Lección 3.5: Propiedades de la función de Green. Función de Green para la bola.

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto acotado. Problema de Dirichlet:

$$(1) \dots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ conocidas.

Sol. fundamental:

$$(2) .- \Phi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |x-y|, & n = 2 \\ \dfrac{1}{(n-2)\omega_n} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

$x, y \in \Omega$, $x \neq y$. $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$

Prob. auxiliar: Hallar $\Gamma(x,y)$ solución

$$(3) \dots \begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0, & y \in \Omega \\ \Gamma(x,y) = \Phi(x,y), & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

para $x \in \Omega$, fijo.

Función de Green: $G(x,y) := \Phi(x,y) - \Gamma(x,y)$

$x, y \in \Omega$, $x \neq y$

Cond. necesaria para la solución de (1):

(4) ... $$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} dS_y$$

si podemos resolver (3).

Nota: Resolver (3) no es trivial.

Propiedades de la función de Green

Lema 1 (unicidad)
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado. Si la función de Green existe entonces es única.

Dem. Sean $G_j(x,y)$, $j=1,2$ dos funciones de Green para el mismo dominio Ω.

$$\therefore \quad \Phi(x,y) = G_1(x,y) + \Gamma_1(x,y) = G_2(x,y) + \Gamma_2(x,y)$$

donde Γ_j son soluciones al pbo. (3).

Así,
$$\left.\begin{aligned} G_1(x,y) - G_2(x,y) &= \Gamma_2(x,y) - \Gamma_1(x,y) \\ G_2(x,y) - G_1(x,y) &= \Gamma_1(x,y) - \Gamma_2(x,y) \end{aligned}\right\} (*)$$

Las funciones del lado derecho de (*) son armónicas en $y \in \Omega$, incluyendo $x \in \Omega$ ..

Por el principio débil del máximo:

$$G_1(x,y) - G_2(x,y) \leq \sup_{y\in\partial\Omega} \left(\Gamma_2(x,y) - \Gamma_1(x,y) \right)$$

$$= \sup_{y\in\partial\Omega} \left(\Phi(x,y) - \Phi(x,y) \right) = 0$$

con $x \in \Omega$ fijo.

$\therefore \quad 0 \leq \left| G_1(x,y) - G_2(x,y) \right| \leq 0 \qquad \forall\, y \in \Omega,\ x \in \Omega$

$\therefore \quad G_1(x,y) = G_2(x,y) \qquad$ unicidad

$\square$

Lema 2 (simetría)
Para todo par $x,y \in \Omega$, $x \neq y$, se tiene que
$G(x,y) = G(y,x)$.

Dem. Ejercicio: tomar $\epsilon > 0$ tal que

$$B_\epsilon(x) \subset \Omega, \quad B_\epsilon(y) \subset \Omega, \quad B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y) = \phi$$

Aplicar la fórmula de Green a

$$v(z) := G(x,z), \qquad z \in \Omega_\epsilon$$
$$w(z) := G(y,z), \qquad \text{"}$$

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \left(\overline{B_\epsilon(x) \cup B_\epsilon(y)} \right)$$

Probar que $v(y) = w(x)$. .

$\square$

Lema 3 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado. $x, y \in \Omega$, $x \neq y$

Entonces:

(a) $0 < G(x,y) < \Phi(x,y)$ si $n \geq 3$

(b) $0 < G(x,y) < \Phi(x,y) + \frac{1}{2\pi} \log\left(\operatorname{diam}(\Omega)\right)$ si $n = 2$.

$$0 < \operatorname{diam}(\Omega) = \sup\{|x-y| : x, y \in \Omega\} < \infty$$

Dem. Sea $x \in \Omega$, fijo. Definimos $\tilde{G}(y) = G(x,y)$. $y \in \Omega$.

Dado que $\lim_{y \to x} \tilde{G}(y) = \infty$, entonces existe un radio $R > 0$ tal que $\tilde{G}(y) > 0$ en $\overline{B_R(x)}$.

Observamos que:

- $\tilde{G}$ es armónica en $y \in \Omega \setminus \overline{B_R(x)}$
- $\tilde{G} = 0$ sobre $y \in \partial\Omega$.
- $\tilde{G} > 0$ si $y \in \partial B_R(x)$.

