Lección 2.7: Fórmula de Poisson (continuación). Principio de Duhamel: potenciales retardados.

Ecuación de onda en $\mathbb{R}^2$ (problema de Cauchy):

$$(1) \cdots \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Solución de (1): fórmula de Poisson

$$u(x,t) = \frac{t}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{g(x+ct\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\, d\eta + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi} \int_{B_1(0)} \frac{f(x+ct\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\, d\eta \right] \quad \cdots (2a)$$

$y = x + ct\eta$

$\eta \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} \frac{f(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}}\, dy \right] \quad \cdots (2b)$$

Método del descenso: Kirchhoff $(n=3) \Rightarrow$ Poisson $(n=2)$

Observaciones:

(A) A diferencia de la fórmula de Kirchhoff, el dominio de dependencia de la solución para $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ fijo es la bola abierta

$$\mathcal{D}(x,t) = B_{ct}(x) = \{ y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| < ct \}$$

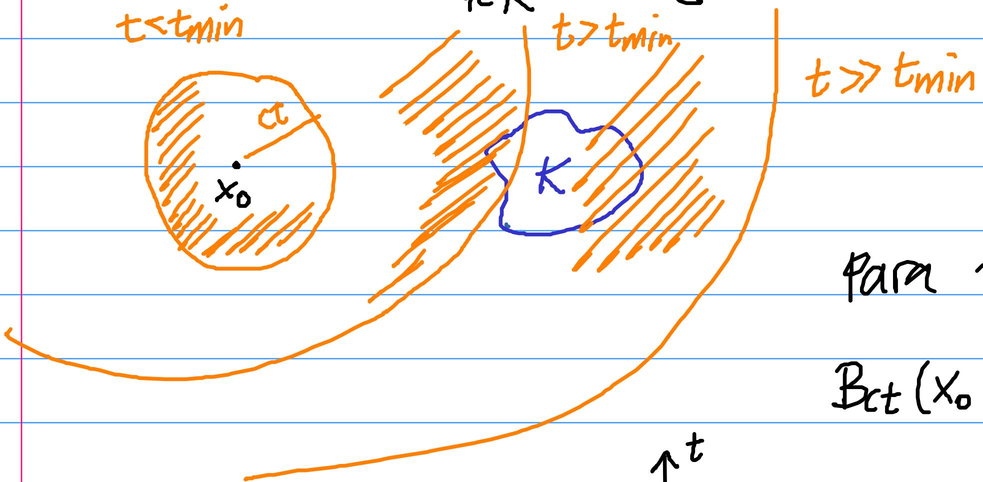
(B) EL rango de influencia de un punto $\xi \in \mathbb{R}^2$ es el interior del equivalente al cono de luz

$$\mathcal{R}_\xi = \{ (y,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) : |\xi - y| \leq ct \}$$

Esto es fundamental: el principio de Huygens <u>no</u> es válido en dim $n=2$.

Por ejemplo: si $\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset K$, $K \subset \mathbb{R}^2$, compacto, la solución se "percibe" en $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \notin K$ a partir de un tiempo

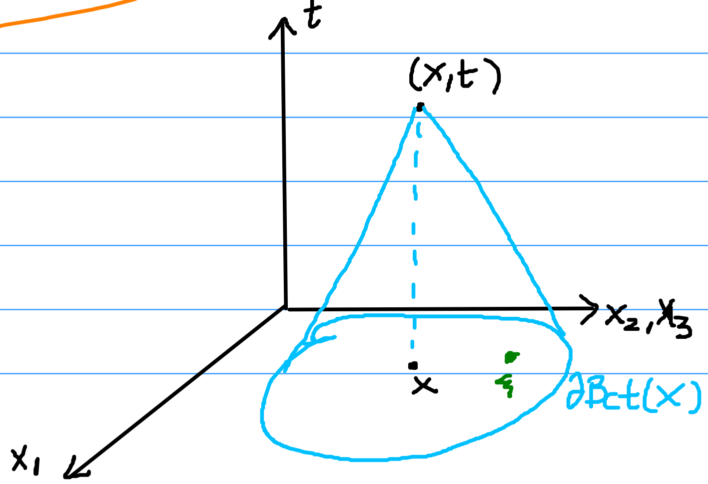
$$t_{min} = \inf_{y \in K} \frac{|x_0 - y|}{c} > 0$$



