Lección 3.2: Solución fundamental (continuación). Funciones armónicas, parte 1.

Ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f, \qquad \dots (1)$$

$u = u(x)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω abierto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ función conocida.

$\Phi = \Phi(x)$ solución fundamental.

Lema 1: Para $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $y \in \Omega$: (a) $\Delta_x \Phi(x-y) = 0 \quad \forall\, x \neq y$.

(b) $\forall\, \varphi \in C_0^2(\Omega)$:

$$-\int_\Omega \Phi(x-y)\, \Delta_x \varphi \, dx = \varphi(y)$$

Lema 2: Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, abierto y acotado. Sea $f \in C^2(\Omega)$. Entonces

$$u(x) = \int_\Omega \Phi(x-y) f(y) \, dy, \qquad x \in \Omega \qquad \dots (2)$$

es de clase $C^2(\Omega)$ y satisface (1).

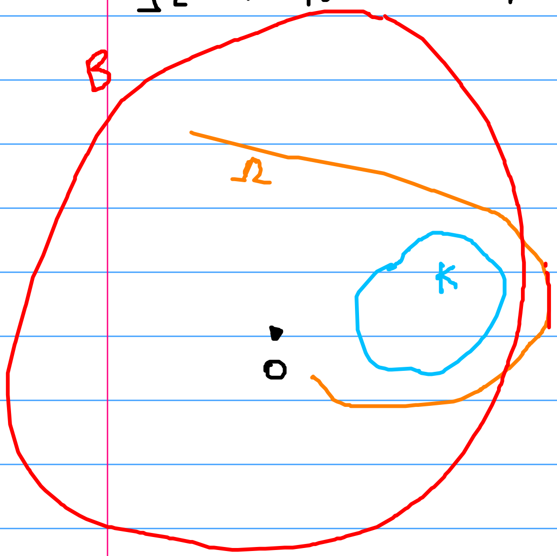
Demostración: Paso 1: Primero probaremos el enunciado en el caso $f \in C_0^2(\Omega)$.

Cambio de variables $z = y - x$:

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_{K - \{x\}} \Phi(z) f(x+z) \, dz$$

donde $K \subset\subset \Omega$, K compacto tal que $\operatorname{supp} f \subset K$.
$K - \{x\} := \{ y - x : y \in K \}$.

Ω acotado $\Rightarrow$ $\exists$ bola B con centro en $0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $K - \{x\} \subset B$ $\Leftrightarrow$
$z = y - x \in B$ $\forall\, y \in K - \{x\}$, $x \in \Omega$.



Para todo $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_\Omega \Phi(x-y) f(y)\, dy$$
$$\underset{\operatorname{supp} f \subset K}{=} \int_K \Phi(x-y) f(y)\, dy$$
$$= \int_{K-\{x\}} \Phi(z) f(x+z)\, dz$$
$$= \int_B \Phi(z) f(x+z)\, dz$$

$\Phi(z)$ es integrable en toda bola con centro en el origen. Además, $f \in C^2_0$. Por lo tanto podemos diferenciar bajo el signo de la integral:

$$u_{x_j}(x) = \int_B \Phi(z) f_{z_j}(x+z)\, dz$$
$$u_{x_i x_j}(x) = \int_B \Phi(z) f_{z_i z_j}(x+z)\, dz \qquad \forall x \in \Omega.$$

$\Rightarrow \quad u \in C^2(\Omega)$

$f \in C_0^2(\Omega) \Rightarrow$ aplicamos Lema 1:

$$\Delta_x u = \int_B \Phi(z)\,\Delta_z f(x+z)\,dz$$

$$= \int_K \Phi(x-y)\,\Delta_y f(y)\,dy$$

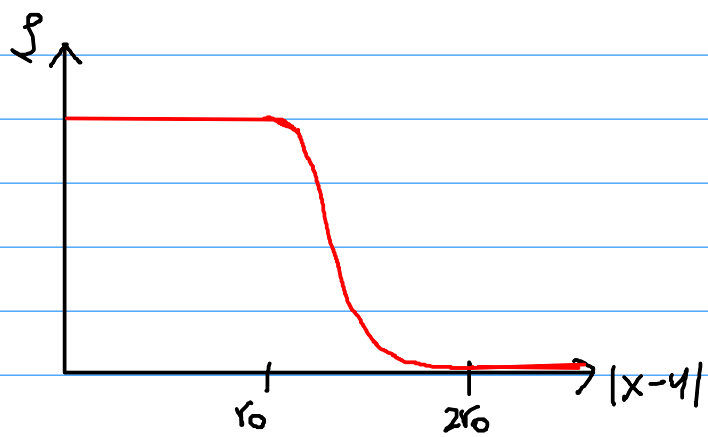
$$= \int_\Omega \Phi(x-y)\,\Delta_y f(y)\,dy \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lema 1;} \\ f \in C_0^2(\Omega)}}{=} -f(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta_x u = f \quad \text{en} \quad \Omega.$$

Paso 2: caso general $f \in C^2(\Omega)$.