Por el principio del máximo: $\tilde{G}(y) > 0$ $\forall y \in \Omega \setminus \overline{B_R(x)}$

Concluimos que $G(x,y) > 0$ $\forall x, y \in \Omega$, $x \neq y$, $n \geq 2$.

Si $n \geq 3$ $\Phi(x,y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$, $x \neq y$.
$$> 0$$

Si $y \in \partial\Omega$ entonces $\Phi(x,y) = \Gamma(x,y) > 0$

$\Gamma(x,y)$ es armónica en $y \in \Omega$

$\therefore$ por el principio del máximo $\Gamma(x,y) > 0 \quad \forall\, y \in \Omega$.

$$\therefore \quad \Gamma(x,y) = \Phi(x,y) - G(x,y) > 0 \quad \forall\, \begin{matrix} y \in \Omega \\ x \neq y \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ (a).

Si $n=2$ entonces
$$\Phi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\log|x-y| > -\frac{1}{2\pi}\log(\text{diam}(\Omega))$$

Si $y \in \partial\Omega$ entonces $\Gamma(x,y) = \Phi(x,y) > -\frac{1}{2\pi}\log(\text{diam}\,\Omega)$

La función $\Gamma(x,y) + \frac{1}{2\pi}\log(\text{diam}(\Omega))$ es armónica en $y \in \Omega$. Por el principio del máximo

$$\Gamma(x,y) + \frac{1}{2\pi}\log(\text{diam}(\Omega))$$
$$= \Phi(x,y) - G(x,y) + \frac{1}{2\pi}\log(\text{diam}(\Omega)) > 0$$

$\Rightarrow$ (b) $\square$

Función de Green para la bola

$\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, conexo.

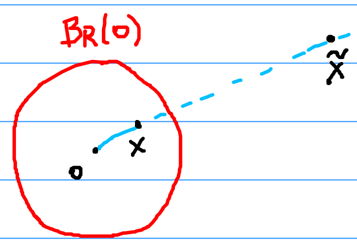
$R > 0$ fijo.

Método de las imágenes: remover la singularidad dentro de la bola tomando la imagen con respecto a ∂B_R.

Sea $x \in B_R(0)$ fijo. Γ es la solución a

$$(1)\ldots \begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0, & y \in B_R(0) \quad (|y|<R) \\ \Gamma = \Phi(x,y), & y \in \partial B_R(0) \quad (|y| = R) \end{cases}$$

$\phi := \Phi - \Gamma$.



$$\tilde{x} := \frac{R^2}{|x|^2} x$$

$x \neq 0$

$$|\tilde{x}| > R$$

El mapeo $y \longmapsto \Phi(\tilde{x}, y)$ es armónico, suave en $B_R(0)$ y ya no es singular, $\tilde{x} \notin B_R(0)$.

Además, es fácil demostrar que para cada $0<\rho<1$ y $y \in B_R(0)$ el mapeo $y \mapsto \Phi(\rho\tilde{x}, \rho y)$ es armónico (suave) en $B_R(0)$.

La idea es escoger ρ adecuadamente de manera que $\Gamma = \Phi$ sobre $\partial B_R(0)$.

Lema Sea $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$. Entonces la función

$$\Gamma(x,y) = \Phi\left(\frac{|x|}{R}\tilde{x}, \frac{|x|}{R} y\right) = \Phi\left(\frac{R}{|x|} x, \frac{|x|}{R} y\right) \quad \ldots (2)$$

es armónica en $y \in B_R(0)$ y además $\Gamma(x,y)\big|_{|y|=R} = \Phi(x,y)$. Γ resuelve (1).

Dem. Por la observación, claramente Γ es armónica en $y \in B_R(0)$ (con $\rho = |x|/R \in (0,1)$)

Sea $y \in \partial B_R(0)$, $|y| = R$. Entonces :

$$|x|^2 |y - \tilde{x}|^2 = |x|^2 \left(|y|^2 - 2(\tilde{x} \cdot y) + |\tilde{x}|^2 \right)$$

$$= |x|^2 \left(R^2 - 2(x \cdot y)\frac{R^2}{|x|^2} + \frac{R^4}{|x|^2} \right)$$

$$= R^2 |x - y|^2$$

Si $|y| = R$ entonces $|x - y| = \frac{|x|}{R} |\tilde{x} - y|$

$$\Gamma(x,y) = \Phi\left(\frac{|x|}{R}\tilde{x}, \frac{|x|}{R} y \right)$$

$$= \Phi\left(\left| \frac{|x|}{R}\tilde{x} - \frac{|x|}{R} y \right| \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{|x|}{R} |\tilde{x} - y| \right) = \Phi(|x - y|) = \Phi(x,y)$$