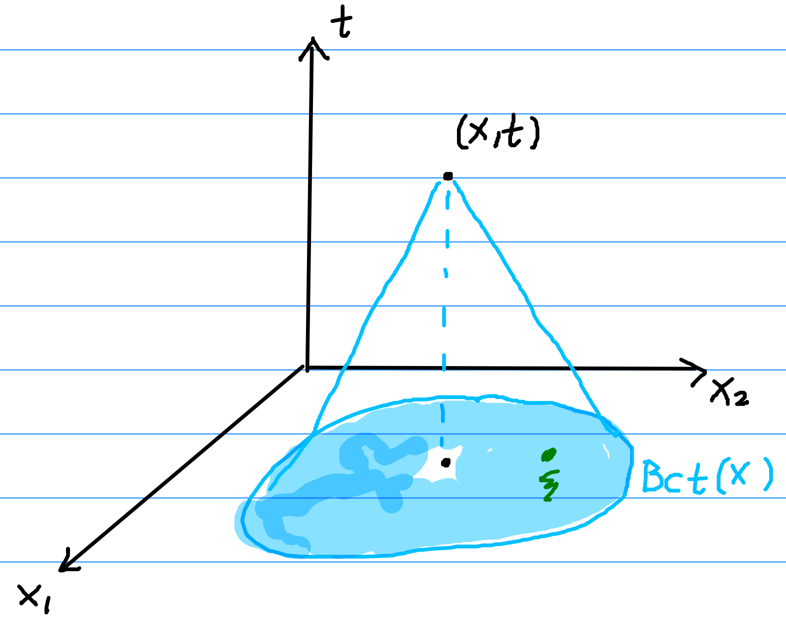
Para todo $t > t_{min}$

$$B_{ct}(x_0) \cap K \neq \phi$$

Kirchhoff
$n=3$



Poisson
$(n=2)$



(c) Calculando de (2a)

(2a) ... $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{B_1(0)} \dfrac{\big(f(x+ct\eta) + t\,g(x+ct\eta) + \nabla f(x+ct\eta)\cdot\eta\big)\,d\eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}}$

u es menos regular que f

Pasando a polares $\eta \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$,
$\eta = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow\quad u(x,t) = \frac{t}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{g(x_1 + ct\rho\cos\theta, x_2 + ct\rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{f(x_1+ct\rho\cos\theta, x_2+ct\rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]$$

Teorema Sean $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Entonces u def. por la fórmula de Poisson (2a) es de clase $C^2(\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$ y es la única solución del problema de Cauchy (1).

Dem. Ejercicio.

Geometría relativista

Espacio-tiempo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $n \geq 2$

El pasado del punto $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ es el conjunto $\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : ct < -|x| \}$

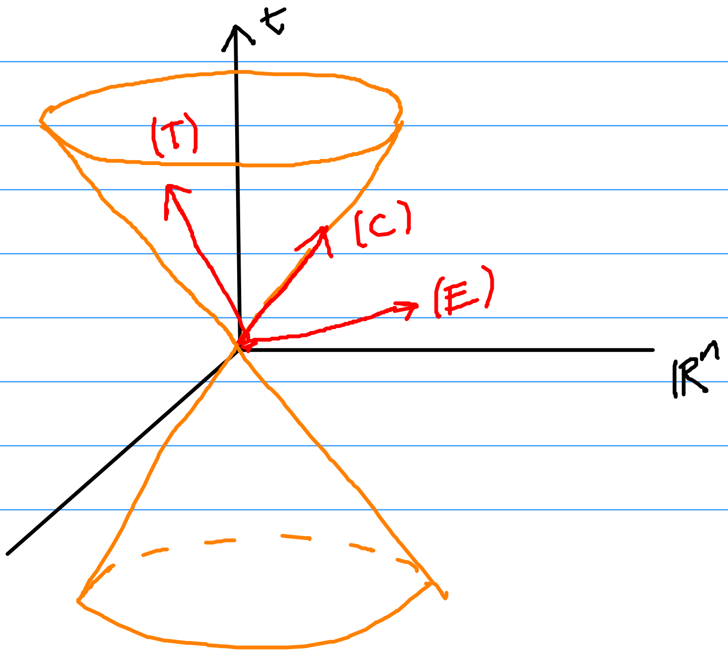
El futuro del " " es $\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : ct > |x| \}$

