Lección 3.4: Lemas de convergencia. Función de Green.

Lema 1 Sea $\{u_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones armónicas en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto tal que converge uniformemente a una función u en cualquier subconjunto compacto de Ω. Entonces, u es armónica en Ω. Mas aún, para cualquier multi-índice α $D^\alpha u_k$ converge uniformemente a $D^\alpha u$ en cualquier subconjunto compacto de Ω.

Dem. Para cualquier $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, es suficiente demostrar que u es armónica en $B_R(x_0)$ y que $\forall \alpha$, $D^\alpha u_k \overset{u}{\to} D^\alpha u$ en cada subconjunto compacto de $B_R(x_0)$.

$B := B_R(x_0)$, $\overline{B} \subset \Omega$. Por la propiedad del promedio, para $x \in B$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset B$ se tiene

$$u_k(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u_k(y)\, dy = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} u_k(y)\, dy$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Por convergencia uniforme, tomamos lím cuando $k \to \infty$:

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) = \frac{1}{r^{n-1}\omega_n} \int_{\partial B_r(x)} \lim_{k\to\infty} u_k(y)\, dy$$

$$= \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y$$

$\forall B_r(x) \subset B$ $\therefore$ u es armónica en B.

Por ende, $u \in C^\infty(B)$, $\forall\ B = B_R(x_0) \subset\subset \Omega$.

$\therefore$ u es armónica en Ω

$D^\alpha u$

$D^\alpha u$, $D^\alpha u_k$ son armónicas en Ω:

$$|D^\alpha u_k(x)| \leq C(|\alpha|, r) \max_{\overline{B_r(x)}} |u_k|$$

$$|D^\alpha u(x)| \leq C(|\alpha|, r) \max_{\overline{B_r(x)}} |u|$$

(estimaciones de orden alto).

Por convergencia uniforme de u_k obtenemos convergencia uniforme $D^\alpha u_k \overset{u}{\to} D^\alpha u$ en B.

$\square$

<u>Lema 2</u> Sea $\{u_k\}$ sucesión de funciones armónicas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y <u>acotado</u>, con valores continuos en $\partial\Omega$, $u_k|_{\partial\Omega} = g_k \in C(\partial\Omega)$, que convergen uniformemente en $\partial\Omega$, $g_k \to g \in C(\partial\Omega)$. Entonces, la sucesión $\{u_k\}$ converge uniformemente en Ω a una función armónica u y además $u|_{\partial\Omega} = g$.

<u>Dem.</u> Para cualesquiera $j, k \in \mathbb{N}$, $u_j - u_k$ es armónica. Por el principio del máximo

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq \sup_{\partial\Omega} |g_j - g_k| \quad \cdots (1)$$

$\forall x \in \overline{\Omega}$. (uniformemente en Ω.)

Por convergencia uniforme de $\{g_k\}$ concluimos que $\{u_k\}$ es uniformemente de Cauchy, y converge uniformemente a $u \in C(\Omega)$.
Lema 1 $\Rightarrow$ u es armónica en Ω.

Además, aplicando (1) con $x \in \partial\Omega$ obtenemos

$$u_{|\partial\Omega} = \lim_{k\to\infty} u_{k\,|\partial\Omega} = \lim_{k\to\infty} g_k = g \in C(\partial\Omega)$$

$\square$

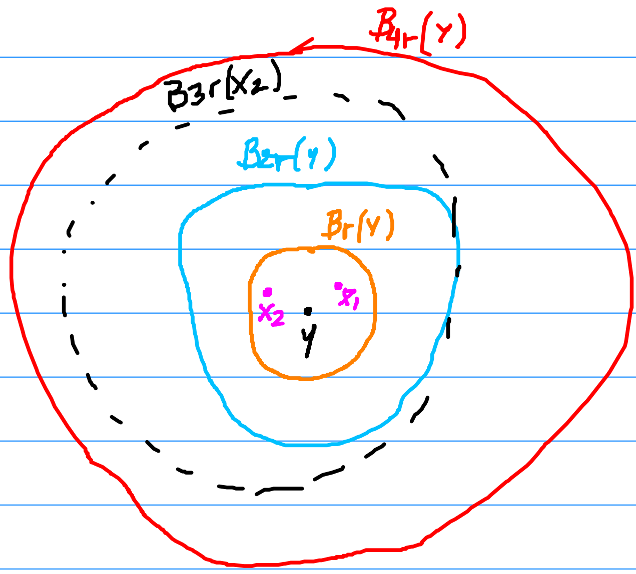
Lema (desigualdad de Harnack, versión 1)
Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, u armónica en Ω, no negativa $u \geq 0$. Entonces para cualquier subdominio acotado, $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe una constante $C = C(n, \Omega', \Omega) > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u \quad \cdots (2)$$