Sea $\rho = \rho(y)$, $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que

- $\rho(y) = 1$ si $|x-y| \leq r_0$
- $\rho(y) = 0$ si $|x-y| \geq 2r_0$



$r_0 > 0$ constante

ρ - "cut off".

$$f(y) = \underbrace{\rho(y)f(y)}_{\substack{=0 \text{ si} \\ |x-y| \geq 2r_0}} - \underbrace{(1-\rho(y))f(y)}_{\substack{=0 \\ \text{si } |x-y| \leq r_0}}$$

Podemos escoger ρ y $r_0>0$ tales que $B_{2r_0}(x) \subset \Omega$

$\therefore$ ρf tiene soporte compacto en Ω.

Por lo tanto:

$$u(x) = \underbrace{\int_\Omega \Phi(x-y)\rho(y)f(y)\,dy}_{=:w_1(x)} + \underbrace{\int_\Omega \Phi(x-y)\overbrace{(1-\rho(y))}^{=0,\ y\sim x}f(y)\,dy}_{=:w_2(x)}$$

Notamos $\rho f \in C_c^2(\Omega)$. Aplicamos paso 1:

$$w_1 \in C^2(\Omega), \quad -\Delta_x w_1 = \rho(x)f(x) = f(x)$$

$\rho \equiv 1$ en $B_{r_0}(x)$

Dado que $(1-\rho(y))f(y) \equiv 0$ si $y \in B_{r_0}(x)$, evitamos la singularidad de la 2a. integral: podemos derivar bajo el signo de integración. La integración se hace en $\Omega \setminus \overline{B_{r_0}(x)}$:

$$\partial^2_{x_j x_i} w_2(x) = \int_{\Omega\setminus\overline{B_{r_0}(x)}} \partial^2_{x_j x_i}\Phi(x-y)\,(1-\rho(y))f(y)\,dy$$

$\Phi \in C^\infty$ si $x \neq y$ $\therefore$ $w_2 \in C^2(\Omega)$.

Además:

$$\Delta_x w_2 = \int_{\Omega\setminus\overline{B_{r_0}(x)}} \underbrace{\Delta_x \Phi(x-y)}_{\neq 0 \text{ si } x\neq y}(1-\rho(y))f(y)\,dy = 0.$$

Conclusión: $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = \Delta w_1 + \Delta w_2 = -f$

$\square$

<u>Nota</u>: No se está especificando condición alguna de frontera. El problema está mal planteado pues no hay unicidad: para toda ψ tal que $\Delta \psi = 0$, $u + \psi$ es solución.

Aplicación: Distribución de carga eléctrica $q = q(x)$, con $q \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)\, q(y)\, dy$$

es solución de $-\Delta u = q$, en $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si tomamos $R>0$ suf. grande tal que $\operatorname{supp} q \subset\subset B_R(0)$. $\Omega = B_R(0)$ y $q \in C_0^2(\Omega)$ y aplicamos Lema 2: $u \in C^2(B_R(0))$ y $-\Delta u = q$ $\forall R > 0$. Tomando $R \to \infty$ obtenemos $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $-\Delta u = q$ en $\mathbb{R}^n$.

<u>Funciones armónicas</u>

Ejemplo: si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ libre de carga eléctrica entonces el potencial electrostático u satisface $-\Delta u = 0$.

$\therefore$ u es armónica.

Definición Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Se dice que $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω si

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Nota: Ω puede ser todo $\mathbb{R}^n$; u no se especifica en $\partial\Omega$.

Definición (propiedad del promedio)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto. Sea $u \in C(\Omega)$. Se dice que u satisface:

(i) La primera propiedad del promedio si

(M1) ... $$u(x) = ⨍_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y$$

para toda bola $B_r(x) \subset \Omega$, $r > 0$.

