Lección 2.9: Problemas con valores en la frontera: separación de variables.

Problema físico : membrana elástica en dos dimensiones sujeta en el borde de un dominio, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, abierto, acotado, con $\partial\Omega$ de clase C^1 por pedazos.

Modelo : (1) ... $u_{tt} - c^2 \Delta u = h, \qquad x \in \Omega, \ t > 0$

condiciones iniciales :

(2) ... $$u(x,y,0) = f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega$$
$$u_t(x,y,0) = g(x,y)$$

f, g conocidas. u sujeta en $\partial\Omega$, $\Rightarrow$

(3) ... $$u(x,y,t) = 0, \quad \forall\, t > 0, \ \forall\, (x,y) \text{ sobre } \partial\Omega$$

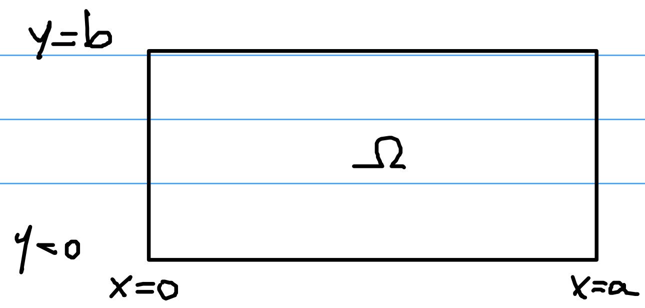
Desplazamiento vertical nulo.

Ejemplos :

(A) Membrana rectangular

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq b \}$$

$a, b > 0$ constantes



Problema : $h=0$ (por simplicidad)

(3) $\Rightarrow$ $(3') \begin{cases} u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, & \forall t>0, \forall y \in [0,b] \\ u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0, & \forall t>0, \forall x \in [0,a] \end{cases}$

Método de separación de variables :

Ansatz $$u(x,y,t) = v(x,y)\psi(t) \quad \cdots (4)$$

Por (3), claramente, $v=0$ sobre $\partial\Omega$.

$$\Box u = u_{tt} - c^2(u_{xx}+u_{yy}) = 0$$

sustituyendo :

$$v(x,y)\psi''(t) = c^2(v_{xx}+v_{yy})\psi(t)$$

Nos interesan soluciones no triviales, $v \not\equiv 0$, $\psi \not\equiv 0$.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}}_{\text{dep. de } t} = \underbrace{\frac{v_{xx}+v_{yy}}{v}}_{\text{dep. sólo de }(x,y)} =: \underbrace{-\lambda^2}_{<0 \text{ para evitar soluciones triviales.}}$$

con λ constante.

obtenemos :

$$(5) \cdots \begin{cases} v_{xx}+v_{yy} = -\lambda^2 v, & (x,y)\in\Omega \\ v(0,y) = v(a,y) = 0, & \forall y \in [0,b] \\ v(x,0) = v(x,b) = 0, & \forall x \in [0,a] \end{cases}$$

(5) es un problema espectral. Asimismo:

$$(6) \cdots \begin{cases} \psi''(t) + c^2\lambda^2\psi(t) = 0, & \forall\, t>0 \\ + \text{ condiciones iniciales} \end{cases}$$

"conocido como problema de Helmholtz"

Solución de (5): separación de variables

$$v(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Sustituyendo en (5):

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\lambda^2 X(x)Y(y)$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{1}{Y(y)}\left(\lambda^2 Y(y) + Y''(y)\right)$$

$$\equiv -k^2 \quad \text{constante.}$$

$$\Rightarrow (7) \cdots \begin{cases} X''(x) + k^2 X(x) = 0, & x \in [0,a] \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

$$(8) \cdots \begin{cases} Y''(y) + p^2 Y(y) = 0, & y \in [0,b] \\ Y(0) = Y(b) = 0, & \text{con } p^2 = \lambda^2 - k^2 \end{cases}$$

Solución general de (7) y (8):

$$(9) \cdots \begin{cases} X_m(x) = A \sin(k_m x), & k_m = \frac{m\pi}{a} \\ Y_n(x) = B \sin(p_n y), & p_n = \frac{n\pi}{b} \end{cases}$$

A, B constantes arbitrarias, $m, n \in \mathbb{N}$.

Definimos:

$$v_{mn}(x,y) := \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \cdots (10)$$

soluciones de (5) con

$$(11) \begin{cases} \lambda_{mn}^2 := p_n^2 + k_m^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \\ m, n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Sustituyendo λ_{mn} en (6):

$$\psi''(t) + c^2 \lambda_{mn}^2 \psi(t) = 0,$$

solución general

$$\psi(t) = A_{mn} \cos(c \lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c \lambda_{mn} t)$$

Familia infinita de soluciones, parametrizada $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por:

(12) ... $u_{mn}(x,y,t) = \left[A_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn} t) \right]$
$$\times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

cada u_{mn} es solución de la ec. de onda + valores en la frontera.

