Lección 3.3: Principio fuerte del máximo. Regularidad.

Principio débil del máximo: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $u \in C(\Omega)$ subarmónica en Ω con $\sup_{\Omega} u < \infty$. Entonces:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u$$

Corolario 1: $u \in C(\bar{\Omega})$, subarmónica $\Rightarrow$ $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$

Corolario 2: Existe a lo más una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ al problema de Dirichlet

$$(1) \ldots \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado, $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$.

Observación: Si el dominio no es acotado entonces la unicidad no es cierta en general.

Contraejemplos:

(i) Dirichlet

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right\} (2)$$

$\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ abierto, no acotado.

$u \equiv 0$ es solución trivial de (2).

Pero $u(x) = \log|x|$ si $n = 2$ también es solución. (No es acotada en Ω: $\log|x| \to \infty$ si $|x| \to \infty$)

Si $n \geq 3$ entonces claramente

$$u(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}} - 1$$

es solución no trivial de (2).

(ii) Dirichlet (2) con $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0 \}$.
$\partial\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0 \}$.

$u \equiv 0$ sol. trivial
$u(x) = x_n$ es solución de (2) no trivial.

(iii) Dirichlet (2) con $\Omega = \{ x_2 > |x_1| \} \subset \mathbb{R}^n$
$u(x) = x_2^2 - x_1^2$ armónica en Ω
y se anula en $\partial\Omega$.

El caso (i) $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$ es un caso particular de un dominio exterior :

$$\Omega_{ext} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

con Ω abierto y acotado (electrostática, Ω conductor). Para resolver problemas exteriores se imponen condiciones extra:

$n = 2$: u acotada
$n \geq 3$: $\lim_{|x| \to \infty} u = u_\infty$ $\exists$

Corolario 3 (estabilidad)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $f \in C(\Omega)$. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ soluciones de $-\Delta u = f$ en Ω con $u_j = g_j$ sobre $\partial\Omega$, $j = 1,2$, $g_j \in C(\partial\Omega)$. Entonces,

$$(3) \cdots \quad |u_1(x) - u_2(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Dem. Sea $w = u_1 - u_2$. w es armónica en Ω, $\Delta w = 0$. $w|_{\partial\Omega} = g_1 - g_2$. Por el principio del máximo aplicado a w y a $-w$

$$|w(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|, \quad \forall x \in \Omega \qquad \square$$

Observación: la estimación (3) se llama de estabilidad por que si los datos sobre la frontera se miden con un error absoluto de orden $O(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ entonces

$$|u_1 - u_2| \leq O(\varepsilon)$$

la solución se aproxima con el mismo error absoluto.

Si además pedimos que Ω sea conexo podemos obtener más información.

<u>Teorema</u> (principio fuerte del máximo)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y <u>conexo</u>.
Sea $u \in C(\Omega)$ que satisface la propiedad del promedio en Ω. Supongamos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\begin{cases} u(x) \geq u(x_0) & \forall\, x \in \Omega \\ \text{ó,}\quad u(x) \leq u(x_0) & \forall\, x \in \Omega \end{cases}$$

Entonces u es constante en Ω.

<u>Demostración</u>

Sea $G := \{ x \in \Omega : u(x) = u(x_0) \} \subset \Omega$.

Queremos demostrar que $G = \Omega$. Dado que Ω es conexo, entonces basta con probar que

(a) $G \neq \phi$

(b) G es abierto (relativo a Ω)

(c) G es cerrado (")

Como $x_0 \in \Omega$ entonces claramente $x_0 \in G \Rightarrow$ (a).

Sea $x_1 \in G$. Entonces $u(x_1) = u(x_0)$. Como Ω es abierto entonces existe $r>0$ tal que $B_r(x_1) \subset \Omega$. Por hipótesis $u(x_0) \geq u(x)$ para toda $x \in \Omega$ (ó $u(x_0) \leq u(x)$, $\forall x \in \Omega$)

Por la propiedad del promedio

$$\int_{B_r(x_1)} \underbrace{u(x_0) - u(x)}_{\geq 0} = u(x_0)|B_r| - \int_{B_r(x_1)} u(x)\,dx$$

≤ 0

$$= u(x_0)|B_r| - u(x_0)|B_r| \equiv 0.$$

prop.
del promedio

$u(x_0) - u(x) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$ continua tal que

$$\int_{B_r(x_1)} u(x_0) - u(x)\,dx = 0 \quad \forall\, B_r(x_1) \subset \Omega$$

Por el teorema de localización $u(x) = u(x_0)$ $\forall\, x \in B_r(x_1)$. $\therefore$ $B_r(x_1) \subset G$.

