Lección 2.5: Ecuación de onda en n dimensiones. Energía, unicidad. Medias esféricas.

Ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

(1) ... $u_{tt} - c^2 \Delta u = h, \qquad x \in \Omega, \quad t > 0$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, $h = h(x,t)$ conocida.
$h = 0 \Rightarrow$ (1) ec. de onda homogénea. $c > 0$ const.

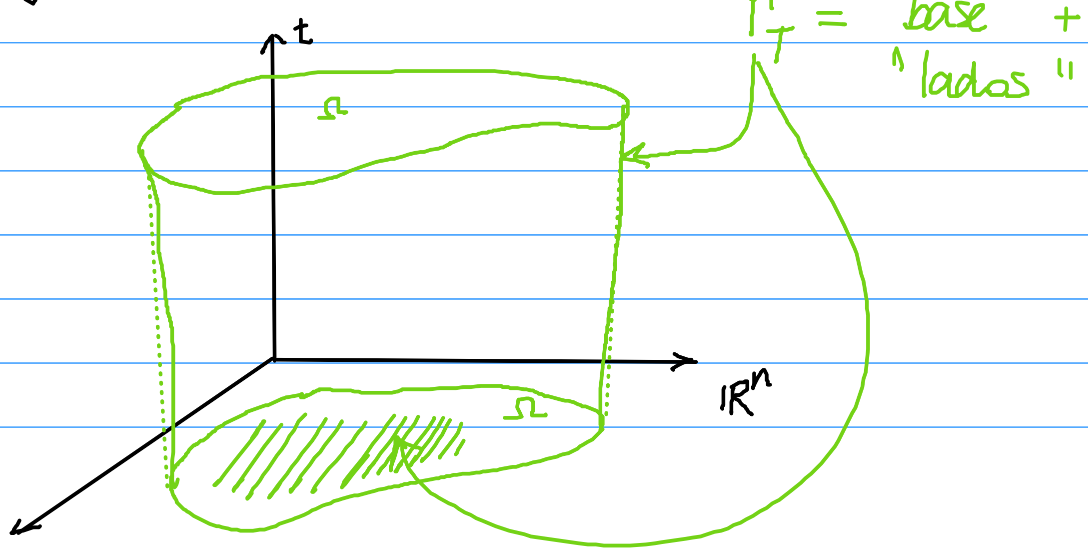
(1) + condiciones iniciales y/o condiciones de frontera

Energía y unicidad

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega$ es de clase C^1 por pedazos (orientable) $\therefore$ el teorema de la divergencia es aplicable.

Sea $T > 0$ arbitrario. Se definen:

$$\begin{cases} \Omega_T := \Omega \times (0,T] \subset \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T \end{cases}$$



Problema con valores iniciales + frontera:

$$(2)\quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = h, & (x,t) \in \Omega_T \\ u = f, & (x,t) \in \Gamma_T \\ u_t = g, & x \in \Omega,\ t = 0 \end{cases}$$

$c > 0$ const., $h \in C(\Omega_T; \mathbb{R})$, $f \in C^{k+1}(\Gamma_T; \mathbb{R})$, $g \in C^k(\Omega; \mathbb{R})$, $k \geq 1$, conocidas.

Nota: la condición $u = f$ en Γ_T incluye condición inicial para u en $t=0$ + condiciones de frontera tipo Dirichlet para u en $\partial\Omega \times (0,T)$.

$$\Gamma_T = \underbrace{\left(\Omega \times \{t=0\}\right)}_{\text{"base"}} \cup \underbrace{\left(\partial\Omega \times (0,T)\right)}_{\text{"lados"}}$$

Lema Si existe $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ solución de (2) entonces es única.

Demostración: Sean $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ dos soluciones de (2). Entonces por linealidad, $u := u_1 - u_2$ es de clase $C^2(\overline{\Omega}_T)$ y es solución de

$$(3)\quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & \text{en } \Omega_T \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma_T \\ u_t = 0, & \text{sobre } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Energía: $E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) dx$

$\forall\, t \in [0,T]$.

Derivando e integrando x partes:

$$\frac{dE}{dt} = \int_\Omega \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t\right) dx$$

$$= \int_\Omega u_t \underbrace{\left(u_{tt} - c^2 \Delta u\right)}_{=0 \text{ por } (3)} dx + \int_{\partial\Omega} c^2 u_t \nabla u \cdot \hat{\nu}\, dS_x$$

$$= c^2 \int_{\partial\Omega} u_t \nabla u \cdot \hat{\nu}\, dS_x$$

donde $\hat{\nu}$ es la normal ext. unitaria en $\partial\Omega$.

Por (3): $u(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)$

$\Rightarrow \quad u_t(x,t) = 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)$

$\therefore \frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E(t) = E(0) \quad \forall\, t \in [0,T]$
constante.

