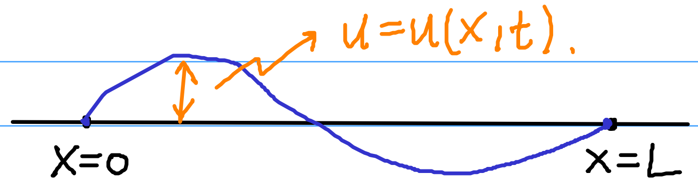
Lección 2.3: Separación de variables. Fórmula de Green-Lagrange.

## Separación de variables.

$$(1)\ldots \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in [0,L],\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), & \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

(1) modela la cuerda vibrante, sujeta en $x=0$, $x=L$.




condiciones de compatibilidad :

$$(2)\ldots \qquad f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0.$$

Buscamos soluciones de la forma (ansatz) :

$$u(x,t) = v(x)w(t) \qquad \ldots (3)$$
$$x \in [0,L],\ t>0$$

$(1) \Rightarrow \quad v(0) = v(L) = 0.$

$(1) \Rightarrow \quad 0 = v(x)w''(t) - c^2 v''(x) w(t)$

Suponemos $v(x)w(t) \not\equiv 0$ :

$$\underbrace{-\frac{v''(x)}{v(x)}}_{\text{función de } x} = \underbrace{-\frac{w''(t)}{w(t)}\frac{1}{c^2}}_{\text{función de } t} =: \lambda$$

$\therefore \quad \lambda$ es una constante.

(3) $\Rightarrow \quad w''(t) + \lambda c^2 w(t) = 0, \quad t > 0 \quad \cdots (4)$

EDO para $w$

(3) $\Rightarrow \quad \begin{cases} -v''(x) = \lambda v(x) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}, \quad x \in [0, L] \quad \cdots (5)$

EDO para $v$ (problema de valores propios)

Casos:

(i) $\lambda = 0 \Rightarrow v = A + Bx \underset{v(0) = v(L) = 0}{\Rightarrow} A = B = 0$ sol. trivial

(ii) $\lambda < 0 \Rightarrow v = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} \Rightarrow A = B = 0$ ( " )

(iii) $\lambda = \mu^2 > 0 \Rightarrow v'' + \mu^2 v = 0$

$\Rightarrow v(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x.$

$\left.\begin{matrix} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = 0, \quad v(L) = A \sin(\mu L) = 0$

$\therefore$ A constante arbitraria

$\mu = \frac{k\pi}{L}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

Familia de soluciones

(6) $\cdots \quad v_k(x) = A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lambda_k := \mu_k^2 = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 > 0$$

sustituyendo en (4):

$$w''(t) + \lambda_k c^2 w(t) = 0, \quad t>0.$$

Solución general:

$$w_k(t) := B_k \cos(\mu_k c t) + C_k \sin(\mu_k c t) \quad \dots (7)$$
$$t>0$$

$B_k, C_k$ constantes, $k = 1, 2, \dots$

Familia:

$$(8)\dots \begin{cases} u_k(x,t) := v_k(x)\, w_k(t) \\ \qquad\qquad = \sin(\mu_k x)\left[a_k \cos(\mu_k c t) + b_k \sin(\mu_k c t)\right] \end{cases}$$

con $a_k, b_k$ constantes, $\mu_k = \frac{k\pi}{L}$, $k \in \mathbb{N}$

Cada solución $u_k$ se conoce como $k$-ésimo modo normal de vibración, ó $k$-ésimo armónico. onda estacionaria con frecuencia $k/2L$.

$$\square u_k = \partial_t^2 u_k - c^2 \partial_x^2 u_k \equiv 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

La solución general se obtiene superponiendo los armónicos:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k x)\left[a_k \cos(\mu_k c t) + b_k \sin(\mu_k c t)\right] \quad \dots (9)$$

Suponemos por el momento convergencia uniforme de la serie en (9).

$$\therefore \quad u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\mu_k x) = f(x), \qquad x \in [0,L]$$

$$u_t(x,0) = c\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k b_k \sin(\mu_k x) = g(x), \qquad ''$$

Serie de Fourier de $f, g$:

$$\times (2) \Rightarrow \quad \tilde{f}_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$

$$\tilde{g}_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx$$

$$\therefore \quad (10) \quad \begin{cases} a_k = \tilde{f}_k \\ b_k = \dfrac{1}{c\mu_k}\tilde{g}_k \underset{\downarrow}{=} \dfrac{L}{c\pi k}\tilde{g}_k \\ \qquad\qquad \mu_k = \dfrac{k\pi}{L} \end{cases}$$

candidato a solución:

$$(11) \ldots \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left[\tilde{f}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}ct\right) + \frac{L}{\pi c k}\tilde{g}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}ct\right)\right]$$

Para tener conv. unif. es necesario analizar qué pasa con $\tilde{f}_k$ y $\tilde{g}_k$ cuando $k \to \infty$.