$\therefore$ G es abierto.

G es cerrado (ejercicio) ($G^c = \Omega \setminus G$ abierto)

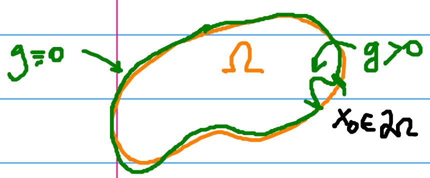
$\square$

<u>Corolario 4</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado y conexo. $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, armónica. Entonces:

(a) $\max\limits_{\bar{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$

(b) Si $\exists$ $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\bar{\Omega}} u$ entonces u es constante en $\bar{\Omega}$.

Corolario 5 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo.
$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solución de



$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega$$
$$u = g \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

donde $g \in C(\partial\Omega)$, con $g \geq 0$. Entonces $u > 0$ en Ω siempre que exista un punto $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $g(x_0) > 0$.

Dem. Por el principio débil del máximo aplicado a $-u$:

$$\min_{\Omega} u = \min_{\partial\Omega} u = \min_{\partial\Omega} g \geq 0.$$

Supongamos que $\min_{\partial\Omega} g = 0$ y que $u(x_1) = 0$ para cierto $x_1 \in \Omega$. Entonces por el corolario 4(b), $u = \text{const.} = 0$ en $\bar{\Omega}$. $\therefore$ $g = 0$ en $\partial\Omega$ contradicción con $g(x_0) > 0$, $x_0 \in \partial\Omega$.

Esto implica que • $\min_{\partial\Omega} g > 0$

ó bien, • $u(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$.

En ambos casos obtenemos la conclusión □

Corolario 6 (comparación)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo. Sean $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, armónicas. Datos en la frontera: $u_j = g_j$ sobre $\partial\Omega$
con $g_j \in C(\partial\Omega)$, $j = 1, 2$

Si $g_1 \geq g_2$ en $\partial\Omega$; y $g_1 \not\equiv g_2$ entonces

$$u_1 > u_2 \quad \text{en} \quad \Omega.$$

__Dem.__ Aplicación directa del corolario 5 con $u = u_1 - u_2$, $g = g_1 - g_2$ $\square$

Regularidad

__Definición__ (alisador de Friedrichs)

(i) Sea la función

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right), & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

donde $C > 0$ se escoge tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1.$$

Además $\eta \in C^\infty$.

(ii) Para cada $\epsilon > 0$ $\eta^\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$

η^ϵ es el alisador de Friedrichs.

$\eta^\epsilon \in C^\infty$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta^\epsilon \, dx = 1$

$\operatorname{supp} \eta^\epsilon \subset B_\epsilon(0)$

(iii) Para g integrable en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ el alisamiento de g es

$$\begin{cases} g^\epsilon(x) := (\eta^\epsilon * g)(x) = \int_\Omega \eta^\epsilon(x-y)\, g(y)\, dy \\ x \in \Omega_\epsilon := \{ y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > \epsilon \} \end{cases}$$

cambio de variables:

$$g^\epsilon(x) \underset{\substack{\downarrow \\ z = x-y}}{=} \int_{B_\epsilon(0)} \eta^\epsilon(z)\, g(x-z)\, dz$$

<u>Proposición</u>:

(a) $g^\epsilon \in C^\infty \quad \forall\, \epsilon > 0$

(b) $g^\epsilon \to g$ c.d.s. en Ω si $\epsilon \to 0^+$

(c) Si g es continua entonces $g^\epsilon \xrightarrow{u} g$ en compactos de Ω cuando $\epsilon \to 0^+$.

<u>Dem.</u> Evans, Apéndice pg. 630 (L ed.)

<u>Lema</u> (regularidad C^∞)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Sea $u \in C(\Omega)$ que satisface la prop. del promedio. Entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Dem.</u> $u^\epsilon(x) := (\eta^\epsilon * u)(x), \quad x \in \Omega_\epsilon$

con $\epsilon > 0$.