$\square$

Corolario (función de Green para la bola)

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\left(\log|x-y| - \log\left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right| \right), & n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n} - \left| \frac{R}{|x|}x - \frac{|x|}{R}y \right|^{2-n} \right), & n \geq 3 \end{cases}$$

es la función de Green para $\Omega = B_R(0)$, $n \geq 2$.

Lema Sea G la función de Green para $B_R(0)$, $n \geq 2$. Entonces $\forall x \in B_R(0)$, $\forall y \in \partial B_R(0)$,

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = -\frac{(R^2 - |x|^2)}{\omega_n R\, |x-y|^n}$$

Dem. Ejercicio. $\square$

Fórmula de Poisson

Sea el problema

$$(3)\ldots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } B_R(0) \\ u = g & \text{sobre } \partial B_R(0) \end{cases}$$

con $f \in C(B_R(0))$, $g \in C(\partial B_R(0))$.

Fórmula:

$$u(x) = \int_{B_R(0)} G(x,y)\, f(y)\, dy - \int_{\partial B_R(0)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}\, dS_y$$

Teorema 1 $(f=0)$

$$(4)\ldots \quad u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\, g(y)\, dS_y, & \text{si } |x| < R \\ g(x), & \text{si } |x| = R \end{cases}$$

donde $K(x,y) = \dfrac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R\, |x-y|^n}$ núcleo de Poisson es de clase $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^\infty(B_R(0))$ y es solución de $\Delta u = 0$ en $B_R(0)$, $u = g$ sobre $\partial B_R(0)$.

Teorema 2

(5) ... $$u(x) = \begin{cases} \int_{B_R(0)} G(x,y) f(y)\, dy + \int_{\partial B_R(0)} K(x,y) g(y)\, dS_y & |x| < R \\ g(x) \text{ si } & |x| = R \end{cases}$$

es $C(\overline{B_R(0)}) \cap C^2(B_R(0))$ y solución de $-\Delta u = f$ en $B_R(0)$, $u = g$ sobre $\partial B_R(0)$.

(4) se conoce como fórmula de Poisson.

Lema (propiedades del núcleo de Poisson)

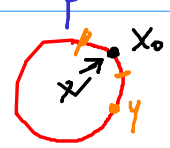
(a) $K \in C^\infty$ si $|x| < R$, $|y| = R$ $(x \neq y)$

(b) $\Delta_x K(x,y) = 0$ para $|x| < R$, $|y| = R$.

(c) $$\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\, dS_y = 1, \quad \forall\, |x| < R$$

(d) $K(x,y) > 0$ si $|x| < R$, $|y| = R$.

(e) Si $|x_0| = R$ entonces
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ |x| < R}} K(x,y) = 0, \quad |y| = R$$
uniformemente para y $|y - x_0| > \delta > 0$.



Dem. Para $|x|<R$, $|y|=R$ φ es armónica

$\therefore \quad \Delta_x K(x,y) = -\frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\Delta_x \varphi(x,y)\right) = 0$

K es armónica en $x \in B_R(0)$ $\therefore K \in C^\infty$
$\Rightarrow$ (a), (b)

(d) es evidente por inspección.

(e) Si $|x_0-y|>\delta>0$, $|x_0|=R$, entonces

$$0 \leq \lim_{\substack{x\to x_0\\|x|<R}} \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R\,|x-y|^n} < \underbrace{\lim_{\substack{x\to x_0\\|x|<R}} \frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R\,\delta^n}}_{\downarrow\ 0 \text{ si } x\to x_0}$$

$\therefore$ (e).

(c) Ejercicio de Cálculo.