**Lema** sean $f \in C^4([0,L])$, $g \in C^3([0,L])$ tales que

- $0 = f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$
- $g(0) = g(L) = 0$

Entonces:

$$|\tilde{f}_k| \leq \frac{C}{k^4}, \quad |\tilde{g}_k| \leq \frac{C}{k^3} \quad \dots (12)$$

para $C > 0$, $\forall k = 1, 2, 3, \dots$

Esbozo de prueba:

Integrando por partes y usando hipótesis

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{L}{k\pi}\right)^4 \int_0^L \frac{d^4 f}{dx^4}(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$$

(ejercicio)

$$\Rightarrow \quad |\tilde{f}_k| = \frac{2L^3}{(k\pi)^4} \left| \int_0^L \frac{d^4 f}{dx^4} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) dx \right|$$

$$\leq \frac{2L^4}{(k\pi)^4} \max_{[0,L]} \frac{d^4 f}{dx^4} \equiv \frac{C_f}{k^4}$$

Análogamente: cota para $\tilde{g}_k$ $\square$

Por (12):
$$\left|\tilde{f}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} ct\right)\right| \leq \frac{C}{k^4}$$

$$\left|\left(\frac{k\pi c}{L}\right) \tilde{f}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L} ct\right)\right| \leq \frac{C}{k^3}$$

$$\left|\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2 \tilde{f}_k \cos\left(\frac{k\pi}{L} ct\right)\right| \leq \frac{C}{k^2}$$

Lo mismo para los términos con $\tilde{g}_k$, y $\sin(\cdot\cdot)$. Por el criterio de comparación de Weierstrass:

la serie para $u$, así como las series de las derivadas de orden $\leq 2$ convergen uniformemente en $[0,L]\times[0,\infty)$.

Ejercicio: (11) es solución de (1), y es de clase $C^2([0,L]\times(0,\infty))$.

Observaciones:

(i) La frecuencia del modo fundamental es $\omega := \pi c/L$. Todos los modos tienen frecuencia un múltiplo de $\omega$ $\frac{k\pi c}{L}$. La cuerda de un violín produce tonos "armónicos".

(ii) Condiciones adicionales $f''(0) = f''(L) = 0$ garantizan que $u \in C^2$.

Ejemplo: Resolver

$$(*)\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x\in[0,\pi],\ t>0 \\ u(x,0) = \sin x, & x\in[0,\pi] \\ u_t(x,0) = \sin 2x & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

$L=\pi,\ c=1 \Rightarrow \mu_k = k \in \mathbb{N}$

Condiciones de compatibilidad (k2) se cumplen $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$.

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right]$$

$$u(x,0) = \sin x \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1, \quad a_k \equiv 0 \quad \forall k \geq 2$$

$$u_t(x,0) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_k \equiv 0 \quad \forall\, k \geq 3$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \sin x \cos t + \frac{1}{2}\sin 2x \sin 2t$$

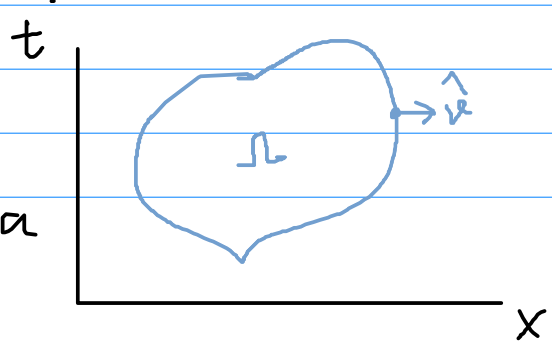
$\in C^2$ solución de $(*)$.