Por propiedades del alisador de Friedrichs $u^\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

$$u^\epsilon(x) = \int_\Omega \eta^\epsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\epsilon}\right) u(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \underbrace{\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y}_{= n|B_1| r^{n-1} u(x)}$$

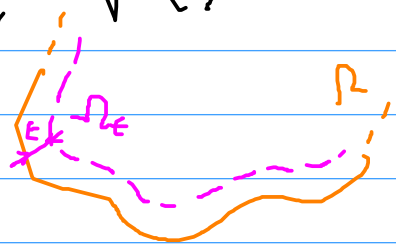
prop. del promedio

$$= u(x) \underbrace{\frac{|B_1|}{\epsilon^n} \int_0^\epsilon \eta\left(\frac{r}{\epsilon}\right) n r^{n-1}\, dr}_{= \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(x)\, dx \,=\, 1}$$

$$= u(x).$$

$$\therefore \quad u^\epsilon(x) = u(x) \quad \forall\ x \in \Omega_\epsilon, \quad \forall\ \epsilon > 0$$

$$\therefore \quad u \in C^\infty(\Omega_\epsilon), \quad \forall\ \epsilon > 0$$



$$\therefore \quad u \in C^\infty(\Omega)$$

$\square$

observación

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C(\Omega) \text{ y} \\ \text{Prop. del promedio} \\ \text{en } \Omega \end{array} \right\} \equiv \left\{ \begin{array}{l} u \text{ armónica} \\ \text{en } \Omega \end{array} \right\}$$

Lema (estimaciones del gradiente)

Sea $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ armónica, con $x_0 \in \Omega$, Ω abierto y $R > 0$ es tal que $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$.
Entonces:

$$(EG_j) \cdots \quad |u_{x_j}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u| , \quad j = 1, \ldots, n$$

$$(EG) \cdots \quad |\nabla u(x_0)| \leq \frac{n^{3/2}}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$$

Dem. $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$, armónica $\Rightarrow u \in C^\infty(B_R(x_0))$

w.l.o.g. podemos suponer $u \in C^\infty(\overline{B_R(x_0)})$ (tomando un radio menor).

$u_{x_j} \in C^\infty(B_R(x_0))$ y es armónica: $\Delta u_{x_j} = 0$ en $B_R(x_0)$

Por la propiedad del promedio:

$$u_{x_j}(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u_{x_j}(y) \, dy$$

$$= \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \operatorname{div}_x \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \; dy$$

teo. divergencia $\Rightarrow$ $$= \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) \, \hat{\nu}_j \, dS_y$$

Así:

$$|u_{x_j}(x_0)| \underset{|\hat{\nu}|\le 1}{\le} \frac{n}{\omega_n R^n} \max_{\partial B_R(x_0)} |u| \left(\int_{\partial B_R(x_0)} dS_y \right)$$

$$= \frac{n}{R} \max_{\partial B_R(x_0)} |u|$$

$$= \frac{n}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u| \Rightarrow (EG_j).$$

principio del máximo

$$|\nabla u(x_0)| = \left(\sum_{j=1}^{n} u_{x_j}(x_0)^2 \right)^{1/2}$$

$$\le \left(n \cdot \frac{n^2}{R^2} \left(\max_{\overline{B_R(x_0)}} |u| \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \frac{n^{3/2}}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u| \Rightarrow (EG)$$

$\square$

<u>Corolario</u> (teorema de Liouville)

Sea $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armónica en todo $\mathbb{R}^n$ y uniformemente acotada. Entonces u es constante.

<u>Dem</u> Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario.

u armónica en $\mathbb{R}^n \Rightarrow u$ es armónica en $B_R(x_0)$ $\forall R > 0$.

$$(EG) \Rightarrow \quad |\nabla u(x_0)| \le \frac{n^{3/2}}{R} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$$

$$\le \frac{n^{3/2}}{R} M$$

donde $|u| \le M$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. M independiente de $R>0$, $M>0$ const. uniforme.

Tomando $R \to \infty$ obtenemos $|\nabla u(x_0)| = 0$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. $\therefore$ u es constante

$\square$

Lema (estimaciones de orden alto)

Sea $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$, armónica en $B_R(x_0)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R>0$. Entonces para cualquier multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$, $|\alpha| = \sum_{j=1} \alpha_j$, con $|\alpha| = m \in \mathbb{N}$. Se tiene

$$(EOA) \cdots \quad |D^\alpha u(x_0)| \le \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{\overline{B_R(x_0)}} |u|$$

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \partial^{\alpha_2}_{x_2} \cdots \partial^{\alpha_n}_{x_n}}$$

<u>Demostración</u> Por inducción en $m \in \mathbb{N}$.

