Lección 2.1: Ecuación de onda en 1-d. El problema de Cauchy.

Ecuación de onda.

Una función $u = u(x,t)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t > 0$, es solución de la ecuación de onda si satisface

$$(1).- \qquad u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \qquad x \in \Omega, \quad t > 0$$

donde $c > 0$ es constante (velocidad de la onda) y $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u$ es el op. de Laplace.

(1) es una ec. homogénea. Ec. de onda no homogénea

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = h(x,t)$$

h - término de forzamiento.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto (puede ser $\Omega = \mathbb{R}^n$)

(1) está complementada por condiciones iniciales en $t = 0$:

$$(2)\cdots \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \Omega$$

donde f y g son conocidas. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$ entonces (1) y (2) se conoce como problema global de Cauchy.

Si Ω es acotado, o bien $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, entonces es necesario imponer condiciones de frontera:

$$(3)\begin{cases} u = a, & x\in\Gamma,\ t>0 \quad \text{(Dirichlet)} \\ \partial_n u = \nabla u\cdot\hat{n} = a, & x\in\Gamma,\ t>0 \quad \text{(Neumann)} \\ u+\alpha\nabla u\cdot\hat{n} = a, & x\in\Gamma,\ t>0 \quad \text{(Robin)} \end{cases}$$

o combinaciones, donde $a=a(x,t)$ es conocida, $\Gamma\subseteq\partial\Omega$, $\hat{n}$ - normal exterior en Γ.

Ejemplo: $u=u(x,t)$ desplazamiento de un medio continuo. Sea $D\subset\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, abierto, conexo, acotado con ∂D suave. Sea F la densidad de fuerza neta aplicada a un elemento $dS\subset\partial D$, si suponemos un medio homogéneo (densidad constante, $\rho(x,t)\equiv\rho_0>0$), por la 2a. ley de Newton

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_D \rho_0\, u(x,t)\,dx = -\int_{\partial D} F(x,t)\cdot\hat{n}\,dS_x$$

$$= -\int_D \mathrm{div}_x F(x,t)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_D \left(\rho_0 u_{tt} + \mathrm{div}_x F\right)dx = 0$$

D arbitrario y x teo. de localización

$n=1$
$n=2$

$$\rho_0 u_{tt} + \mathrm{div}_x F = 0$$

Mecánica medios continuos (s. XVIII)

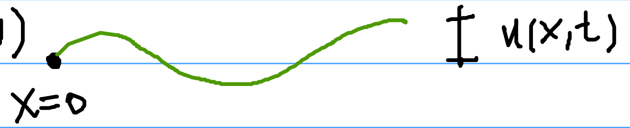
$F \approx -k^2\nabla u$

$$\Rightarrow \qquad u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \qquad c^2 = \frac{k^2}{\rho_0}$$

const.

Tarea 2: Derivación de la ec. (de onda) para el desplazamiento vertical de una cuerda elástica $(n=1)$, y una membrana elástica.

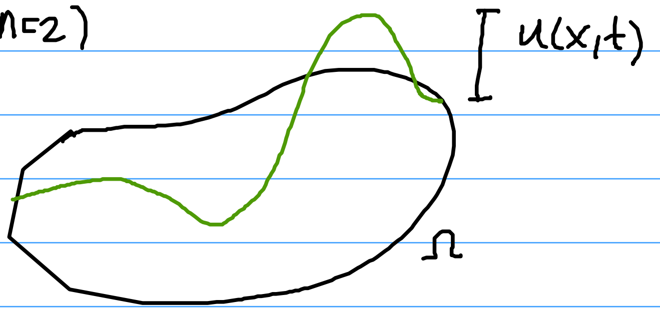
$(n=1)$



$x \in [0, \infty)$

cond. de frontera en $x=0$.

$(n=2)$



Ec. de onda para u + cond. de frontera.

Problema global de Cauchy en 1-d

Sea el problema:

(1) ... $\qquad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \ t > 0$

(2) ... $\qquad \begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$

con $c > 0$ constante, f, g conocidas.

(1)+(2) $\equiv$ problema de Cauchy para la ec. de onda homogénea.

Observación :

$$\square u := (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u$$

(operador de onda
o d'Alambertiano)

Definimos $w := u_t - cu_x$.
Si $u \in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ es solución de (1), (2)
entonces $w \in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$.