## Identidad de Green-Lagrange

Sea $u \in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ una solución de

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), \qquad \cdots (1)$$

con $c>0$, $h$ conocida. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}\times(0,\infty)$, acotado, con frontera $\partial\Omega$ suave por pedazos (el teorema de la divergencia es aplicable). $h$ es integrable en $\Omega$, por ejemplo, $h \in C^1(\bar{\Omega})$.




$\partial\Omega$ curva orientable

$\hat{\nu}$ normal ext. unitaria en $\partial\Omega$.

Integrando (1) en $\Omega$:

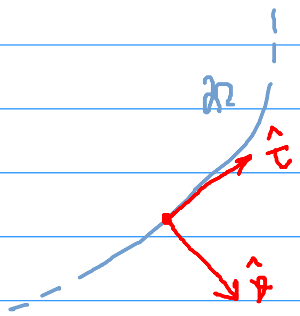
$$\int_\Omega h \, dx\, dt = \int_\Omega u_{tt} - c^2 u_{xx} \, dx\, dt$$

$$= \int_\Omega \mathrm{div}_{(x,t)} \begin{pmatrix} -c^2 u_x \\ u_t \end{pmatrix} dx\, dt$$

$$= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} -c^2 u_x \\ u_t \end{pmatrix} \cdot \hat{\nu} \, dS \qquad \ldots (2)$$

$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_x \\ \nu_t \end{pmatrix}$, $\quad |\hat{\nu}| = 1$

Si $\partial\Omega$ tiene una parametrización de la forma $\{ \tilde{x}(s), \tilde{t}(s) : s \in I \}$, entonces




$$\hat{t}(s) \parallel \begin{pmatrix} \tilde{x}'(s) \\ \tilde{t}'(s) \end{pmatrix}$$

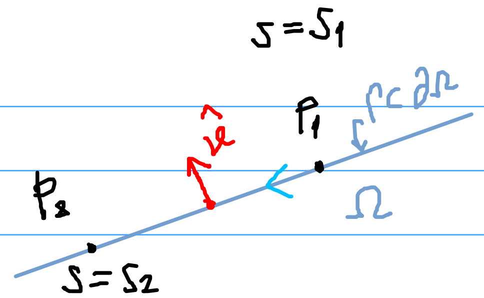
$$\hat{\nu}(s) \parallel \begin{pmatrix} \tilde{t}'(s) \\ -\tilde{x}'(s) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega h \, dx\, dt = -\int_I \frac{\left[ c^2 u_x \tilde{t}'(s) + u_t \tilde{x}'(s) \right]}{\sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{t}'(s)^2}} ds$$

Ejemplos:

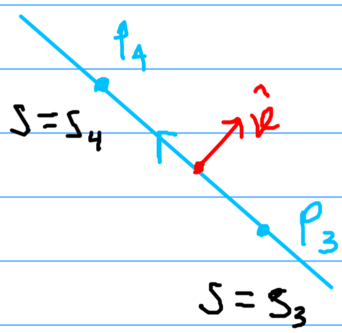
(a) Sea $\Gamma \subset \partial\Omega$, donde $\Gamma$ es una recta característica con pendiente $+c$:

$$\Gamma = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t})(s) = (cs + x_0, s + t_0) ; \; s \in [s_1, s_2] \right\}$$



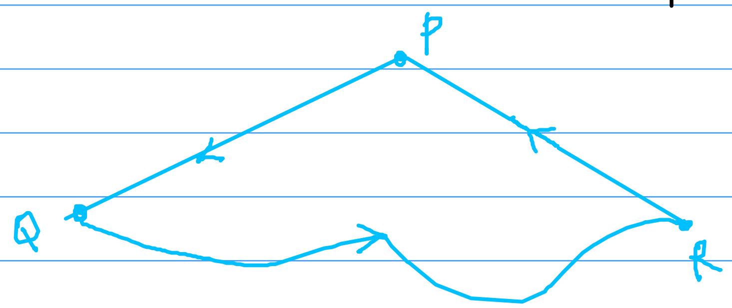

$$\Rightarrow \quad -\int_{P_1 \to P_2} \left(c^2 u_x \tilde{t}'(s) + u_t \check{x}'(s)\right)(s)\, ds \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ejercicio}}}{=} c\left(u(P_1) - u(P_2)\right)$$

(b) $\Gamma \subset \partial\Omega$ es recta característica con pendiente $-c < 0$




$$-\int_{P_3 \to P_4} c^2 u_x \tilde{t}' + u_t \check{x}' \quad ds = c\left(u(P_4) - u(P_3)\right)$$

(c) Sea $\Omega$ un dominio de la forma

$\Omega =$ 


$\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ son rectas características.