(ii) La segunda propiedad del promedio si

(M2) .. $$u(x) = ⨍_{B_r(x)} u(y)\, dy = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

para toda bola $B_r(x) \subset \Omega$, $r > 0$.

$$|B_r| = \frac{r^n}{n} \omega_n, \quad |\partial B_r| = r^{n-1} \omega_n.$$

Nota: $(M1) \iff (M2)$

Sup. (M1). Sea $B_r(x) \subset \Omega$, sea $0<\rho<r$. $B_\rho(x) \subset \Omega$.

$$(M1) \Rightarrow \quad \rho^{n-1} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, dS_y$$

Integrando en $\rho \in (0,r)$

$$\frac{r^n}{n} u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{|x-y|=\rho} u(y)\, dS_y\, d\rho$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy \quad \Rightarrow (M2)$$

Análogamente (M2) $\Rightarrow$ (M1) (Derivando (M2) c/ respecto a r).

(M1) $\equiv$ (M2) : propiedad del promedio

$$(M1) \Leftrightarrow (M2) \Leftrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x+r\eta)\, dS_\eta$$

$$= \frac{n}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x+r\eta)\, d\eta$$

$$\forall\, B_r(x) \subset \Omega.$$

<u>Lema 1</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $u \in C^2(\Omega)$ armónica. Entonces u satisface la propiedad del promedio en Ω.

Demostración : Sea $x \in \Omega$, $B_R(x) \subset \Omega$, con $R>0$.

sea la siguiente función :

$$\begin{cases} \varphi(r) := \dfrac{1}{|\partial B_r|} \displaystyle\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = \dfrac{1}{|\partial B_1|} \displaystyle\int_{\partial B_1(0)} u(x+r\eta)\, dS_\eta \\ r \in (0,R) \end{cases}$$

$u \in C^2(B_R(x)) \Rightarrow \varphi \in C^2((0,R))$.

calculamos :

$$\varphi'(r) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+r\eta)\cdot \eta \, dS_\eta$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \underbrace{\left(\frac{y-x}{r}\right)}_{=:\hat{\nu}(y)} dS_y$$

$$\underset{\text{teo. divergencia}}{=} \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B_r(x)} \underbrace{\Delta_y u(y)}_{=0}\, dy = 0.$$

$\Rightarrow \varphi'(r) = 0$ en $r \in (0,R)$

$\Rightarrow \varphi(r) = \text{constante}$ en $r \in (0,R)$.

$$\therefore \quad \varphi(R) = \varphi(0) = \frac{1}{|\partial B_1|} \int_{\partial B_1(0)} u(x)\, dS_\eta$$

$$= u(x). \quad \Rightarrow (M1)$$

$\square$

Lema 2 : Sea $u \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Si u satisface la prop. del promedio en Ω entonces u es armónica en Ω.

Dem. Por contradicción: suponemos que $\Delta u \not\equiv 0$ en Ω. Entonces existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) > 0$ (sin pérdida de generalidad).

$u \in C^2(\Omega) \Rightarrow \exists\, r > 0$ tal que $\Delta u > 0$ en $B_r(x_0)$.

$$0 < \int_{B_r(x_0)} \Delta u \, dx \underset{\text{teo. div.}}{=} \int_{\partial B_r(x_0)} \nabla u \cdot \hat{\nu} \, dS_x$$

$$= \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} \, dS_x$$

$$= r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial r}(x_0 + r\eta) \, dS_\eta$$

$$= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + r\eta) \, dS_\eta$$

$$\underset{(M1)}{=} r^{n-1} \frac{d}{dr} \left(\omega_n u(x_0) \right) = 0$$

$\therefore$ contradicción.

Concluimos que $\Delta u = 0$ en Ω $\square$

Definición Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $u \in C(\Omega)$.
(i) Se dice que u es <u>subarmónica</u> en Ω si

$$u(x) \leq ⨍_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y$$

$\forall\, B_r(x) \subset \Omega$, $r > 0$, o equivalentemente si

$$u(x) \leq ⨍_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

$\forall\, B_r(x) \subset \Omega$.

(ii) Se dice que u es <u>superarmónica</u> en Ω si $-u$ es subarmónica en Ω.

Lema 3 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $u \in C^2(\Omega)$.
Entonces:

(a) u es subarmónica en Ω ssi $\Delta u \geq 0$.
(b) " " superarmónica " ssi $\Delta u \leq 0$.

Demostración: Basta con probar (a).

