Lección 2.2: Principio de Duhamel. Problemas con valores en la frontera

Principio de Duhamel

Ec. de onda (unidimensional) no homogénea; problema global de Cauchy:

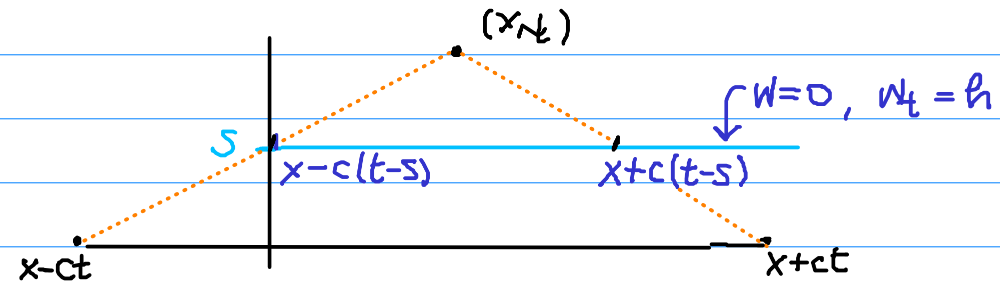
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad \cdots (1) \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$h = h(x,t)$ función conocida (término de forzamiento, no homogeneidad).

Idea: encontrar una solución particular de (1), a partir de soluciones de la ec. homogénea con "condiciones iniciales" en en un tiempo $0 \leq s \leq t$.

Sea $0 \leq s < t$, fijo. Sea $w = w(x,t,s)$ la solución a $\square w = w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$ con "condiciones iniciales" en $t = s$:

$$w(x,s,s) = 0, \qquad w_t(x,s,s) = h(x,s), \qquad x \in \mathbb{R}$$



por d'Alembert, la solución de

$$(3) \ldots \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > s \geq 0 \\ w(x,s,s) = 0 & x \in \mathbb{R} \\ w_t(x,s,s) = h(x,s) \end{cases}$$

es:

$$w(x,t,s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s)\, dy \qquad \ldots (4).$$

Observamos:

- $w(x,s,s) = 0$
- $w(x,t,t) = 0$
- $w_t(x,t,s) = \frac{1}{2} h(x+c(t-s),s) + \frac{1}{2} h(x-c(t-s),s)$

$$\Rightarrow \quad w_t(x,s,s) = h(x,s)$$
$$w_t(x,t,t) = h(x,t)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s < t.$

Lema $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ y $0 \leq s < t$, sea $w = w(x,t,s)$ la solución a (3) (fórmula (4)). Entonces,

$$u(x,t) := \int_0^t w(x,t,s)\, ds \qquad \ldots (5)$$

es solución de (1), con $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$.

Demostración: Calculando

$$u_t = \int_0^t w_t(x,t,s)\, ds + \underbrace{w(x,t,t)}_{=0}$$

$$u_{tt} = \int_0^t w_{tt}(x,t,s)\, ds + \underbrace{w_t(x,t,t)}_{= h(x,t)}$$

$$u_{xx} = \int_0^t w_{xx}(x,t,s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad u_{tt} - c^2 u_{xx} = \int_0^t \underbrace{(w_{tt} - c^2 w_{xx})}_{=0,\ \times (3)}(x,t,s)\, ds + h(x,t).$$

Además, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$

$\square$

Principio de superposición: la ec. es lineal

$$\Rightarrow \text{solución} = \left\{ \begin{matrix}\text{núcleo de } \square \\ \text{d'Alembert}\end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix}\text{sol. parti-} \\ \text{cular}\end{matrix} \right\}$$

<u>Lema</u> Sean $f \in C^2$, $g \in C^1$, $h \in C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Entonces

$$(6) \cdots \quad u(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s)\, dy\, ds$$

$$=: u_H(x,t) + u_p(x,t)$$

es de clase $C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, y es solución de (1) - (2).