Dem. Sean $y \in \Omega$, $r > 0$ tales que $B_{4r}(y) \subset \Omega$.
Sean $x_1, x_2 \in B_r(y)$. Por la propiedad del promedio tenemos:

$$u(x_1) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_1)} u(x)\,dx \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(y)} u(x)\,dx$$

$B_r(x_1) \subset B_{4r}(y) \subset \Omega$ $\qquad$ $B_r(x_1) \subset B_{2r}(y)$



$$u(x_2) = \frac{n}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{3r}(x_2)} u(x)\, dx$$

$B_{3r}(x_2) \subset B_{4r}(y) \subset \Omega$

$$\geq \frac{n}{\omega_n (3r)^n} \int_{B_{2r}(y)} u(x)\, dx$$

Así,

$$u(x_1) \leq \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_{2r}(y)} u(x)\, dx \leq 3^n u(x_2)$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in B_r(y).$$

obtenemos,

$$\sup_{B_r(y)} u \leq 3^n \inf_{B_r(y)} u \qquad \cdots (3)$$

Sea $\Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces $\overline{\Omega'}$ es compacto, y escogemos x_2, x_1 tales que

$$u(x_1) = \sup_{\Omega'} u \,, \qquad u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$$

Sea $\Gamma \subset \overline{\Omega}'$ una trayectoria cerrada simple que conecta x_1 con x_2. Sea $R>0$ tal que $4R < \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$ (Γ es un compacto).

$\exists$ cubierta abierta finita $\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_R(\tilde{x}_j)$

donde N depende de Ω y Ω'.

Aplicando (3) en cada bola obtenemos

$$u(x_1) \leq 3^{nN} u(x_2)$$

$\square$

Teorema (de convergencia de Harnack)
Sea $\{u_k\}$ una sucesión monótonamente creciente de funciones armónicas en Ω, abierto. Supongamos que en un cierto punto $y \in \Omega$ la sucesión $\{u_k(y)\} \subset \mathbb{R}$ es acotada. Entonces, $\{u_k\}$ converge uniformemente en cualquier subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ a una función armónica u en Ω.

Dem. La sucesión de números reales $\{u_k(y)\} \subset \mathbb{R}$ es monótona creciente y acotada. Por lo tanto converge. Entonces $\forall \varepsilon > 0$ arbitrario existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq u_k(y) - u_j(y) < \varepsilon \qquad \forall\, k \geq j \geq N(\varepsilon)$$

Por la desigualdad de Harnack para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$ se tiene que

$$\sup_{\Omega'} |u_k - u_j| \leq C \inf_{\Omega'} |u_k - u_j| < C\epsilon$$

Por lo tanto, $\{u_k\}$ converge uniformemente en Ω' a una función armónica u en Ω (lema 1) $\square$

Teorema (compacidad)

Sea $\{u_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones armónicas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, tal que es uniformemente acotada en cada subconjunto compacto de Ω. Entonces, existe una subsucesión $\{u_{k'}\}$ que converge uniformemente a u armónica en Ω en todo subconjunto compacto de Ω.

Dem. Sea $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$, u armónica y uniformemente acotada por $M > 0$ en $B_{2r}(x_0)$. Por estimación del gradiente

$$|u(x) - u(x_0)| \leq \left(\sup_{B_r(x_0)} |\nabla u| \right) |x - x_0| \leq \frac{nM}{r} |x - x_0|$$

est. del gradiente

$\forall\ x \in B_r(x_0)$.