Cada u_{mn} es un "modo normal de vibración". La frecuencia de vibración de cada u_{mn} es

$$\frac{c\lambda_{mn}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$$

Frecuencia fundamental $(m,n) = (1,1)$:

$$\frac{c\lambda_{11}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Las frecuencias <u>no</u> son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (como sucede en una dimensión). Dependiendo de a y b pueden existir diferentes funciones de la forma

$$v_{mn}(x,y) = X_m(x)\, Y_n(y)$$

asociadas a un mismo valor propio. Esto implica que pueden haber vibraciones de la misma frecuencia, pero "líneas nodales" (curvas, lugares geométricos en Ω fijo) diferentes.

Por el principio de superposición, proponemos una solución de la forma

$$(13)\ldots \quad u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left[A_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn} t) \right] \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Suponemos por el momento convergencia uniforme de la serie.

De las condiciones iniciales:

$$u(x,y,0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
$$= f(x,y)$$

$$u_t(x,y,0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c\lambda_{mn} B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
$$= g(x,y)$$

Condiciones de compatibilidad:

$$\left.\begin{aligned} u(0,y,0) &= f(0,y) = 0 \\ u(a,y,0) &= f(a,y) = 0 \end{aligned}\right\} \quad y \in [0,b]$$
$$\left.\begin{aligned} u(x,0,0) &= f(x,0) = 0 \\ u(x,b,0) &= f(x,b) = 0 \end{aligned}\right\} \quad x \in [0,a]$$

$$g(0,y) = g(a,y) = 0, \qquad y \in [0,b]$$
$$g(x,0) = g(x,b) = 0, \qquad x \in [0,a]$$

$\therefore$ f,g tienen expansions en serie seno de Fourier:

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} f_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$g(x,y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} g_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

con $$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\,dy$$

$$g_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\,dy$$

Por lo tanto:

$$A_{mn} = f_{mn}, \qquad B_{mn} = \frac{g_{mn}}{c\lambda_{mn}}$$

candidato a solución:

$$(14) \cdots \begin{cases} u(x,y,t) = \displaystyle\sum_{m,n=1}^{\infty} \left[f_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + \frac{g_{mn}}{c\lambda_{mn}} \sin(c\lambda_{mn} t) \right] \times \\ \qquad \times \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ \text{con} \quad \lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \end{cases}$$

Si los coeficientes f_{mn}, $\frac{g_{mn}}{c\lambda_{mn}}$ convergen

a 0 suficientemente rápido cuando $m,n \to \infty$ entonces la serie converge uniformemente

$\Rightarrow$ (14) es la solución. (Ejercicio).

Ejemplos :

(a) Membrana cuadrada $a = b = 1$.

Valores propios : $\lambda_{mn} = \pi \sqrt{m^2+n^2}$.

$\therefore \quad \lambda_{mn} = \lambda_{nm} \qquad \forall\ (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

pero las funciones propias son distintas

$$v_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\neq v_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

Por ejemplo : $\lambda_{12} = \lambda_{21} = \pi\sqrt{5}$.

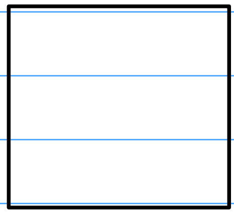
$$v_{12} \neq v_{21}$$

$$\Rightarrow \quad u_{21} = \left[A_{21}\cos(c\pi\sqrt{5}\,t) + B_{21}\sin(c\pi\sqrt{5}\,t)\right] \times$$
$$\times \sin(2\pi x)\sin(\pi y)$$

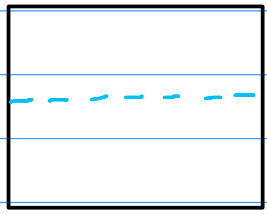
$$u_{12} = \left[A_{12}\cos(c\pi\sqrt{5}\,t) + B_{21}\sin(c\pi\sqrt{5}\,t)\right] \times$$
$$\times \sin(\pi x)\sin(2\pi y)$$

Líneas nodales : $y = \frac{1}{2}$ (u_{12})

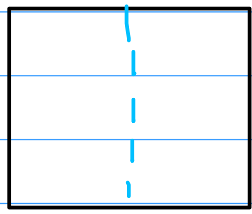
$x = \frac{1}{2}$ (u_{21})