Dem. Por lema y d'Alembert:

$$\Box u = \Box(u_H + u_p) \underset{\downarrow}{=} \underbrace{\Box u_H}_{=0} + \underbrace{\Box u_p}_{=h} = h.$$

$\Box$ es lineal

$$\partial_t u_H(x,0) = g(x), \qquad \partial_t u_p(x,0) = 0$$
$$u_H(x,0) = f(x), \qquad u_p(x,0) = 0$$

$\therefore$ u resuelve (2).

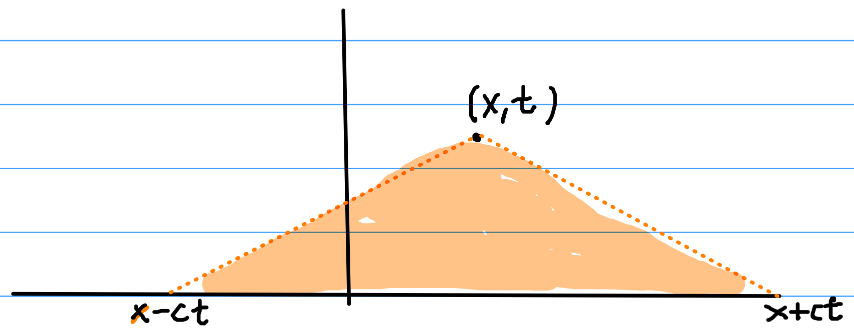
$f \in C^2, g \in C^1 \Rightarrow u_H \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$

$h \in C^1 \Rightarrow u_p \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

$\square$

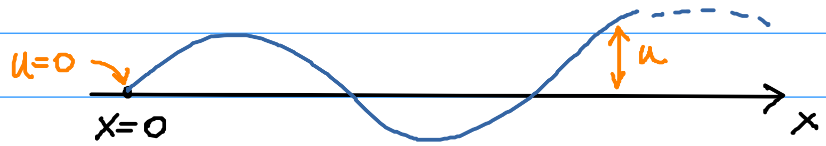
Dominio de dependencia:

$$\mathcal{D}_{(x,t)} = \left\{ (y,s) \in \mathbb{R} \times [0,t] : x - c(t-s) \leq y \leq x + c(t-s) \right\}$$



Problemas con valores de frontera

Método de reflexión: cuerda elástica en 1d sujeta de un extremo.



$x \in [0,\infty)$

$$(7) \cdots \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0,\infty), \quad t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,\infty) \\ u_t(x,0) = g(x), & \\ u(0,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

Condición de compatibilidad: $f(0) = g(0) = 0$ $\quad \cdots (8)$

Método de reflexión:

Extender de manera impar, f, g y u a $x \in (-\infty, 0)$:

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t), & x \geq 0, \ t>0 \\ -u(-x,t), & x<0, \ t>0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x<0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x<0 \end{cases}$$

Nuevo problema:

$$(9) \ldots \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x) & \\ \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x) & , \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

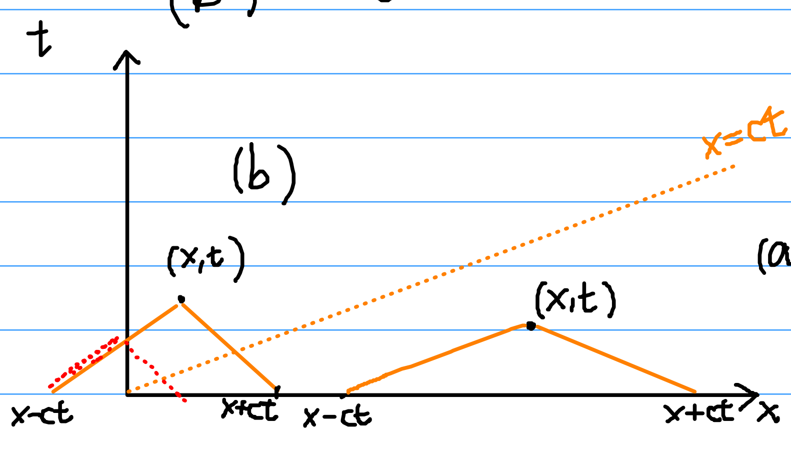
Solución (d'Alembert):