Pero $E(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t(x,0)^2 + c^2 |\nabla u(x,0)|^2 dx$

$= 0$

ya que:

- $u_t(x,0) \overset{(3)}{=} 0 \quad \forall\, x \in \Omega$,
- $u(x,0) \overset{(3)}{=} 0 \quad \forall\, x \in \Omega$

$\Rightarrow \nabla u\big|_{t=0} = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$.

$\therefore E(t) \equiv 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$

$\therefore \quad u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 = 0 \quad$ en Ω_T

$\Rightarrow \quad u$ es constante en $\overline{\Omega}_T$

Pero $u=0$ en Γ_T. Concluimos $u \equiv 0$ en $\overline{\Omega}_T$ (unicidad)

$\square$

observación: el método de energía se puede aplicar al caso en que la condición de frontera se sustituye por una condición tipo Neumann, por trozos, o tipo Robin:

$$\begin{aligned} u &= 0, && \text{en } \Gamma_1 \times (0,T) \\ \nabla u \cdot \hat{\nu} &= 0, && \text{en } \Gamma_2 \times (0,T) \\ \nabla u \cdot \hat{\nu} + \alpha u &= 0, && \text{en } \Gamma_3 \times (0,T), \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

con $\Gamma_j \subset \partial\Omega$. (Ejercicio).

Problema global de Cauchy:

$$(4) \therefore \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = h, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

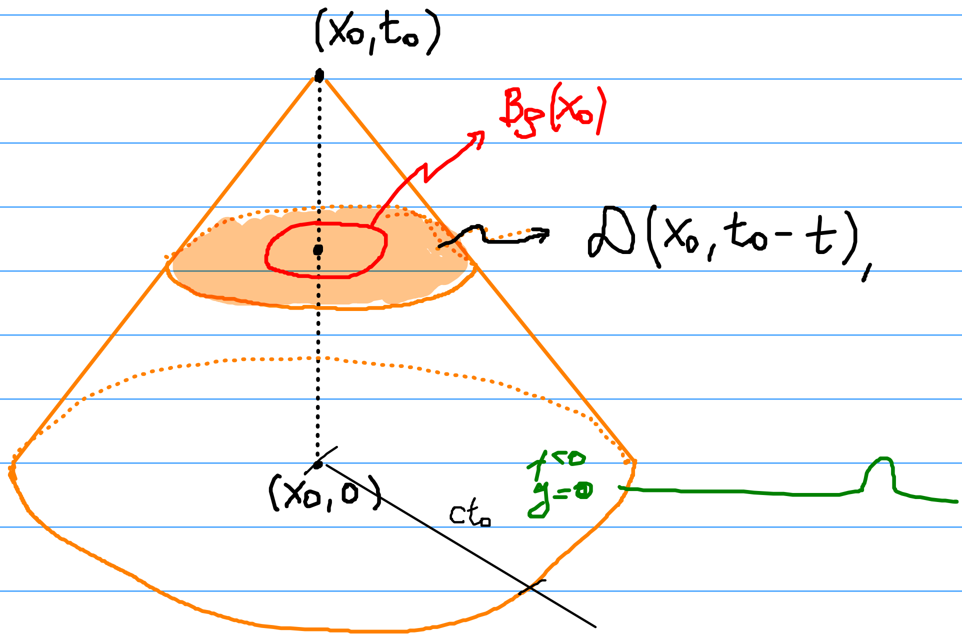
con $h = h(x,t)$, $h \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$
$f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$
conocidas.

Supongamos que $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ es solución de

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad t>0$$

Sea $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, fijo pero arbitrario.
Se define :

$$(5) \ldots \quad \mathcal{C}_{(x_0,t_0)} := \{ (x,t) : 0 \le t \le t_0, \ |x-x_0| \le c(t_0 - t) \}$$



$$\mathcal{D}(x_0, t_0 - t) := \{ (\tilde{x}, \tilde{t}) : (\tilde{x},\tilde{t}) \in \mathcal{C}_{(x_0,t_0)}, \ \tilde{t} = t_0 - t \}$$

Así : $\mathcal{D}(x_0, t_0) = \{ (\tilde{x},\tilde{t}) : \tilde{t} = t_0, \ |\tilde{x} - x_0| \le c(t_0 - \tilde{t}) = 0 \}$

$= \{ (x_0, t_0) \}$

$\mathcal{D}(x_0, 0) = \{ (\tilde{x},\tilde{t}) : \tilde{t} = t_0 - t \equiv 0, \ |\tilde{x} - x_0| \le c t_0 \}$

$t \to t_0^- \qquad = B_{ct_0}(x_0) \times \{ \tilde{t} = 0 \}$

Lema: Si $u = u_t \equiv 0$ en $\mathcal{D}(x_0, 0) = B_{ct_0}(x_0) \times \{t=0\}$ entonces $u \equiv 0$ en $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$.

