Lección 2.8: Método del descenso, dimensión arbitraria.

Método del descenso de Hadamard:

$(n=3)$ Kirchhoff $\Rightarrow$ $(n=2)$ Poisson

Extrapolación del método a dim arbitraria

Lema auxiliar 1

Para cada $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k+m-1}\right) = C(k,m)\, r^{1+m} \qquad \cdots (1)$$

con $r \in (0,\infty)$, $m \geq 0$, y

$$C(k,m) := \begin{cases} 1, & k=1 \\ \prod_{j=1}^{k-1} (2j+1+m), & k \geq 2 \end{cases}$$

$C(k,m)$ constante.

<u>Dem.</u> (1) es obvia si $k=1$.

Sea $k=2$. Entonces,

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(r^{3+m}\right) = (3+m)\, r^{1+m} = C(2,m)\, r^{1+m}$$

$\Rightarrow (1)$

Para $k \geq 2$, se demuestra por inducción (ejercicio)

$\square$

Lema auxiliar 2

Sea $\varphi \in C^{k+1}((0,\infty))$, con $k \geq 1$, una función escalar. Entonces para cada $k \geq 1$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\varphi(r)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\varphi'(r)\right) \quad \cdots (2)$$

Además,

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\varphi(r)\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} r^{1+j} \frac{d^j\varphi}{dr^j} \quad \cdots (3)$$

donde las $\beta_j^{(k)}$'s son constantes independientes de φ, y

$$\beta_0^{(k)} = (1)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(\cdots)(2k-1) \quad \cdots (4)$$

Dem.

Primero, suponemos que φ es un monomio de la forma $\varphi(r) = r^m$, $m \geq 0$. Por el lema auxiliar 1:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}r^m\right) = C(k,m)\left(\frac{d^2}{dr^2}\right)\left(r^{1+m}\right)$$

$$= m(1+m)\,C(k,m)\,r^{m-1}$$

El lado derecho de (2) es:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k \left(m r^{2k} r^{m-1}\right) = m\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k+m-1}\right)$$

$$= m\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(C(k,m)\, r^{1+m}\right)$$

lema aux I

$$= m(1+m)\,C(k,m)\, r^{m-1}$$

$\therefore$ (2) es válida si $\varphi(r) = r^m$.

Por linealidad de los operadores involucrados en (2), la identidad (2) es cierta para cualquier polinomio. $\varphi(r) = a_0 + a_1 r + \dots + a_m r^m$.

Ejercicio: demostrar que ambos lados de la identidad (2) se anulan en $r = r_0$ si φ y todas sus derivadas de orden $\leq k+1$ se anulan en r_0:

$$\frac{d^j\varphi}{dr^j}(r_0) = 0 \qquad \forall \quad 0 \leq j \leq k+1$$

Prueba por inducción.

Caso general, $\varphi \in C^{k+1}$, hacemos una expansión de Taylor alrededor de $r = r_0 \in (0,\infty)$ arbitrario,

$$\varphi(r) = P(r) + Q(r)$$

donde:
- $P(r)$ polinomio
- $Q(r)$ se anula a orden $k+1$ en $r = r_0$

concluimos que (2) es cierta $\forall\ \varphi \in C^{k+1}$.

Se define el operador:

$$(5) \cdots \begin{cases} \mathcal{L}_k : C^{k+1}(\mathbb{R}) \to C^2(\mathbb{R}) \\ (\mathcal{L}_k\varphi)(r) := \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\varphi(r)\right) \end{cases}$$

Por inducción se verifica $R(\mathcal{L}_k) \subset C^2(\mathbb{R})$ (ejercicio).

Expandiendo el lado derecho de (1):

$$(2) \iff \frac{d^2}{dr^2}\left(\mathcal{L}_k\varphi\right)(r) =$$

$$= \mathcal{L}_k\left(\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2k}{r}\frac{d}{dr}\right)\varphi(r)\right)$$

La identidad (3) se puede reescribir como

$$(\mathcal{L}_k\varphi)(r) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} r^{1+j} \frac{d^j\varphi}{dr^j} \quad \cdots \quad (3')$$

Demostramos (3') por inducción:

- $k=1$,

$$(\mathcal{L}_1\varphi)(r) = r\varphi(r)$$

con $\beta_0^{(1)} = 1$. ((4) con $k=1$)

- $k=2$.

$$(\mathcal{L}_2\varphi)(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(r^3\varphi(r)\right) = 3r\varphi(r) + r^2\varphi'(r)$$

se cumple (3') con $\beta_0^{(2)} = 3 = (1)\cdot(3)$
$\beta_1^{(2)} = 1$.