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\tilde{f}(x+ct) + \frac{1}{2}\tilde{f}(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(y)\, dy \qquad \cdots (10)$$

W.l.o.g. $c>0$.

casos: (a) $x > ct > 0$

(b) $ct > x \geq 0$



(a) $\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\, dy$

$x > ct$

(b) $\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) - \frac{1}{2} f(ct-x) +$

$x<ct$

$$+ \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(y)\,dy \; + $$

$$- \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} g(-y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2} f(x+ct) - \frac{1}{2} f(ct-x) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(y)\,dy.$$

Lema Sean $f \in C^2((0,\infty)) \cap C([0,\infty))$
$g \in C^1((0,\infty)) \cap C([0,\infty))$

tales que $f(0) = g(0) = 0 = f''(0)$

$$f''(0) = \lim_{x \to 0^+} f''(x).$$

Entonces:

$$(11) \cdots \quad u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy, & \text{si } x>ct,\ t>0 \\[2ex] \frac{1}{2} f(ct+x) - \frac{1}{2} f(ct-x) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x} g(y)\,dy & \text{si } 0<x\leq ct \end{cases}$$

es de clase $C^2((0,\infty)\times(0,\infty)) \cap C^1((0,\infty)\times[0,\infty))$, y es solución de (7).

Dem. La fórmula para $x>ct$ resuelve $\Box u=0$.
Si $0<x<ct$ entonces

$$u_{tt} = \frac{c^2}{2}\left(f''(ct+x) - f''(ct-x)\right) + $$
$$+ \frac{c}{2}\left(g'(ct+x) - g'(ct-x)\right)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{2}\left(f''(ct+x) - f''(ct-x)\right) + $$
$$+ \frac{1}{2c}\left(g'(ct+x) - g'(ct-x)\right)$$

$\Rightarrow$ $\Box u = 0$ en $0<x<ct$.

De (11) tomando $\lim$ $x\to ct^{\pm}$ se obtiene

$$\frac{1}{2}f(ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{2ct} g(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ u es continua en $x>0$, $t>0$.

$f\in C^2$, $g\in C^1$ $\Rightarrow$ $u\in C^1$ en $x>ct>0$
" " $0<x<ct$

calculando $u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, u_{tx}$ en el $\lim$ $x\to ct^{\pm}$ se obtiene el mismo límite ya que $f''(0)=0$. (ejercicio)

$\therefore$ $u\in C^2$ en $x>0$, $t>0$.

Además por inspección $\lim\limits_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$

$\therefore$ $u\in C^1\left([0,\infty)\times[0,\infty)\right)$ $\lim\limits_{t\to 0^+} u_t(x,t) = g(x)$

$\Box$

Interpretación de la fórmula (11):

(A) En el caso (a), $x > ct$, el dom. de dependencia de la solución

$$\mathcal{D}(x,t) = [x-ct, x+ct] \subset [0,\infty)$$

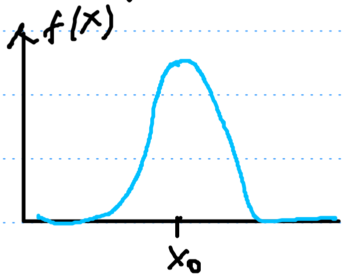
En el caso (b), $0 < x < ct$,

$$\mathcal{D}(x,t) = [ct-x, ct+x] \subset [0,\infty)$$

(B) Ejemplo: sea $g(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \geq 0$.