"$\Rightarrow$" $u \in C^2(\Omega)$ y subarmónica. Por contradicción. Sea $x_0 \in \Omega$ tal que $\Delta u(x_0) < 0$. Por continuidad $\Delta u < 0$ en $B_R(x_0)$. Si $0 < r < R$ por teo. divergencia

$$0 > \int_{B_r(x_0)} \Delta u\, dx = r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\eta|=1} u(x_0 + r\eta)\, dS_\eta$$

Div. entre r^{n-1}, integramos en $r\in(0,R)$:

$$0 > \int_{|\eta|=1} u(x_0+R\eta)\,dS_\eta - u(x_0)\,\omega_n$$

$$\Leftrightarrow \qquad u(x_0) > \fint_{\partial B_R(x_0)} u(y)\,dS_y$$

contradicción con subarmonicidad.

$$\therefore \quad \Delta u(x) \geq 0 \quad \forall\ x\in\Omega.$$

"$\Leftarrow$" Tomamos $B_r(x)\subset\Omega$. Sea

$$\varphi(\rho) := \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1(0)} u(x+\rho\eta)\,dS_\eta \ , \quad \rho\in(0,r)$$

$$\varphi'(\rho) = \frac{1}{|\partial B_1|}\int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x+\rho\eta)\cdot\eta\ dS_\eta$$

$$= \frac{1}{|\partial B_\rho|}\int_{B_\rho(x)} \Delta_y u(y)\,dy \geq 0$$

$\therefore$ φ es no decreciente en $\rho\in(0,r)$.

$$\Rightarrow \quad \varphi(r) = \frac{1}{|\partial B_r|}\int_{\partial B_r(x)} u(y)\,dS_y$$

$$\geq \varphi(0) = u(x) \qquad \forall\ B_r(x)\subset\Omega.$$

$\therefore$ u es subarmónica en Ω $\square$

Observación: Si sustituimos desigualdades estrictas para todo $u \in C^2(\Omega)$:

$$\Delta u > 0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} u(x) < \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \\ u(x) < \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy \end{cases}$$

Teorema (principio débil del máximo)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado. Sea $u \in C(\Omega)$ y subarmónica en Ω tal que $\sup_\Omega u < \infty$.

Entonces:

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u \qquad \cdots (5)$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$, $u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon |x|^2$.

Entonces $u^\varepsilon \in C(\Omega)$ y $\sup_\Omega u < \infty$ y Ω acotado, esto implica

$$M := \sup_\Omega u^\varepsilon < \infty$$

Por dem.: u^ε no alcanza su máximo en el interior de Ω.

Por contradicción: existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u^\varepsilon(x_0) = M$.

Sea $r>0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$.

$|x|^2 \in C^2(\Omega)$ y es estrictamente subarmónica:

$$\Delta(|x|^2) = 2n > 0$$

u subarmónica, $|x|^2$ estrictamente subarmónica implican:

$$\begin{aligned}
M = u^\varepsilon(x_0) &= u(x_0) + \varepsilon |x_0|^2 \\
&\leq \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, dS_y + \varepsilon |x_0|^2 \\
&< \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\, dS_y + \varepsilon \fint_{\partial B_r(x_0)} |y|^2\, dS_y \\
&= \fint_{\partial B_r(x_0)} u^\varepsilon(y)\, dS_y \\
&\leq M \fint_{\partial B_r(x_0)} dS_y = M
\end{aligned}$$

contradicción. Concluimos que

$$\sup_{\Omega} u^\varepsilon \leq \sup_{\partial\Omega} u^\varepsilon$$

Dado que Ω es acotado:

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\Omega} u^\varepsilon \leq \sup_{\partial\Omega} u^\varepsilon &\leq \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon \sup_{\partial\Omega} |x|^2 \\
&\leq \sup_{\partial\Omega} u + C\varepsilon
\end{aligned}$$

con $\infty > C > |\text{diam}\ \Omega|^2$ constante uniforme.
Tomando $\varepsilon \to 0^+$, obtenemos

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$$

$\square$

<u>Corolario 1</u> Si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y armónica, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, entonces

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

$$\left(\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \right)$$

(válido si cambiamos "sup" por "inf"; $-u$ es armónica).

<u>Corolario 2</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Sea $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Si $\exists$ $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ solución de

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

entonces es única.

<u>Dem.</u> Si hay dos soluciones u_1, u_2, entonces $u = u_1 - u_2$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Por el corolario 1 aplicado a u y a $-u$ obtenemos

$$0 = \min_{\overline{\Omega}} u \leq u \leq \max_{\overline{\Omega}} u = 0$$

$$\therefore \quad u = 0 \quad \text{en } \overline{\Omega} \qquad \square$$