El presente de $(0,0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ es

$$\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : -|x| < ct < |x| \}$$

Un vector $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ se denomina:

- espacial si $c|\xi| > \tau$
- temporal si $c|\xi| < \tau$
- característico si $c|\xi| = \tau$



$\psi(x) - t = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nabla\psi \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

<u>Def.</u> Una hipersuperficie

$$S = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty,\infty) : t = \psi(x) \}$$

con $\psi \in C^1$, se denomina:

(i) <u>espacial</u>, ssi $1 - c^2 \sum_{j=1}^{n} \psi_{x_j}^2 > 0$

en todo punto (vector normal a S, $\nu = (\nabla\psi, -1)$ es temporal, $|\nabla\psi| < \frac{1}{c}$)

(ii) <u>temporal</u>, ssi $1 - c^2 \sum_{j=1}^{n} \psi_{x_j}^2 < 0$

en todo punto ($\nu = (\nabla\psi, -1)$ es espacial, $|\nabla\psi| > 1/c$)

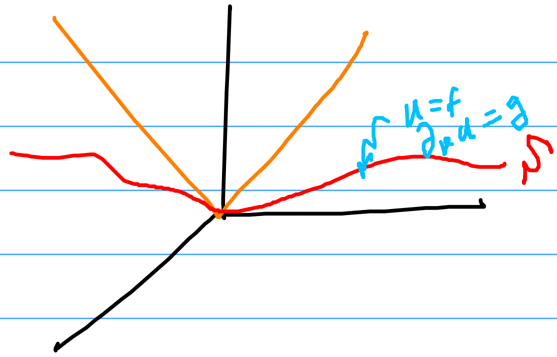
(iii) <u>característica</u> ssi $1 - c^2 \sum_{j=1}^{n} \psi_{x_j}^2 = 0$

($\nu = (\nabla\psi, -1)$ es característico).

El problema de Cauchy esta "bien planteado" si los datos iniciales se prescriben sobre superficies espaciales.

<u>Teorema</u> Sea S una hipersuperficie espacial. Entonces existe una única solución al Problema de Cauchy:

$$(4) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & (x,t) \notin S \\ u = f \\ \partial_\nu u = g \end{cases} ; \text{ sobre } S$$



Ejemplo: $S = \{t=0\} = \mathbb{R}^n$

$\partial_\nu u = u_t$ $\quad n=2 \to$ Poisson
$\quad n=3 \to$ Kirchhoff.

(D) Si $n=3$, f, g soportadas en $B_{R_0}(0) \subset \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Huygens $\quad u(x,t) \equiv 0$ para $x \in \mathbb{R}^3$ fijo, $t \gg 1$ suficientemente grande.

Kirchhoff $\Rightarrow$ $|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$ $\quad C>0$ unif. $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

Si $n=2$, f, g soportadas en $B_{R_0}(0) \subset \mathbb{R}^2$

para $x \in \mathbb{R}^2$ fijo, $u(x,t) \leq \frac{C}{t}$

$t\,u(x,t)$ acotada

Poisson $\Rightarrow$ $u(x,t) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$ $\quad C>0$ unif.

$\forall x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(x,t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}$

OJO: $\longrightarrow$ Ejercicio.

Problema no homogénea: potencial retardado.

Problema de Cauchy:

$$(5)\cdots\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = h, & x\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0) = f, & x\in\mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g, & \end{cases}$$

donde $n = 2,3$, $h = h(x,t)$, $f = f(x)$, $g = g(x)$ conocidas.

Principio de Duhamel: para $x\in\mathbb{R}^n$, $0\leq s<t$ consideramos la solución $w = w(x,t,s)$ del problema homogéneo

$$(6)\begin{cases} w_{tt} - c^2\Delta w = 0, & x\in\mathbb{R}^n, t>s\geq 0 \\ w(x,s,s) = 0, & \\ w_t(x,s,s) = h(x,s) & \end{cases}$$

(6) es soluble si $n = 2,3$:

$$[7]\ (n=3)\begin{cases} w(x,t,s) = \dfrac{t-s}{4\pi}\displaystyle\int_{\partial B_1(0)} h(x+c(t-s)\eta, s)\, dS_\eta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(Kirchhoff)} \\ x\in\mathbb{R}^3, \ t>s\geq 0 \end{cases}$$