Dem. Definimos la energía:

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}(x_0, t_0 - t)} \left(u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dx$$

Derivando:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^{c(t_0-t)} \int_{|x-x_0|=\rho} \left(u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dS_x \, d\rho \right)$$

$$= \int_{\mathcal{D}(x_0,t_0-t)} \left(u_t u_{tt} + c^2 \nabla u \cdot \nabla u_t \right) dx \; +$$

$$- \frac{c}{2} \int_{|x-x_0| = c(t_0-t)} \left(u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dS_x$$

int. x partes

$$= \int_{\mathcal{D}(x_0,t_0-t)} u_t \underbrace{\left(u_{tt} - c^2 \Delta u \right)}_{=0} dx \; +$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{D}(x_0,t_0-t)} c^2 u_t \nabla u \cdot \hat{\nu} \, dS_x$$

$$- \frac{c}{2} \int_{|x-x_0| = c(t_0-t)} \left(u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 \right) dS_x$$

$$= \int_{|x-x_0|=c(t_0-t)} c^2 u_t \nabla u \cdot \hat{\nu} - \frac{c}{2}\left(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2\right) dS_x$$

Estimando :

$$|c^2 u_t \nabla u \cdot \hat{\nu}| \leq |c^{1/2} u_t|\,|c^{3/2} \nabla u|$$
$$\leq \frac{1}{2} c u_t^2 + \frac{c^3}{2} |\nabla u|^2$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \int_{|x-x_0|=c(t_0-t)} \underbrace{\left(c^2 u_t \nabla u \cdot \hat{\nu} - \frac{c}{2}(u_t^2 + c^2|\nabla u|^2) \right)}_{\leq 0} dS_x$$

$\Rightarrow$ $E(t)$ es no creciente:

$$0 \leq E(t) \leq E(0) \qquad \forall\, t \in (0, t_0).$$

Pero $E(0) = 0$ ya que $u_t = 0$ en $t=0$, y $u=0$ en $t=0$ $\Rightarrow$ $\nabla u = 0$ en $t=0$.

concluimos que $E(t) \equiv 0$ $\forall$ $t \in [0, t_0]$.

u es constante en $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$.
$u=0$ en $t=0$

$$\Rightarrow u \equiv 0 \text{ en } \mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$$

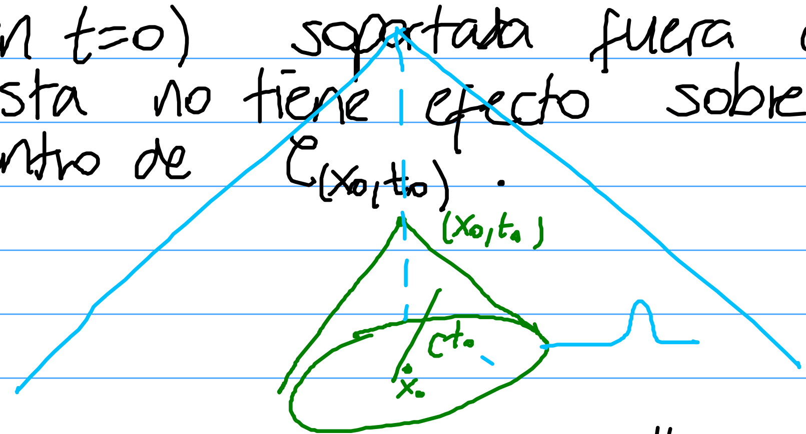
$\square$

Corolario 1 Si $f=g=0$ en $t=0$ y $h=0$ en $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$ entonces $u \equiv 0$ en $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$

Corolario 2 Si $\exists\ u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ solución al problema de Cauchy (4) entonces es única.

Observación:

(a) Si tenemos una condición inicial (en $t=0$) soportada fuera de $B_{ct_0}(x_0)$ ésta no tiene efecto sobre la solución dentro de $\mathcal{C}_{(x_0,t_0)}$.



Esto se conoce como "velocidad finita de propagación".

(b) Por el corolario 2, la solución al prob. de Cauchy es única.

Método de medias esféricas

Notación: ω_n = área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

p.ej. $\omega_2 = 2\pi$
$\omega_3 = 4\pi$, etc.

Área de esfera de radio $r>0$: $|\partial B_r(0)| = r^{n-1}\omega_n$

Volumen " " " : $|B_r(0)| = \dfrac{r^n \omega_n}{n}$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – funciones "localmente integrables en $\mathbb{R}^n$", $\int_K f\,dx \ \exists$ $\forall K \subset \mathbb{R}^n$, compacto.