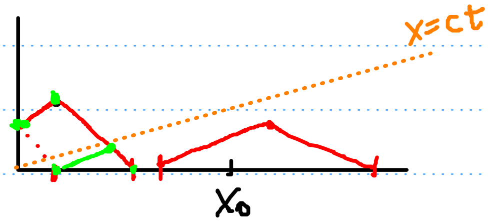
$$f(x) = A \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-x_0)^2/\sigma^2\right), \qquad x_0 > 0 \text{ fijo}$$

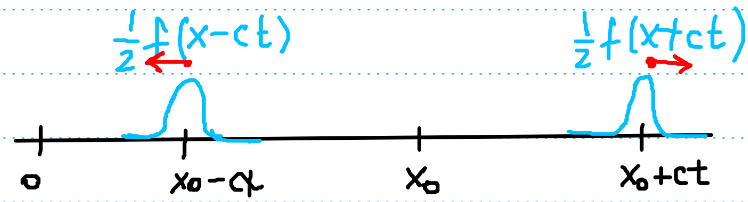
$\sigma^2 \ll 1$



Para tiempos cortos: $0 < t < \frac{x_0}{c} - \varepsilon(\sigma^2)$ la solución es esencialmente d'Alembert

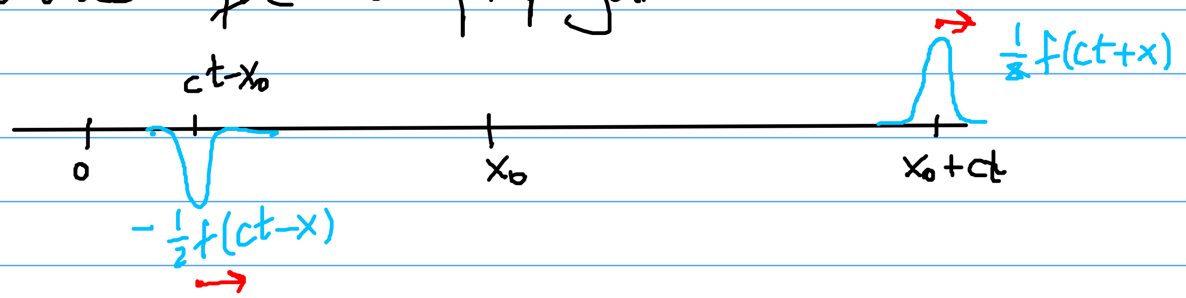
$$u = \tfrac{1}{2} f(x+ct) + \tfrac{1}{2} f(x-ct), \qquad x > ct$$

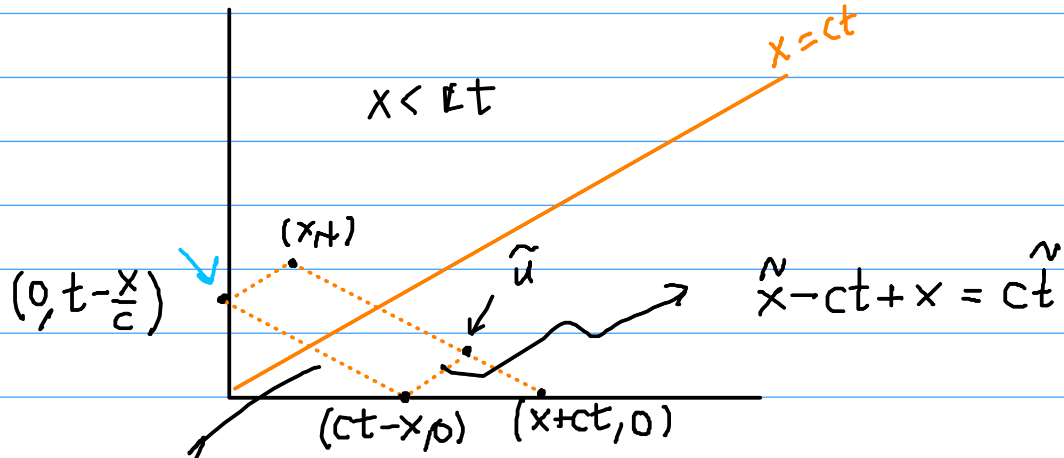




En $t = x_0/c$ la onda que viaja hacia la izq. se "refleja" en la condición de frontera en $x=0$.