Por (2) : $w(x,0) = u_t(x,0) - cu_x(x,0)$
$= g(x) - cf'(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} w_t = \partial_t(u_t - cu_x) &= u_{tt} - c\,u_{xt} \\ &= u_{tt} - c\,u_{tx} \\ &= c^2u_{xx} - c\,u_{tx} \\ &= c\,\partial_x(cu_x - u_t) \\ &= -c\,w_x \end{aligned}$$

$\therefore$ w resuelve (3)..
$$\begin{cases} w_t + cw_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ w(x,0) = g(x) - cf'(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La solución de (3) es :

$$w(x,t) = g(x-ct) - cf'(x-ct).$$

El problema resultante para u es :

(4) ...
$$\begin{cases} u_t - cu_x = g(x-ct) - cf'(x-ct) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Por método de características, (4) es equivalente a resolver

$$(4')\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -c, & x(0) = \xi \\[2mm] \dfrac{dt}{d\eta} = 1, & t(0) = 0 \qquad (\Rightarrow t=\eta) \\[2mm] \dfrac{du}{dt} = g(x-ct) - cf'(x-ct), & u(0) = f(\xi) \end{cases}$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \quad x = -ct + \xi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = g(\xi - 2ct) - cf'(\xi - 2ct)$$

$$u(0) = f(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Integrando :

$$u(t) = f(\xi) + \int_0^t g(\xi - 2cs)\, ds - c\int_0^t f'(\xi - 2cs)\, ds$$

$$= f(\xi) + \frac{1}{2} f(\xi - 2ct) - \frac{1}{2} f(\xi) +$$

$$- \frac{1}{2c} \int_{\xi}^{\xi - 2ct} g(y)\, dy$$

(con $y = \xi - 2cs$). Sustituyendo $x = \xi - ct$:

$$(5)\ldots\ u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$$

Fórmula de d'Alembert

Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ entonces $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ y es solución del problema de Cauchy (1)-(2). De hecho $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

<u>Lema</u> Si $f \in C^2$, $g \in C^1$ entonces u def. en (5) es solución de (1) y (2) y $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$

Interpretación geométrica.

(5) $\Rightarrow$ para $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ <u>fijo</u>, $u = u(x,t)$ depende únicamente de los valores de f y g en el intervalo $[x-ct, x+ct]$

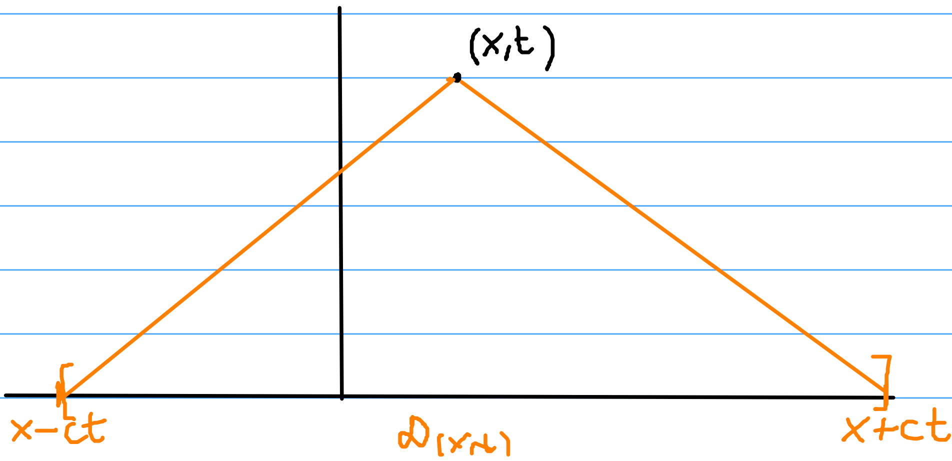
$$\langle g \rangle := \frac{1}{2ct} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$$

(5) $\Rightarrow$ $u(x,t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{promedio de } f \\ \text{en } x-ct \text{ y en} \\ x+ct \end{array} \right\} + t \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{promedio de } g \\ \text{en } [x-ct, x+ct] \end{array} \right\}$

Dominio de dependencia :

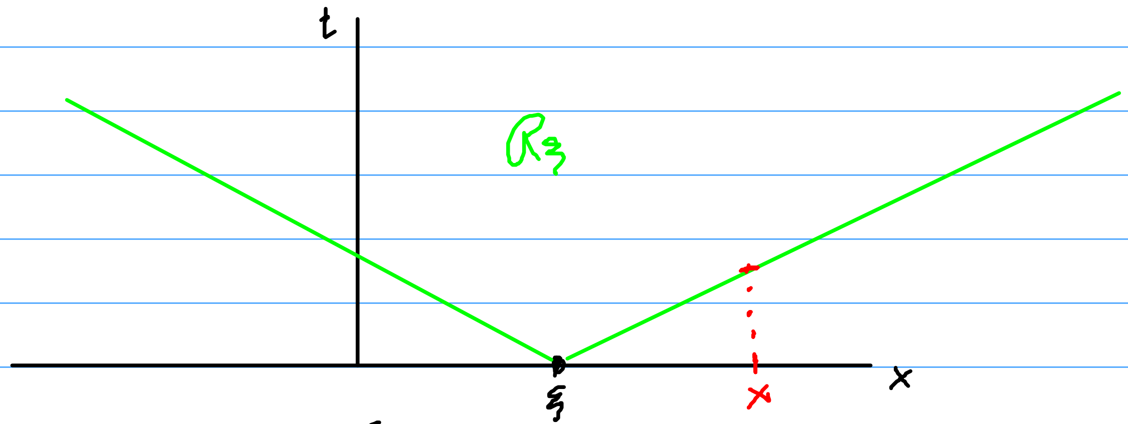
$$D_{(x,t)} := [x-ct, x+ct] \subset \mathbb{R}$$

. .