Suponiendo (3') es cierta para $k \geq 1$.
con $\beta_0^{(k)} = (1)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(\cdots)(2k-1)$.

calculamos,

$$(\mathcal{L}_{k+1}\varphi)(r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k\left(r^{2(k+1)-1}\varphi(r)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(\left(2(k+1)-1\right)r^{2k-1}\varphi(r) + r^{2k}\varphi'(r)\right)$$

$$= \left(2(k+1)-1\right)(\mathcal{L}_k\varphi)(r) +$$

$$+ \left(\mathcal{L}_k(r\varphi')\right)(r)$$

$$= \left(2(k+1)-1\right)\sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^{(k)}r^{1+j}\frac{d^j\varphi}{dr^j} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1}\beta_j^{(k)}r^{1+j}\frac{d^j}{dr^j}\left(r\varphi'(r)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\beta_j^{(k+1)}r^{1+j}\frac{d^j\varphi}{dr^j} \quad \text{con}$$

$$\beta_0^{(k+1)} = \left(2(k+1)-1\right)\beta_0^{(k)}$$

$\Rightarrow$ (4), (3') para $k+1$

$\square$

Ec. de onda homogénea en dim $n = 2k+1$, con $k \geq 1$ (es decir, $n \geq 3$):

$$(6) \cdots \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g(x), & \end{cases}$$

Sea $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ una solución del problema de Cauchy (6).

Medias esféricas:

$$U(x,r,t) = ⨍_{\partial B_r(x)} u(y,t)\, dS_y$$

$$F(x,r) = ⨍_{\partial B_r(x)} f(y)\, dS_y$$

$$G(x,r) = ⨍_{\partial B_r(x)} g(y)\, dS_y$$

Esta media esférica satisface Euler-Poisson-Darboux.

Definimos:

$$\tilde{U}(x,r,t) := (\mathcal{L}_k U)(x,r,t)$$
$$= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1} U(x,r,t)\right)$$

$$\tilde{F}(x,r) = (\mathcal{L}_k F)(x,r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1} F(x,r)\right)$$

$$\tilde{G}(x,r) = (\mathcal{L}_k G)(x,r) = \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1} G(x,r)\right)$$

claramente $\left.\begin{aligned} \tilde{U}(x,r,0) &= \tilde{F}(x,r) \\ \tilde{U}_t(x,r,0) &= \tilde{G}(x,r) \end{aligned}\right\} (*)$

Lema

Si $u \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $n = 2k+1$, es solución de (6) entonces $\tilde{U}(x,\cdot,\cdot) \in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$ para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo, y además es solución de

$$(7) \begin{cases} \tilde{U}_{tt} - c^2 \tilde{U}_{rr} = 0, & r>0,\ t>0 \\ \tilde{U}(x,r,0) = \tilde{F}(x,r) \\ \tilde{U}_t(x,r,0) = \tilde{G}(x,r) & r>0 \\ \tilde{U}(x,0,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

Demostración: $\begin{cases} \mathcal{R}(\mathcal{L}_k) \subset C^2 \\ k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \tilde{U}(x,\cdot,\cdot) \in C^2.$

Aplicamos lemas auxiliares y la ec. de Euler-Poisson-Darboux:

$$\tilde{U}_{rr} = \left(\frac{d^2}{dr^2}\right)(\mathcal{L}_k U) = \mathcal{L}_k\left(U_{rr} + \frac{2k}{r} U_r\right)$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}\left(U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r\right)\right)$$

$n = 2k+1$

$$\underset{(EPD)}{=} \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U_{tt}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\mathcal{L}_k U_{tt} = \frac{1}{c^2}\tilde{U}_{tt}$$