<u>$m=1$</u> : se deduce de (EG_j).

Suponemos la estimación es cierta para $m = |\alpha| \in \mathbb{N}$. Consideramos orden $m+1$.

Sea $r = (1-\theta)R \in (0,R)$, con $0<\theta<1$.
Por la est. del gradiente aplicado a

$$D^{\alpha}u = D(D^{\tilde{\alpha}}u) \quad \text{con } |\tilde{\alpha}| = m$$

$|\alpha| = m+1$

$$|D^{\alpha}u(x_0)| \leq \frac{n}{R} \max_{B_R(x_0)} |D^{\tilde{\alpha}}u|$$

Por hipótesis de inducción:

$$\max_{B_R(x_0)} |D^{\tilde{\alpha}}u| \leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

$$\leq \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

$$\Rightarrow |D^{\alpha}u(x_0)| \leq \frac{n}{r} \cdot \frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

$$r = (1-\theta)R \;\Rightarrow\; = \frac{n^{m+1} e^{m-1} m!}{(1-\theta)\,\theta^m R^{m+1}} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

Escogemos $0 < \theta := \frac{m}{m+1} < 1$

$$\frac{1}{\theta^m(1-\theta)} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{<e} (m+1) < e(m+1)$$

$$\Rightarrow \quad |D^\alpha u(x_0)| < \frac{n^{m+1} e^m (m+1)!}{R^{m+1}} \max_{B_R(x_0)} |u|$$

$\Rightarrow$ (EOA) para orden $m+1$

$\square$

<u>Teorema.</u> (regularidad de funciones analíticas)

Sea $u \in C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, tal que u $\left\{\begin{array}{l}\text{satisface la} \\ \text{prop. del promedio}\end{array}\right\}$ $\left(\{\text{armónica}\}\right)$.

Entonces u es analítica en Ω.

<u>Dem.</u> u armónica $\Rightarrow$ $u \in C^\infty(\Omega)$.

Sea $x \in \Omega$ fijo. Sea $r > 0$ tal que $B_{2r}(x) \subset \Omega$.

Sea $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $|h| \leq r$. Por expansión en serie de Taylor de orden m tenemos que

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(h_1 \partial_{x_1} + \dots + h_n \partial_{x_n}\right)^k u$$

$$+ R_m(h)$$

Residuo $\quad R_m(h) := \frac{1}{m!} \left((h_1 \partial_{x_1} + \dots + h_n \partial_{x_n})^m u \right) \Big|_{(x_1 + \theta_1 h_1, \dots, x_n + \theta_n h_n)}$

para ciertos $0 < \theta_j < 1$, $j = 1, \ldots, n$).

Por la estimación (EOA):

$$|R_m(h)| \leq \frac{n^m}{m!} \frac{|h|^m n^m e^{m-1} m!}{2^m r^m} \max_{\overline{B_{2r}(x_0)}} |u|$$

siempre que $|h| \ll 1$ suf. pequeño tal que

$$(x_1 + \theta_1 h_1, \ldots, x_n + \theta_n h_n) \in \overline{B_{2r}(x_0)}.$$

Pero esto es cierto ya que $0 < \max |\theta_j| < 1$
$|h| < r$. Así:

$$|R_m(h)| \underset{e^{m-1} \leq e^m}{\leq} \left(\frac{|h| n^2 e}{2r} \right)^m \max_{\overline{B_{2r}(x_0)}} |u|$$

Tomando $|h| \ll 1$ tal que $|h| n^2 e < r$
obtenemos

$$|R_m(h)| < \frac{1}{2^m} \max_{\overline{B_{2r}(x_0)}} |u| \to 0 \quad \text{si } m \to \infty$$

(h es independiente de m.)

La expansión de Taylor es convergente
$\forall \; x_0 \in \Omega$

$\therefore$ u es analítica en Ω

$\square$

Observación: Si u es armónica en Ω entonces $\forall\ \varphi \in C_0^2(\Omega)$ integrando por partes

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx = 0$$

$$\parallel$$

$$-\int_\Omega \underbrace{\Delta u}_{=0}\,\varphi\,dx$$

<u>Teorema</u> (Weyl)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $u \in C(\Omega)$. Si

$$\int_\Omega u\,\Delta\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in C_0^2(\Omega)$$

entonces u es armónica en Ω.

<u>Dem.</u> Tarea 3