Sea $K \subset \Omega$, K compacto. $d(K, \partial\Omega) = \inf_{x \in K} d(x, \partial\Omega) > 0$

K compacto

Ω abierto.

Tomamos $r = \frac{1}{3} d(K, \partial\Omega)$.

El conjunto

$$K_{2r} := \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 2r \}$$

es compacto y $K_{2r} \subset \Omega$.

La sucesión $\{u_k\}$ es uniformemente acotada por $M < \infty$ en K_{2r}. Sean $x_0, x \in K$ tales que $|x - x_0| < r$. Es decir, $x \in B_r(x_0)$, $|u_k| \leq M$ en $B_{2r}(x_0) \subset K_{2r}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Por la estimación,

$$|u_k(x) - u_k(x_0)| \leq \frac{nM}{r} |x - x_0|, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es decir, la sucesión es equicontinua en K.

Escogemos conjuntos compactos

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \Omega$$

cuyos interiores cubren Ω: $\Omega \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathring{K}_j$

Como $\{u_k\}$ es equicontinua en K_1, por el teorema de Arzelá-Ascoli, $\exists$ subsucesión $\{u_k\}$ que converge uniformemente en K_1. Aplicando nuevamente Arzelá-Ascoli existe subsucesión $\{u_k\}$ que converge uniformemente en K_2.

Por el proceso diagonal de Cantor (los elementos de la diagonal de cada subsucesión es en sí una subsucesión), existe una subsucesión $\{u_{k'}\}$ que converge uniformemente en cada K_j, $\forall j \in \mathbb{N}$. Así, $\{u_{k'}\}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω a una función armónica en Ω (lema 1) $\square$

Función de Green

Solución fundamental

$$\Phi(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log|x-y| , & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} , & n \geq 3 \end{cases}$$

$x \neq y$, $x,y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto.

Satisface: (a) $\Delta_x \Phi = 0$ si $x \neq y$

(b) $\forall \varphi \in C_0^2(\Omega)$, $y \in \Omega$,

$$\varphi(y) = -\int_\Omega \Phi(x,y) \Delta_x \varphi \, dx$$

Nota: La solución fundamental no es única en el sentido siguiente: $\Phi(x,y) + w(x)$ con $w(x)$ armónica en Ω, también satisface (a) y (b). (ejercicio, -fácil-).

objetivo: encontrar una fórmula para la solución a la ecuación de Poisson con datos de Dirichlet en la frontera

$$(1) \quad \cdots \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ son conocidas.

Lema (fórmula integral)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega$, C^1 por pedazos. Sea $y \in \Omega$ y supongamos que $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Entonces,

$$u(y) = -\int_\Omega \Phi(x,y)\, \Delta_x u \, dx \; +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu_x} - u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_x}(x,y) \right] dS_x \quad \cdots (2)$$

?

Dem. Para $n \geq 3$ (la demostración para $n=2$ es análoga, ejercicio).

Sea $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \overline{B_\epsilon(y)}$, con $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(y) \subset \Omega$.

$\Delta_x \Phi(x,y) = 0$ en Ω_ϵ

Por fórmula de Green:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \Phi(x,y)\,\Delta_x u \, dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[\Phi(x,y)\,\partial_{\hat\nu_x} u - u(x)\,\partial_{\hat\nu_x} \Phi(x,y) \right] dS_x$$

Recordatorio: $\Phi(x,y)$ es integrable en $B_\epsilon(y)$ y $\int_{B_\epsilon(y)} \Phi(x,y)\,dx \approx \frac{\epsilon^2}{2(n-2)} \to 0$ si $\epsilon \to 0^+$.