Por (*) tenemos las condiciones iniciales de (7). Además,

$$\tilde{U}(x,0,t) = (\mathcal{L}_k U)(x,0,t)$$

$$\underset{(3')}{=} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} r^{1+j} \frac{d^j U(x,r,t)}{dr^j}\right)\Bigg|_{r=0}$$

$$= 0. \qquad \square$$

Aplicamos el método de reflexión para resolver (7). Nos interesa $ct > r \geq 0$: la solución es

$$\tilde{U}(x,r,t) = \frac{1}{2}\tilde{F}(x, ct+r) - \frac{1}{2}\tilde{F}(x, ct-r) +$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} \tilde{G}(x,\xi)\, d\xi$$

Sabemos que $u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x,r,t)$.

Por el lema auxiliar 2 :

$$\tilde{U}(x,r,t) = (\mathcal{L}_k U)(x,r,t) = \beta_0^{(k)} r\, U(x,r,t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j^{(k)} r^{1+j} \frac{d^j U}{dr^j}$$

$$\overbrace{\lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x,r,t)}{r\,\beta_0^{(k)}}}\ = u(x,t) \ +$$

$$+ \underbrace{\lim_{r\to 0^+} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_j^{(k)}}{\beta_0^{(k)}} r^j \frac{d^j U}{dr^j}(x,r,t)}_{=0}$$

sustituyendo:

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\beta_0^{(k)}} \left[\frac{\tilde{F}(x,ct+r) - \tilde{F}(x,ct-r)}{2r} \ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{ct+r} \tilde{G}(x,\rho)\, d\rho \right]$$

$$= \frac{1}{\beta_0^{(k)}} \left(\tilde{F}_r(x,ct) + \frac{1}{c} \tilde{G}(x,ct) \right)$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{\beta_0^{(k)}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}(x,ct) + \tilde{G}(x,ct) \right)$$

$n = 2k+1$, $\qquad \gamma_n := \beta_0^{\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}$

$$= (1)\cdot(3)\cdot(5)\cdot(\dots)(n-2)$$

observamos que $\forall \ \varphi = \varphi(r)$, si definimos $\tilde{\varphi}(r) = (\mathcal{L}_k \varphi)(r)$ entonces

$$\tilde{\varphi}(ct) = \left(\frac{1}{c^2 t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left((ct)^{2k-1} \varphi(ct) \right)$$

$$= c \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{k-1} \left(t^{2k-1} \varphi(ct) \right)$$

sustituyendo las expresiones para $\tilde{F}, \tilde{G}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n-3)/2}\left(\frac{1}{\omega_n c^{n-1} t}\int_{\partial B_{ct}(x)} g(y)\, dS_y\right) +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_n}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n-3)/2}\left(\frac{1}{\omega_n c^{n-1} t}\int_{\partial B_{ct}(x)} f(y)\, dS_y\right)\right]$$

$$\ldots (8)$$

con $\gamma_n = (1)(3)\cdot(5)\cdots(n-2)$, $n \geq 3$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2k+1$ impar, $t > 0$.

Observaciones :

(A) Si $n=3$, $(8) \Rightarrow$ Kirchhoff

(B) $u = u(x,t)$ depende únicamente de f, g sobre $\partial B_{ct}(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = ct \}$ para n impar.

El principio de Huygens es válido en cualquier dimensión impar $n \geq 3$.

Teorema (solución para n impar)

Sea $n \geq 3$, impar ($n = 2k+1$, $k \geq 1$). Sean $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$, con $m = \frac{1}{2}(n+1) \in \mathbb{Z}_+$. Se define $u = u(x,t)$ mediante la fórmula (8), $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Entonces:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$

(b) u es solución de $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$

(c) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0)$$

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u_t(x,t) = g(x_0).$$

Dem. Ejercicio. La regularidad viene $\mathcal{R}(\mathcal{L}_{(n-1)/2}) \subset C^2$.