Prueba indirecta: u solución de

$$(*)\quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B_R(0) \\ u = 1 & \text{sobre } \partial B_R(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x) = \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\, dS_y$$

Pero $u(x)\equiv 1$ es la única solución de $(*)$.
$\Rightarrow$ (c) $\square$

Nota: La fórmula de Poisson se puede escribir

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{|y|=R} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, dS_y$$

Haciendo $x=0$:

$$\underset{u=g \text{ en } \partial B_R(0)}{u(0)} = \frac{R}{\omega_n} \int_{|y|=R} \frac{u(y)}{R^n} \, dS_y$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y|=R} u(y) \, dS_y$$

propiedad del promedio.

Ejercicio: aplicar lema para demostrar Teorema 1 y teorema 2 (Evans).

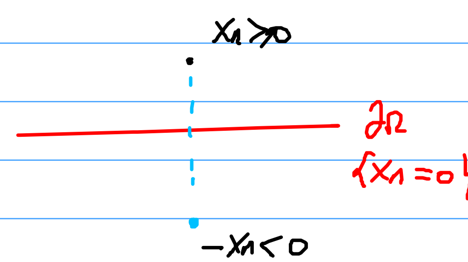
Función de Green para el semiplano

Ejemplo: $\Omega = \mathbb{R}^n_+ = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0 \}$

no es acotado.

$\partial\Omega = \{ x_n = 0 \}$.

Método de las imágenes:



$x \in \mathbb{R}^n_+ \quad (x_n > 0) \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}(x) := (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$

Función de Green:

$$G(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(\tilde{x}(x), y) \qquad \cdots (1)$$

(2) - $$\left.\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\right|_{y \in \partial\mathbb{R}^n_+} = -\frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n} \qquad \text{(ejercicio)}$$

$n \geq 2$

Núcleo de Poisson:

$$K(x,y) := \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n} \qquad \cdots (3)$$

<u>Teorema</u> Sea $g \in C(\partial\mathbb{R}^n_+)$ y <u>acotada</u>.

Definimos

(4) -- $$u(x) = \begin{cases} \dfrac{2x_n}{\omega_n} \displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, dS_y, & x \in \mathbb{R}^n_+ \\ g(x), & x \in \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Entonces:

(a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ y es acotada.

(b) $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n_+$

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

Es decir, u es solución de $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & \text{sobre } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$

Dem. Para cada $x \in \mathbb{R}^n_+$ fijo el mapeo $y \mapsto \tilde{G}(y) = G(x,y)$ es armónico en $y \in \mathbb{R}^n_+$ para $x \neq y$.

Por definición: $G(x,y) = G(y,x)$; en efecto,

$$|\tilde{x}(x) - y|^2 = \sum_{j \neq n} (x_j - y_j)^2 + (-x_n - y_n)^2$$
$$= |x - \tilde{y}(y)|^2$$

$$\tilde{y}(y) = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n)$$

$$\therefore \; G(x,y) = \Phi(x,y) - \Phi(\tilde{x}(x), y)$$
$$= \Phi(y,x) - \Phi(x, \tilde{y}(y))$$
$$= \Phi(y,x) - \Phi(\tilde{y}(y), x) = G(y,x).$$

G es simétrica.

$\therefore$ el mapeo $x \mapsto G(x,y)$ es armónico como función de $x \in \mathbb{R}^n_+$ para $y \in \mathbb{R}^n_+$ fijo y $x \neq y$.

En particular, el mapeo

$$x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = K(x,y), \qquad y \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

es armónico en $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Es posible demostrar que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS_y = 1 \qquad \forall\, n\geq 2$$
$$\forall\, x\in\mathbb{R}^n_+$$

[ejercicio de cálculo].

Como g es acotada:

$$|u(x)| = \left| \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, g(y)\, dS_y \right|$$
$$\underset{\substack{K>0\\ |g|\leq C}}{\leq} C \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS_y = C$$

K es suave y

$$\partial^2_{x_j} u = \frac{2}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{x_n}{|x-y|^n} \right) dS_y$$