Para $t > x_0/c + \varepsilon(\sigma^2)$, la solución son dos ondas que se propagan a la derecha:





$$\tilde{x} = -c\left(\tilde{t} - t + \frac{x}{c}\right)$$

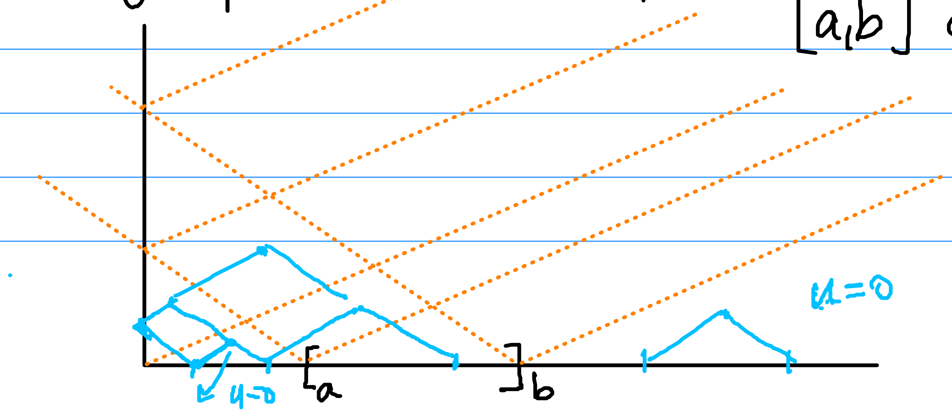
$$\tilde{t} = 0 \Rightarrow \tilde{x} = ct - x$$

$$u(x,t) = -u(ct-x,0) + \overbrace{u\left(0,t-\frac{x}{c}\right)}^{=0} + \frac{1}{2}f(ct-x) + \frac{1}{2}f(x+ct) \qquad (g\equiv 0)$$

$\downarrow$

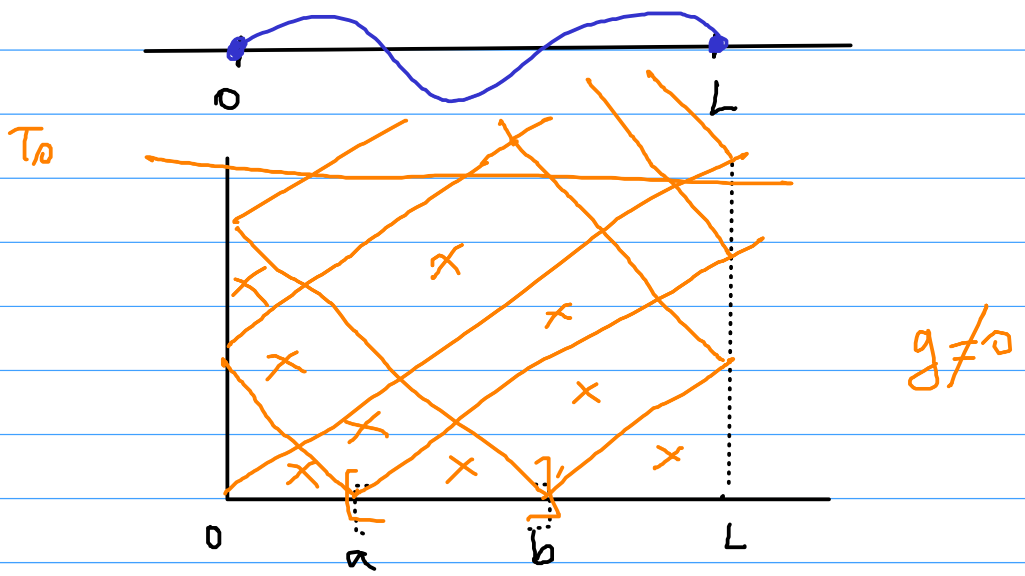
teorema del rombo carac. $\Rightarrow u(x,t) = -\frac{1}{2}f(ct-x) + \frac{1}{2}f(ct+x).$

(c) Ejemplo: $g\equiv 0$, f con soporte en $[a,b] \subset (0,\infty)$



Dominio finito: $L>0$ fijo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x\in [0,L],\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = g(x), & \\ u(0,t) = 0 & \\ u(L,t) = 0 & \end{cases}$$



Próxima lección: separación de variables.