Definiendo
$$v := (t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}\left(t^{n-2} G(x,ct)\right)$$
$$w := (t^{-1}\partial_t)^{(n-3)/2}\left(t^{n-2} F(x,ct)\right)$$

$$\Rightarrow \quad u = \gamma_n^{-1}\left[v + \partial_t w \right).$$

Checar que $\Box v = 0, \quad \Box \partial_t w = 0$ $\Box$

Método del descenso:

Sea $n \geq 2$, par. $n = 2k$, $k \geq 1$.
Suponemos que $u \in C^m(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ con $m = \frac{1}{2}(n+2) \in \mathbb{Z}^+$, es solución de

$$(9) - \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Definimos:

$$\tilde{u}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, t) = u(x_1, \dots, x_n, t)$$
$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)$$
$$\tilde{g}(x_1, \dots, x_{n+1}) = g(x_1, \dots, x_n)$$

para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t > 0$.

$$\tilde{x} := (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

sustituyendo $x \leftrightarrow \tilde{x}$, $n \leftrightarrow \tilde{n}$ en la fórmula (8), ($\tilde{u}$ es solución de la ec. de onda + condiciones iniciales en $\mathbb{R}^{n+1}$), obtenemos la fórmula para $\tilde{u}$.

Las integrales se calculan sobre

$$\partial B_{ct}(\tilde{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^{n+1} : |\tilde{x} - y| = ct \}$$

$\omega_{\tilde{n}} = \omega_{n+1}$. Para $y_{n+1} \geq 0$ la frontera $\partial B_{ct}(\tilde{x})$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es la gráfica de

$$\psi(z) := + \sqrt{c^2 t^2 - |x - z|^2}$$

$$\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad z \in B_{ct}(x) \subset \mathbb{R}^n$$

Para $y_{n+1} \leq 0$, es la gráfica de $-\psi(z)$.

$$z \mapsto (z_1, \dots, z_n, \pm \psi(z))$$

Int. de superficie en $\mathbb{R}^{n+1}$ $\longmapsto$ Int. sobre $B_{ct}(x)$ en $\mathbb{R}^n$

$$dS_y = \sqrt{1 + |\nabla\psi(z)|^2}\, dz$$

Por simetría con respecto a y_{n+1} ($\tilde{f}, g$ no dependen de y_{n+1}), integrando en los dos hemisferios:

$$\int_{\partial B_{ct}(\tilde{x}) \subset \mathbb{R}^{n+1}} \tilde{f}(y)\, dS_y$$

$$= 2 \int_{B_{ct}(x) \subset \mathbb{R}^n} f(z) \left(1 + |\nabla\psi(z)|^2\right)^{1/2} dz$$

$$\psi_{x_j} = \frac{z_j - x_j}{\sqrt{c^2t^2 - |z-x|^2}}$$

$$\left(1 + |\nabla\psi|^2\right)^{1/2} = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - |x-z|^2}}$$

$$\Rightarrow \fint_{\partial B_{ct}(\tilde{x}) \subset \mathbb{R}^{n+1}} \tilde{f}(y)\, dS_y$$

$$= \frac{2}{\omega_{n+1} (ct)^{n-1}} \int_{|x-z|<ct} f(z)\, dz$$

Sustituyendo obtenemos :

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{2}{\omega_{n+1} c^{n-1}} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n-2)/2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{g(y)\, dy}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}}$$

$$+ \frac{1}{\gamma_{n+1}} \frac{2}{\omega_{n+1} c^{n-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(n-2)/2} \int_{B_{ct}(x)} \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{c^2t^2 - |x-y|^2}} \right] \quad \cdots (10)$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $n = 2k$, $k \geq 1$, $t > 0$,

$\gamma_{n+1} = (1)\cdot(2)\cdot(5)\cdot(\cdots)\cdot(n-1)$.

observaciones:

(A) Si $n=2$ (10) $\Rightarrow$ Poisson.

(B) La integración se hace en

$$B_{ct}(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \; |x-y| < ct \}$$

El principio de Huygens <u>no</u> se cumple en dimensión $n = 2k$.

<u>Teorema</u> (solución para n par)

Sea $n \geq 2$, $n = 2k$, $k \geq 1$. $f \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C^m(\mathbb{R}^n)$, con $m = \frac{1}{2}(n+2) \in \mathbb{Z}_+$.
Se define $u = u(x,t)$ por (10), $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.
Entonces :

(a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(b) $\Box u = 0$

(c) $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$, fijo

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = f(x_0)$$

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u_t(x,t) = g(x_0).$$

Demostración   Ejercicio.

$\square$