$\widetilde{QR}$ curva arbitraria.

Por la fórmula :

$$\int_{\Omega} h\,dx\,dt = -\int_{P \to Q} \left(c^2 u_x \tilde{t}' + u_t \tilde{x}'\right) ds$$

$$- \int_{Q \to R} c^2 u_x \tilde{t}' + u_t \tilde{x}' \, ds$$

$$- \int_{P \to R} c^2 u_x \tilde{t}' + u_x \tilde{x}' \, ds$$

$$= c\,(u(P) - u(Q)) + c\,(u(P) - u(R))$$

$$- \int_{Q \to R} u_t\,dx + c^2 u_x\,dt$$

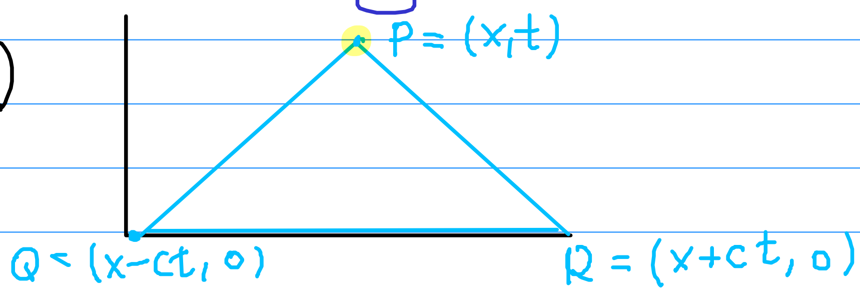
$$\Rightarrow u(P) = \frac{1}{2}\left(u(R) + u(Q)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{Q \to R} u_t\,dx + c^2 u_x\,dt \; +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{\triangle PQR} h(x,t) \qquad \dots (3)$$

Identidad de Green-Lagrange.

Ejemplo: (A)



$$GL_{(3)} \Rightarrow \quad u(P) = u(x,t)$$

$$= \frac{1}{2}\, u(Q) + u(R) \; +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{\overrightarrow{QR}} u_t\, dx + c^2 u_x\, dt$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{\triangle} h(x,t)$$

$$= \frac{1}{2} u(x-ct,0) + \frac{1}{2} u(x+ct,0) \; +$$

$$+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(y,0)\, dy$$

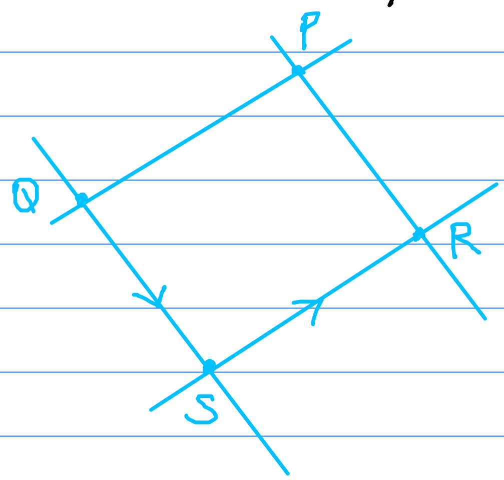
$$+ \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s)\, dy\, ds$$

Si $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ obtenemos la fórmula de Duhamel.

( $h \equiv 0$ d'Alembert )

(B)

$\Omega =$




PR, QS caract. $(-c)$

PQ, RS caract. $(+c)$

$$GL \Rightarrow \quad u(P) = \frac{1}{2}u(Q) + \frac{1}{2}u(R) + $$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{Q \to S \to R} u_t \, dx + c^2 u_x \, dt$$

