Lección 3.6: Función de Neumann. Principio de Dirichlet. Problemas exteriores.

Errata: Añadir las siguientes hipótesis:
- Desigualdad de Harnack: Ω' conexo.
- Teo. de convergencia de Harnack: Ω conexo.

(Lección 3.5)

Función de Neumann

Problema de Neumann:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.

Sabemos:
- La solución de (1) es única módulo una constante.
- El problema (1) estará bien planteado sólo cuando se cumple la condición:

$$\int_\Omega f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \, dS_x \quad \dots (2)$$

Idea: imitar la función de Green.

Sea $\Gamma = \Gamma(x,y)$ la solución a:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0, & y \in \Omega \\ \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}, & y \in \partial\Omega \end{cases} \qquad x \in \Omega \text{ fijo}$$

La condición (2) para el problema (3), es

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}\, dS_y = 0.$$

Pero esto no se cumple en general: sustituyendo $u(x) \equiv 1$ en la fórmula integral

$$u(x) = -\int_{\Omega} \Phi(x,y)\, \Delta_y u \, dy +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x,y) \right] dS_y$$

obtenemos $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}\, dS_y = -1.$

Modificamos el problema (3): $\Gamma = \Gamma(x,y)$ solución de

$$(4) - \begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0, & y \in \Omega \\ \dfrac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu_y} + \dfrac{1}{|\partial\Omega|}, & y \in \partial\Omega \end{cases} \qquad x \in \Omega \text{ fijo}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $0 < |\partial\Omega| < \infty$.

$$|\partial\Omega| = \int_{\partial\Omega} dS_y$$

Así,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_y}\, dS_y = -1 + \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} dS_y = 0.$$

$\therefore$ se cumple (2) para el prob. (4).

Supongamos que $\exists$ solución $\Gamma = \Gamma(x,y)$ al problema (4) $\forall$ $x \in \Omega$ fijo.

La función de Neumann asociada al dominio Ω se define como

$$(5) \cdots \quad N(x,y) := \Phi(x,y) - \Gamma(x,y), \qquad x,y \in \Omega,\ x \neq y$$

Notamos que $\dfrac{\partial N}{\partial \nu_y} = -\dfrac{1}{|\partial\Omega|}$.

Aplicando el teorema de Green

$$\underbrace{u(x) - \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} u(y)\, dS_y}_{C \text{ constante}} = \int_{\partial\Omega} g(y) N(x,y)\, dS_y + \int_{\Omega} N(x,y) f(y)\, dy$$

La solución de (1) es de la forma

$$\int_{\partial\Omega} g(y) N(x,y)\, dS_y + \int_{\Omega} f(y) N(x,y)\, dy + C_0$$

con C_0 constante.

Principio de Dirichlet

Problema de Dirichlet

$$(1) \ldots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.

Lema (unicidad) Si existe $u \in C^2(\bar{\Omega})$ al problema (1) entonces es única.

Dem. Sean u_1, u_2 dos soluciones de (1).
Por lo tanto $v := u_1 - u_2 \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución de

$$(2) \ldots \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$0 = -\int_\Omega v \Delta v \, dx = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$$

$v \in C^2(\bar{\Omega})$, $\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx = 0 \Rightarrow \nabla v \equiv 0$ en Ω

$v = 0$ sobre $\partial\Omega$ $\therefore$ $v \equiv 0$ en $\bar{\Omega}$ $\square$

Energía "cinética" : $\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx$.

Para el problema (1) definimos

$$(3) \cdots \quad I[u] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega uf \, dx$$

E. cinética   E. potencial.

clase de funciones admisibles :

$$(4) \cdots \quad \mathcal{Q}_g := \{ u \in C^2(\bar{\Omega}) : u = g \text{ sobre } \partial\Omega \}$$

<u>Teorema</u> (principio de Dirichlet)

Supongamos que $u \in \mathcal{Q}_g$ es solución de

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{Q}_g} I[w]$$

Entonces u es solución de (1). Inversamente: suponiendo que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución de (1) entonces $I[u] = \min_{w \in \mathcal{Q}_g} I[w]$.