$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r \}$$

bola abierta con centro en $x \in \mathbb{R}^n$, y radio $r>0$.

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se define la <u>media esférica</u> de f en $B_r(x)$ como:

$$F(x,r) := \fint_{\partial B_r(x)} f(y)\,dS_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\,dS_y$$

Promedio de f sobre $\partial B_r(x)$.

$$y = x + r\eta, \quad dS_y = r^{n-1}\,dS_\eta$$

$$\Rightarrow \quad F(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} f(x+r\eta)\,dS_\eta$$

integración en un dominio compacto

$$\therefore \lim_{r\to 0^+} F(x,r) = \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} f(x+r\eta)\,dS_\eta$$

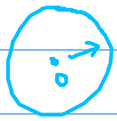
si f continua

$$= f(x)\,\frac{1}{\omega_n}\left(\int_{|\eta|=1} dS_\eta\right) = f(x)$$

Si además f es diferenciable

$$F_r = \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_{x_j}(x+r\eta) \, dS_\eta$$

$\partial B_1(0)$



$\eta = \hat{\nu}$ normal unitaria en $\partial B_1(0)$

$$\partial_{x_j} f(x+r\eta) = \frac{1}{r} \partial_{\eta_j} f(x+r\eta)$$

$$\partial^2_{x_j} f(x+r\eta) = \frac{1}{r^2} \partial^2_{\eta_j} f(x+r\eta)$$

$\therefore$

$$F_r = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_{x_j}(x+r\eta) \, dS_\eta$$

$$= \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \overset{\hat{\nu}\cdot\nabla_x}{(\nabla_\eta f \cdot \hat{\nu})} \, dS_\eta$$

$$\underset{\text{teo. divergencia}}{=} \frac{1}{r\omega_n} \int_{B_1(0)} \underbrace{\Delta_\eta f(x+r\eta)}_{r^2 \Delta_x f(x+r\eta)} \, d\eta$$

$$= \frac{r}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta_x f(x+r\eta) \, d\eta$$

$$= \frac{r}{\omega_n} \Delta_x \int_{B_1(0)} f(x+r\eta) \, d\eta \qquad (*)$$

En particular $\lim_{r \to 0^+} F_r(x,r) \underset{f \in C^2}{=} 0.$

$$(*) \Rightarrow \qquad r^{n-1} F_r = \frac{r^n}{\omega_n} \Delta_x \int_{B_r(0)} f(x+y) \frac{dy}{r^n}$$

$y = r\eta$
$dy = r^n d\eta$

$$= \frac{1}{\omega_n} \Delta_x \left(\int_0^r \int_{|y|=\rho} f(x+y)\, dS_y\, d\rho \right)$$

Derivando con respecto a $r>0$:

$$(n-1) r^{n-2} F_r + r^{n-1} F_{rr} = \frac{1}{\omega_n} \Delta_x \int_{|y|=r} f(x+y)\, dS_y$$

$$= \Delta_x \left(r^{n-1} F(x,r) \right)$$

Ecuación de Darboux para una media esférica :

$$(6) \cdots \quad F_{rr} + \frac{(n-1)}{r} F_r - \Delta_x F = 0$$

<u>Lema</u> Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces la media esférica de f, $F = F(x,r)$, es de clase C^2 en $x \in \mathbb{R}^n$ y en $r>0$ y es solución de la ec. de Darboux (6).
Además :

$$F(x,0) = \lim_{r\to 0^+} F(x,r) = f(x)$$

$$F_r(x,0) = \lim_{r \to 0^+} F_r(x,r) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Lema (ec. de Euler-Poisson-Darboux)

Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ una solución al problema de Cauchy:

$$(C) \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g(x), & \end{cases}$$

con $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Se definen:

$$U(x,r,t) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS_y$$

$$F(x,r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y$$

$$G(x,r) := \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS_y$$

las medias esféricas de u, f, g, resp.

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, $U(x,\cdot,\cdot) \in C^2$ en $r>0$ y $t>0$ y satisface la ec. de Euler-Poisson-Darboux:

$$(\text{EPD}) \cdots \quad U_{tt} - c^2\left(U_{rr} + \frac{(n-1)}{r} U_r\right) = 0$$

$$\forall\ (r,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty).$$

Además:
$$U(x,r,0) = \lim_{t\to 0^+} U(x,r,t) = F(x,r)$$
$$U_t(x,r,0) = \lim_{t\to 0^+} U_t(x,r,t) = G(x,r).$$

Idea: resolver (EPD) y tomar

$$\lim_{r\to 0^+} U(x,r,t) = u(x,t).$$

Sólo funciona si <u>n es impar</u>.