$$+ \int_{\blacklozenge} h(x,t) \, dx \, dt$$

$$\int_{Q \to S} + \int_{S \to R} = c\left(u(Q) + u(R)\right) - 2c\, u(S)$$

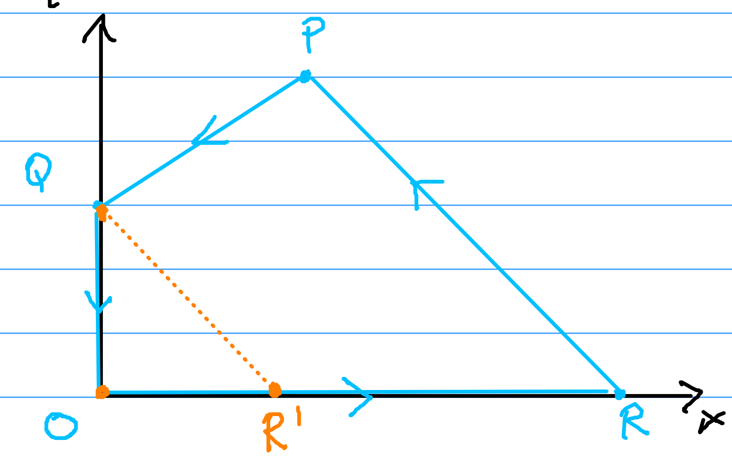
$$\therefore \quad u(P) = u(Q) + u(R) - u(S) +$$

$$+ \int_{\blacklozenge} h(x,t) \, dx\, dt.$$

Si $h \equiv 0 \Rightarrow$ teo. paralelogramo característico.

(c) Suponemos $h \equiv 0$ (ec. onda homogénea)

$\Omega =$



suponemos $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$
( $u$, $u_t$ conocidas en $\{t=0\}$ ).

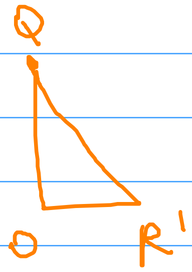
GL $\Rightarrow$

$$u(P)=\frac{1}{2}u(Q)+\frac{1}{2}u(R)+\frac{1}{2c}\int_{Q\downarrow O\to R} c^2u_x\,dt+u_t\,dx$$

En $\overline{QO}$ : $dx=0$
En $\overline{OR}$ : $dt=0$

$$\Rightarrow u(P)=\frac{1}{2}u(Q)+\frac{1}{2}u(R)+\frac{1}{2c}\int_{O\to R} u_t\,dx+$$
$$+\frac{1}{2c}\int_{Q\downarrow O} c^2u_x\,dt$$

término no conocido

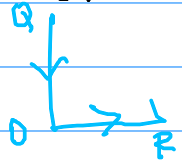
$\Omega =$ 


$$u(Q)=\frac{1}{2}u(R')+\frac{1}{2}u(Q)+\frac{1}{2c}\int_{Q\downarrow O} c^2u_x\,dt$$
$$+\frac{1}{2c}\int_{O\to R'} u_t\,dx$$

$$\Rightarrow u(P)=u(Q)+\frac{1}{2}u(R)-\frac{1}{2}u(R')+$$
$$+\frac{1}{2c}\int_{R'\to R} u_t\,dx$$

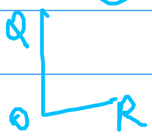
Si conocemos $u(Q)$ (p.ej. condición de frontera) y si dan condiciones iniciales $u, u_t = f, g$ en $t=0$ obtenemos $u(P)$.

$\Rightarrow$ no se pueden determinar arbitrariamente $u$ y $\partial_\nu u$ sobre

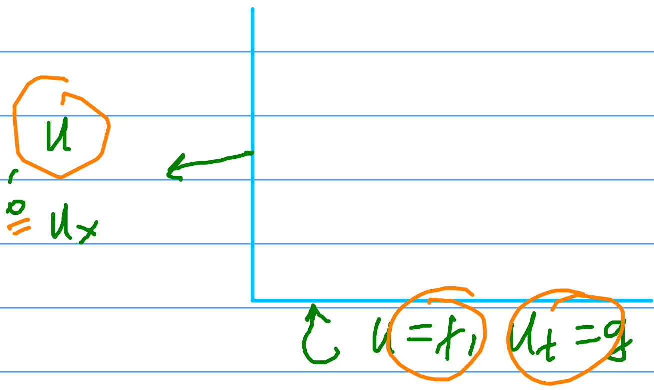


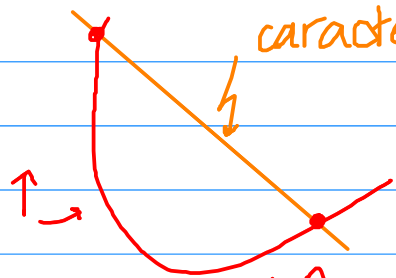

4 posibles

sólo 3 de las condiciones en las




son arbitrarias



característica.

$u, \partial_\nu u$ no son arbitrarios sobre $\Gamma$