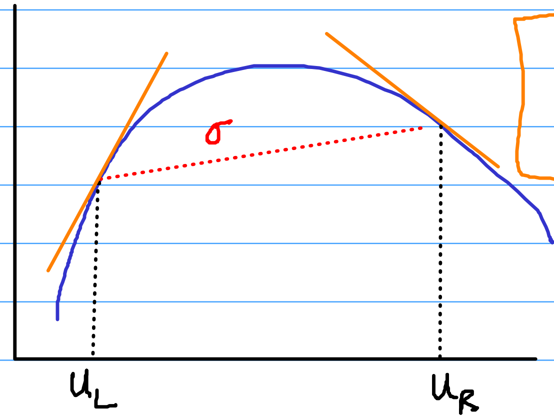


$\sigma = \dfrac{[\![f]\!]}{[\![u]\!]}$

$$\boxed{\begin{array}{c} f'(u_R) < \sigma < f'(u_L) \\ (\Rightarrow) \quad u_R < u_L \end{array}}$$

masa

f estrictamente cóncava $\quad f''(u) \leq -\delta_0 < 0 \quad \forall u$



$$\boxed{\begin{array}{c} f'(u_R) < \sigma < f'(u_L) \\ (\Rightarrow) \quad u_L < u_R \end{array}}$$

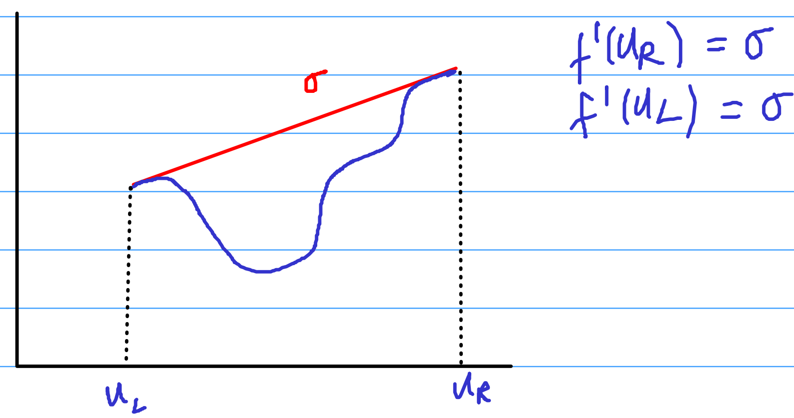
f convexa (estrictamente) :

$$\text{Lax} \iff u_R < u_L$$

f cóncava (estrictamente) :

$$\text{Lax} \iff u_R > u_L$$

(B) El caso $\sigma = f'(u_R)$ ó $f'(u_L)$ puede ocurrir sólo si $f'' = 0$ en algún punto del intervalo $I[u_L, u_R]$.



Si $\sigma = f'(u_L)$ ó $f'(u_R)$ la onda se llama "sónica". Onda de choque degenerada o no clásica.

"Modo convexo" : • $f'' \geq \delta_0 > 0 \quad \forall u$

ó • $f'' \leq -\delta_0 < 0 \quad \forall u$

Condición de entropía de Oleinik :

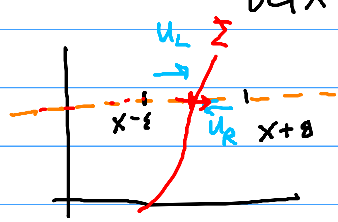
Sea $f \in C^2$, $f'' \geq \delta_0 > 0$ $\forall u$. Se dice que u solución débil de $u_t + f(u)_x = 0$ satisface la condición de entropía de oleinik si $\exists$ $C > 0$ uniforme tal que $\forall a > 0$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ se cumple

$$u(x+a,t) - u(x,t) < \frac{Ca}{t} \quad \dots (0)$$

Lema Si $f'' \geq \delta_0 > 0$ entonces la condición de Oleinik implica la condición de Lax.

Demostración Sea $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ un punto de discontinuidad de u. Por oleinik (0) : $\forall \varepsilon > 0$

$$u(x+\varepsilon,t) - u(x-\varepsilon,t) < \frac{2C\varepsilon}{t}$$



$a = 2\varepsilon$

Tomando $\lim \varepsilon \to 0^+$

$$u_R - u_L < 0$$

$\underset{f \text{ convexa}}{\iff}$ condición de Lax

$\square$

Próxima lección : contracción L^1 unicidad.