Así:

$$\int_\Omega \Phi(x,y)\,\Delta_x u \, dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\Omega_\epsilon} \Phi(x,y)\,\Delta_x u\, dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \left[\Phi(x,y)\,\partial_{\hat\nu_x} u - u(x)\,\partial_{\hat\nu_x} \Phi(x,y) \right] dS_x$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(x,y)\,\partial_{\hat\nu_x} u - u(x)\,\partial_{\hat\nu_x} \Phi(x,y) \right] dS_x$$

$$- \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{\partial B_\epsilon(y)} \left[\Phi(x,y)\,\partial_{\hat\nu_x} u - u(x)\,\partial_{\hat\nu_x} \Phi(x,y) \right] dS_x$$

Por definición de Φ:

$$\left| \int_{\partial B_\epsilon(y)} \Phi(x,y)\,\partial_{\hat\nu} u \, dS_x \right| = \left| \int_{\partial B_\epsilon(y)} \frac{\epsilon^{2-n}}{\omega_n (n-2)}\,\partial_{\hat\nu} u \, dS_x \right|$$

$$\leq \frac{\epsilon^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \cdot \epsilon^{n-1}\omega_n \sup_{\partial B_\epsilon(y)} |\nabla u|$$

$$= \frac{\epsilon}{\omega_n(n-2)} \sup_{\partial B_\epsilon(y)} |\nabla u| \longrightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon\to 0^+.$$

$u \in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$.

$$\int_{\partial B_\epsilon(y)} u(x)\, \partial_{\nu_x} \Phi(x,y)\, dS_x =$$

$x = y + \epsilon\eta$

$dS_x = \epsilon^{n-1} dS_\eta$

$$= \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-2)\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(y+\epsilon\eta) \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\right)\Big|_{\rho=\epsilon} dS_\eta$$

$$= -\frac{\epsilon^{n-1}}{(n-2)\omega_n} \cdot \frac{(n-2)}{\epsilon^{n-1}} \int_{|\eta|=1} u(y+\epsilon\eta)\, dS_\eta$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(y+\epsilon\eta)\, dS_\eta \to -u(y) \quad \text{si } \epsilon \to 0$$

obtenemos (2). $\square$

La fórmula (2) nos provee de una fórmula para la solución si se conoce $\partial_\nu u$ en $\partial\Omega$. Idea: reemplazar Φ por $\Phi + w$, w armónica, para hacer desaparecer el término no conocido.

Sea $\Gamma = \Gamma(x,y)$, la solución al problema

$$(3) \ldots \begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0, & y \in \Omega \\ \Gamma(x,y)\big|_{y\in\partial\Omega} = \Phi(x,y) \end{cases}$$

para $x \in \Omega$ fijo.

Por el momento supongamos que existe una solución $\Gamma(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, al problema (3).

Por la fórmula de Green:

$$-\int_\Omega \Gamma(x,y)\, \Delta_y u \; dy = \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\, \partial_{\nu_y} \Gamma(x,y) - \Gamma(x,y)\, \partial_{\nu_y} u \right] dS_y$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\, \partial_{\nu_y} \Gamma(x,y) - \Phi(x,y)\, \partial_{\nu_y} u \right] dS_y$$

Por la fórmula (2):

$$u(x) \underset{(2)\; x \leftrightarrow y}{=} -\int_\Omega \Phi(y,x)\, \Delta_y u \; dy \; +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(y,x)\, \partial_{\nu_y} u - u(y)\, \partial_{\nu_y} \Phi(y,x) \right] dS_y$$

$\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$

$$= -\int_\Omega \Phi(x,y)\, \Delta_y u \; dy \; +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} u(y)\, \partial_{\nu_y} \Gamma(x,y) \; dS_y$$

$$+ \int_\Omega \Gamma(x,y)\, \Delta_y u \; dy$$

$$- \int_{\partial\Omega} u(y)\, \partial_{\nu_y} \Phi(x,y) \; dS_y$$

Por lo tanto:

$$u(x) = -\int_\Omega G(x,y)\,\Delta_y u\,dy$$
$$\quad - \int_{\partial\Omega} u(y)\,\partial_{\nu_y} G(x,y)\,dS_y$$

donde $G(x,y) := \Phi(x,y) - \Gamma(x,y)$, $\quad x,y \in \Omega$, $x \neq y$

G se conoce como la <u>función de Green</u> asociada al dominio Ω.

obtenemos así una fórmula para la solución al problema de Dirichlet:

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\,f(y)\,dy - \int_{\partial\Omega} g(y)\,\partial_{\nu_y} G(x,y)\,dS_y$$

siempre y cuando podamos construir la función de Green G para Ω.