u_{11}

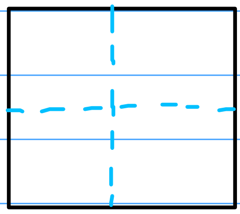


u_{12}

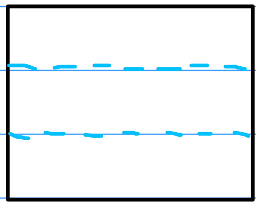


u_{21}

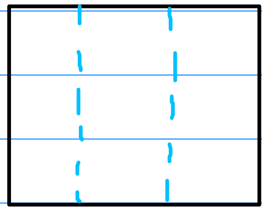
Análogamente



u_{22}



u_{13}



u_{31}

Tomando $A_{12} = 1$, $B_{12} = B_{21} = 0$ obtenemos

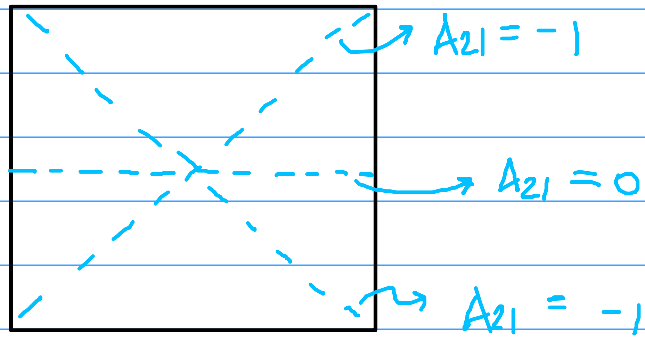
$$u_{12} + u_{21} = \cos(c\pi\sqrt{5}t)\left[v_{12} + A_{21} v_{21}\right](x,y)$$

es "otra" solución que vibra con frecuencia $c\pi\sqrt{5}$.

La línea nodal de esta vibración es la solución de

$$(v_{12} + A_{21} v_{21})(x,y) = \sin(\pi x)\sin(2\pi y) + A_{21} \sin(2\pi x)\sin(\pi y) = 0$$

La solución depende de A_{21}



("Figuras de chladni").

(B) Membrana circular.

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$$

Membrana fija en el borde sin forzamiento

$$(1) \cdots \begin{cases} u_{tt} - c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta}\right) = 0, & 0 < r < 1, \ 0 \le \theta < 2\pi, \ t \ge 0 \\ u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \quad u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta), & 0 < r < 1, \ 0 \le \theta < 2\pi \\ u(1,\theta,t) = 0, & \forall t > 0, \ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$$

Podemos suponer $u(r,\theta,t) = u(r,t)$ (no depende de θ). Suponiendo $f = f(r)$, $g = g(r)$. $g = 0$

Sustituyendo :

$$(1') \cdots \begin{cases} u_{tt} - c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r\right) = 0, & 0<r<1,\ t>0 \\ u(r,0) = f(r), & 0<r<1 \\ u_t(r,0) = g(r) & \\ u(1,t) = 0, & \forall\, t>0 \end{cases}$$

Por separación de variables:

$$u(r,t) = v(r)\,w(t)$$

Por el momento suponemos que $w'(0) = 0$, ya que $g \equiv 0$

y que $v(1) = 0$ (cond. de frontera) y $v(0)$ finito.

Sustituyendo:

$$v(r)\,w''(t) - c^2\left(v''(r) + \frac{1}{r} v'(r)\right) w(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{c^2}\,\frac{w''(t)}{w(t)} = \frac{r\,v''(r) + v'(r)}{r\,v(r)} = \mu$$

con μ constante.

Problema para v:

$$(2) \cdots \begin{cases} (r v'(r))' - \mu r v(r) = 0 \\ v(0) \text{ acotado} \\ v(1) = 0 \end{cases}$$

Si $\mu \geq 0$ la única solución es $v(r) \equiv 0$

(Ejercicio : verificar esto (calcular) , $0 = \int_0^1 (rv')' v \, dr$)

Por ende, $\mu = -\lambda^2$:

(3) ... $$v''(r) + \frac{v'(r)}{r} + \lambda^2 v = 0$$

Ecuación de Bessel de orden cero.

Para cada λ existe una función propia solución de (3). Las funciones propias son una base del espacio de Hilbert $L^2_\eta(0,1)$, con peso $\eta(r) = r$.

$$u \in L^2_\eta(0,1) \quad \text{ssi} \quad \int_0^1 \eta(r) u(r)^2 \, dr < \infty$$

Funciones propias :

$$u_n(r) = J_0(\lambda_n r) \quad \cdots \quad (4)$$

donde
- $J_0 = J_0(r)$ es la función de Bessel de orden cero solución de (3).
- $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son los ceros de la función de Bessel J_0.

Las ecuaciones para w:

$$\begin{cases} w''(t) + c^2 \lambda_n^2 w(t) = 0. \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad w_n(t) = a_n \cos(c\lambda_n t), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Modo normal de vibración

$$u_n(r,t) = a_n \cos(c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r)$$

$$\Rightarrow u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r)$$

superposición

Condiciones iniciales:

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n r) = f(r)$$

Se puede verificar que:

$$a_n = \frac{2}{(J_1(\lambda_n))^2} \int_0^1 s f(s) J_0(\lambda_n s)\, ds$$

donde $J_1(r)$ es la función de Bessel de orden 1.

Ejercicio: verificar el caso $g \not\equiv 0$.

coeficientes $b_n = \tilde{C}_n \int_0^1 s g(s) J_0(\lambda_n s)\, ds$