Análogamente, $\xi \in \mathbb{R}$ arbitrario "influye" en la solución $u = u(x,t)$ si y sólo si $\xi \in \mathcal{D}(x,t)$.

$$\mathcal{R}_\xi := \{ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) : \xi - ct \leq x \leq \xi + ct \}$$



una perturbación localizada en $\xi \in \mathbb{R}$ afectará el valor de la solución u en la posición $x \in \mathbb{R}$ sólo a partir del tiempo $t = \frac{|x-\xi|}{c} > 0$.

La ecuación de onda tiene una estructura bicaracterística:

$$\begin{cases} x(t) = ct + \xi \\ x(t) = -ct + \xi \end{cases}$$

De hecho, u es la superposición de dos ondas viajeras:

$$(6) \cdots \quad u(x,t) = \underbrace{V(x+ct)}_{\substack{\text{onda a la izq. con} \\ \text{vel. } -c \\ \leftarrow}} + \underbrace{W(x-ct)}_{\substack{\text{onda a la der. con} \\ \text{vel. } +c \\ \rightarrow}}$$

donde

$$V(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) + \frac{1}{2c}\int_0^{\xi} g(y)\, dy$$

$$W(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) - \frac{1}{2c}\int_0^{\xi} g(y)\, dy$$

Inversamente, si u es de la forma (6) entonces

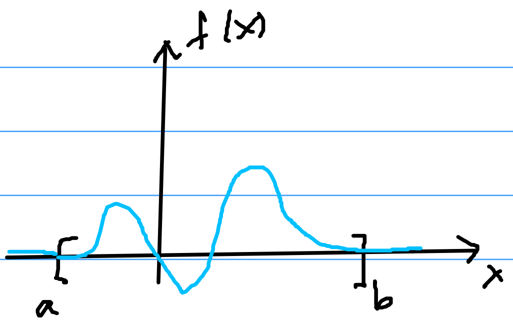
$$u_{tt} = c^2 V''(x+ct) + c^2 W''(x-ct)$$

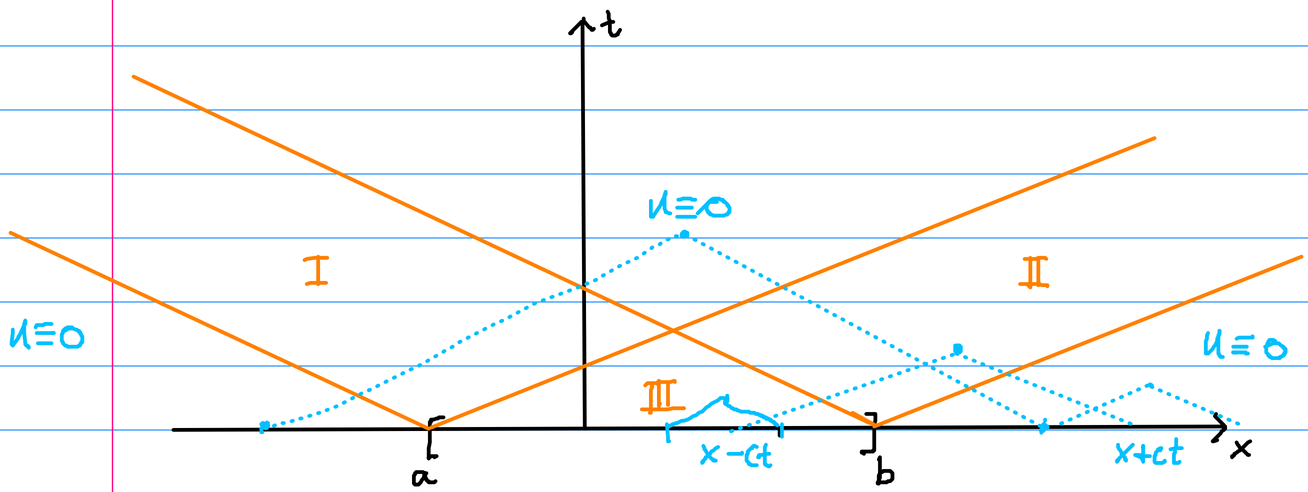
$$u_{xx} = V''(x+ct) + W''(x-ct)$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

<u>Lema</u> $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución de la ec. de onda homogénea (1) si y sólo si u es de la forma (6) con $V, W \in C^2(\mathbb{R})$.