(8)
$(n=2)$
$$\begin{cases} w(x,t,s) = \dfrac{t-s}{2\pi} \displaystyle\int_{B_1(0)} \dfrac{h(x+c(t-s)\eta, s)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}\, d\eta \\ x \in \mathbb{R}^2, \quad t > s \geq 0. \end{cases}$$

(Poisson)

De (7) y (8):

- $w(x,t,t) = 0$
- $w_t(x,t,t) = h(x,t)$ (ejercicio para $n=2,3$)

Se define

$$u_{(P)}(x,t) := \int_0^t w(x,t,s)\, ds \quad \cdots (9)$$

Así,

$$\partial_t u_{(P)} = \int_0^t w_t(x,t,s)\, ds$$

$$\partial_t^2 u_{(P)} = w_t(x,t,t) + \int_0^t w_{tt}(x,t,s)\, ds$$
$$= h(x,t) + c^2 \Delta_x \int_0^t w(x,t,s)\, ds$$

$$\Rightarrow \quad (9) \begin{cases} \partial_t^2 u_{(P)} - c^2 \Delta_x u_{(P)} = h(x,t) \\ u_{(P)}(x,0) = 0, \quad \partial_t u_{(P)}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Lema Sean $n=2,3$. Para $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$, $0\leq s<t$, sea $w=w(x,t,s)$ dada por (8) ó (7). Entonces, para cada $f\in C^3(\mathbb{R}^n)$, $g\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $h\in C^1(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))$,

$$u(x,t) = u_{(H)}(x,t) + u_{(P)}(x,t)$$

con
$$u_{(P)}(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\,ds$$

$$u_{(H)}(x,t) = \begin{cases} \text{Poisson} & (n=2) \\ \text{Kirchoff} & (n=3) \end{cases}$$

es de clase $C^2(\mathbb{R}^n\times(0,\infty))\cap C^1(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$ y es solución de (5) (única).

Caso $n=3$: Definimos

$$v(x,t,s) := w(x,t+s,s), \quad x\in\mathbb{R}^3,\ 0\leq s<t$$

con w dada por (7).

v tambien es solución de

$$v_{tt} - c^2\Delta v = 0$$

con
$$v(x,0,s) = w(x,s,s) = 0$$
$$v_t(x,0,s) = w_t(x,s,s) = h(x,s)$$

$\forall\ 0\leq s<t$.

$\therefore$ por la fórmula de Kirchhoff

$$v(x,t,s) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} h(y,s)\, dS_y$$

suponiendo $h \in C^2 \Rightarrow v \in C^2$.

$$u_{(p)}(x,t) = \int_0^t w(x,t,s)\, ds$$

$$= \int_0^t v(x,t-s,s)\, ds$$

Kirchhoff

$$= \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t-s)} \int_{|x-y|=c(t-s)} h(y,s)\, dS_y\, ds$$

$\rho = c(t-s)$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \int_{|x-y|=\rho} \frac{h(y, t-\frac{\rho}{c})}{\rho}\, dS_y\, d\rho$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|x-y|<ct} \frac{h\left(y, t-\frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|}\, dy$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{|x-y|<ct} \frac{h\left(y, t-\frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|}\, dy \quad \cdots (10)$$

$\therefore$ la solución de $\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 \Delta u = h, \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{array} \right\}$

depende de la integral de h (potencial of fuente) sobre $B_{ct}(x)$ pero evaluada en un tiempo anterior $\tilde{t} = t - \frac{|x-y|}{c}$

El valor de u en (x,t) depende de los valores de h en el "cono truncado"

$$\mathcal{C}_{(x,t)} = \{ (y,s) : |x-y| \leq c(t-s), \ 0 \leq s \leq t \}$$

Los puntos que influyen a (x,t) en el pasado $0 \leq s < t$ es el dominio de dependencia de $(x,t-s)$.

- Mult. h por el potencial $\dfrac{1}{|x-y|\, 4\pi c^2}$
- h se evalúa en $t - \dfrac{|x-y|}{c}$ "potencial retardado"
- Se integra en $y \in B_{ct}(x)$.

Corolario La solución de (S) con $n=3$ está dada por:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} f(y)\, dS_y \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} g(y)\, dS_y + \frac{1}{4\pi c^2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{h\left(y, t - \frac{|x-y|}{c}\right)}{|x-y|}\, dy$$

$\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$

Ejercicio: resolver el problema (S) en $n=2$ en forma de "potencial retardado".