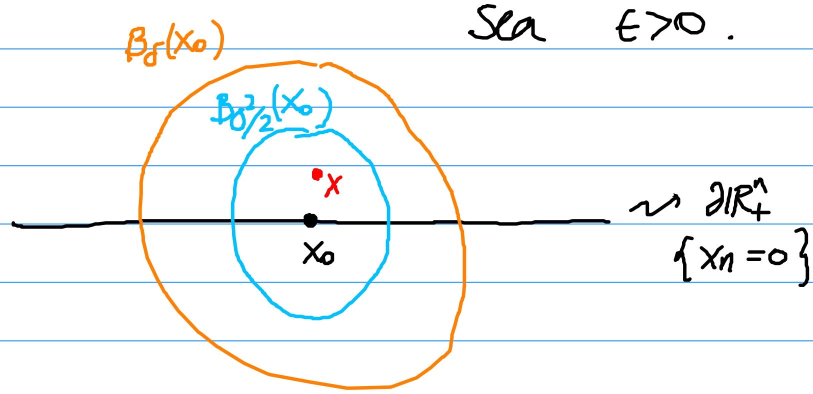
$$\Rightarrow \quad \Delta_x u = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Delta_x K(x,y)\, g(y)\, dS_y \underset{K \text{ armónica}}{=} 0$$

$\therefore$ u es acotada, armónica en $\mathbb{R}^n_+$

$\Rightarrow$ (a), (b).

Prueba de (c): Sea $x_0 \in \partial \mathbb{R}^n_+$.

Sea $\epsilon > 0$.



Por continuidad de $g \in C(\partial \mathbb{R}^n_+)$ existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon, x_0) > 0$ tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \epsilon \quad \text{si} \quad |x_0 - y| < \delta_1 \quad \forall\, y \in \partial \mathbb{R}^+_n$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n_+$ tal que $|x - x_0| < \dfrac{\delta^2}{2}$

con $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \min\{1, \delta_1(\epsilon, x_0)\}$.

Entonces:

$$|u(x) - g(x_0)| = \left| \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)\,(g(y) - g(x_0))\, dS_y \right|$$

$$\leq I_1 + I_2$$

con $$I_1 := \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \cap B_\delta(x_0)} K(x,y)\,|g(y) - g(x_0)|\, dS_y$$

$$\leq \epsilon \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS_y = \epsilon$$

$$I_2 := \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)}} K(x,y)\,|g(y)-g(x_0)|\, dS_y$$

$$\leq 2C \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)}} \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x-y|^n}\, dS_y$$

$\delta < 1 \quad \therefore \quad$ si $y \in \partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)}$ entonces

$$|x_0 - y| \geq \delta > \delta^2$$

$$\therefore \quad |x_0-y| \leq |x_0 - x| + |x-y| \leq \frac{\delta^2}{2} + |x-y|$$

$$< \frac{1}{2}|x_0-y| + |x-y|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}|x_0-y| < |x-y|$$

Así,

$$I_2 \leq \frac{C\,2^{n+2}}{\omega_n} |x_n| \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)}} \frac{dS_y}{|x_0-y|^n}$$

$$\underset{\substack{x \in B_{\delta^2/2}(x_0) \\ x_0 \in \partial \mathbb{R}^n_+}}{\leq} \frac{C\,2^{n+2}}{\omega_n} \delta^2 \int_{\partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)}} \frac{dS_y}{|x_0-y|^n}$$

cálculo explícito:

$$y \in \partial \mathbb{R}^n_+ \setminus \overline{B_\delta(x_0)} \quad \Rightarrow \quad y_n = 0, \quad \sum_{j \neq n} |y_j - x_0^{(n)}| < \delta$$

Sea $z = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+ / \overline{B_\delta(x_0)}} \frac{dS_y}{|x_0-y|^n} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus \overline{B_\delta(0)}} \frac{dz}{|z|^n}$$

$$= \int_\delta^\infty \int_{|z|=\rho} \frac{dS_z}{\rho^n}\, d\rho$$

$$= \int_\delta^\infty \frac{1}{\rho^2} \int_{|\eta|=1} dS_\eta \quad d\rho$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{\delta}$$

$$\Rightarrow \quad I_2 \leq C 2^{n+1} \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \delta$$

Tomando $0 < \delta < \min\left\{ 1, \delta_1, \dfrac{\epsilon\, \omega_n}{2^{n+1} C\, \omega_{n-1}} \right\}$

$$\Rightarrow \quad I_2 \leq \epsilon$$

Para todo $\epsilon > 0$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta^2/2$, $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$ con $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$ entonces

$$|u(x) - g(x_0)| < 2\epsilon \quad \Rightarrow \quad (c)$$

$\square$