Ejemplo: Sean $g(x) \equiv 0$, y f está soportada en $[a,b]$.





(III) $u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct)$

$a < x-ct < x+ct < b$

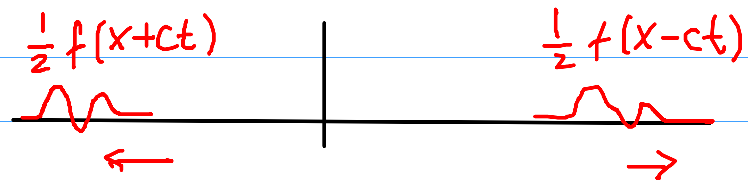
(II) $u(x,t) = \frac{1}{2} f(x-ct)$ onda que viaja hacia la der.

$a < x-ct < b < x+ct$

(I) $u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct)$ onda hacia la izq.

$x-ct < a < x+ct < b$

Para $t \gg 1$ largo



Regularidad

Si $f \in C^2, g \in C^1 \Rightarrow u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$

Pero (6) tiene sentido si f es continua y g es acotada por ejemplo.

Suponiendo $u \in C^2$, u, u_t continuas en $t \geq 0$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$, es solución de (1), (2).

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Mult. (1) por φ e integrando:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \varphi (u_{tt} - c^2 u_{xx}) \, dx \, dt = 0.$$

Integrando por partes:

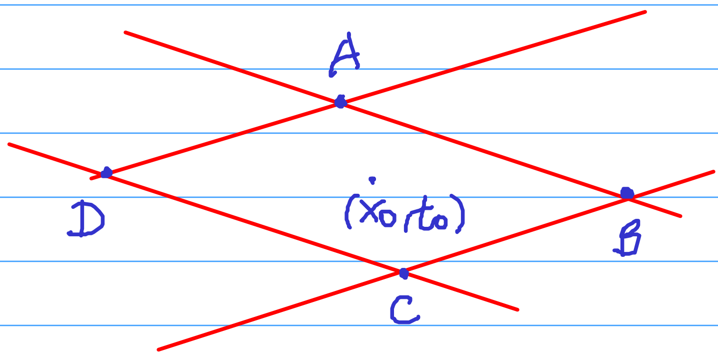
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u \, dx dt +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x,0) - g(x) \varphi_t(x,0) \, dx = 0 \quad \cdots (7)$$

Definición Sea $f \in C(\mathbb{R})$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada. $u \in C(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es solución débil de (1) y (2) si se cumple (7) para toda función de prueba $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Lema Si $f \in C$, g acotada entonces la fórmula de d'Alembert (5) es solución débil de (1)-(2).

Dem. Ejercicio. $\square$

Sea $\mathcal{R}$ un paralelogramo característico: sus lados son rectas características con pendiente $\pm c$, vértices A, B, C, D.



Teorema Sea $u \in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))$. Entonces:

u es solución de $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ si y sólo si

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

$\forall\, \mathcal{R}$ paralelogramo característico, $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Dem. "$\Rightarrow$" u solución de $\Box u = 0$

$\Rightarrow$ $u(x,t) = V(x+ct) + W(x-ct)$ con $V, W \in C^2$.

Sea (x_0, t_0) el centro de $\mathcal{R}$, $t_0 > 0$.
Si $A = (x_0 + h, t_0 + k)$, con $h, k \in \mathbb{R}$, entonces $C = (x_0 - h, t_0 - k)$.

$\overline{CB} \cap \overline{AB}$ en B:
$$\tilde{x} - (x_0 - h) = c(\tilde{t} - (t_0 - k))$$
$$\tilde{x} - (x_0 + h) = -c(\tilde{t} - (t_0 + k))$$

$$\Rightarrow B = \left(x_0 - ck,\ t_0 - \frac{h}{c}\right)$$

$$D = \left(x_0 + ck,\ t_0 + \frac{h}{c}\right)$$

Evaluando u :

$$u(B) + u(D) = V\left(x_0 - ck + c\left(t_0 - \frac{h}{c}\right)\right) +$$

$$+ W\left(x_0 - ck - c\left(t_0 - \frac{h}{c}\right)\right) +$$

$$+ V\left(x_0 + ck + c\left(t_0 + \frac{h}{c}\right)\right) +$$

$$+ W\left(x_0 + ck - c\left(t_0 + \frac{h}{c}\right)\right)$$

$$= u(C) + u(A).$$

"$\Leftarrow$" Ejercicio : $u \in C^2$ expansión en serie de Taylor, tomar lím cuando $h, k \to 0$:

$$\left(u_{tt} - c^2 u_{xx}\right)\Big|_{(x_0, t_0)} = 0.$$

$$\therefore \ \Box u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

$\square$