Dem. "$\Leftarrow$" Sea $w \in \mathcal{Q}_g$. Supongamos $u \in C^2(\bar{\Omega})$ es solución de (1)

$$0 \underset{(1)}{=} \int_\Omega (-\Delta u - f)(u-w) \quad dx$$

Int. por partes : $\left((u-w)|_{\partial\Omega} = 0 \right)$

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u-w) - (u-w) f \, dx$$

Así,

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - uf \right) dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w - wf \, dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 dx +$$
$$- \int_\Omega wf \, dx$$

Rearreglando :

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega uf \, dx \leq I[w]$$

Como $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $u \in \mathcal{Q}_g$ $\left(u|_{\partial\Omega} = g \right)$ $\therefore$

$$I[u] = \min_{w \in \mathcal{Q}_g} I[w]$$

" $\Rightarrow$ " Sea $u \in \mathcal{Q}_g$ tal que $I[u] = \min_{w \in \mathcal{Q}_g} I[w]$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Definimos

$$\theta(t) := I[u + t\varphi], \quad t \in \mathbb{R}$$

Nótese que $u + t\varphi \in \mathcal{Q}_g$.

$\Rightarrow$ la función escalar $\theta(t)$ tiene un mínimo en $t = 0$.

$$\therefore \quad \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

$$\theta(t) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u + t\nabla \varphi|^2 - (u+t\varphi)f \, dx$$

$$= \int_\Omega \Big[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}t^2|\nabla\varphi|^2 + t\,\nabla u\cdot\nabla\varphi + - (u+t\varphi)f \Big] dx$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \varphi f \, dx$$

$$\underset{\text{int. por partes}}{=} \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \, dx \qquad \forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

Esto implica que $-\Delta u = f$ en Ω.
$u\in \mathcal{Q}_g$ $\therefore$ u es solución de (1)

$\square$

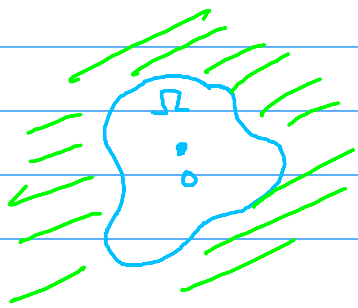
Problemas exteriores

Problemas exteriores de Dirichlet: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega\in C^1$. Definimos el <u>exterior de Ω</u> como

(1) ... $\qquad \Omega_{ext} := \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$

W.l.o.g. $0\in\Omega$

$\partial\Omega_{ext} = \partial\Omega$



$\Omega_{ext} = \mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$

Teorema Sea Ω_{ext} un dominio exterior en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Sea $u \in C^2(\Omega_{ext}) \cap C(\overline{\Omega_{ext}})$, armónica en Ω_{ext}, tal que

(2) . . $\qquad u \to 0$ si $|x| \to \infty$

Si $u \geq 0$ sobre $\partial\Omega_{ext}$ entonces $u \geq 0$ en Ω_{ext}.

Dem. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\lim\limits_{|x|\to\infty} u = 0$, existe $R_0 = R_0(\epsilon) > 0$ tal que $|u| \leq \epsilon$ si $|x| \geq R_0$. Por lo tanto, podemos escoger $r_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$u \geq -\epsilon \quad \text{sobre} \quad \partial B_r(0) \quad \forall\, r \geq r_0$$

y tal que $\Omega \subset B_{r_0}(0) \subset B_r(0)$.

En el dominio acotado

$$\tilde{\Omega}(r) := \Omega_{ext} \cap B_r(0)$$

se puede aplicar el principio del máximo:

$$u \geq -\epsilon \quad \text{en} \quad \tilde{\Omega}(r)$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario y r es arbitrariamente grande obtenemos

$$u \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega_{ext}$$

$\square$

Corolario Sea $\Omega_{ext} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, un dominio exterior. Sean $f \in C(\Omega_{ext})$, $g \in C(\partial\Omega_{ext})$. Si existe una solución $u \in C^2(\Omega_{ext}) \cap C(\overline{\Omega_{ext}})$ al problema

$$(3) \ldots \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega_{ext} \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega_{ext} \end{cases}$$

tal que $u \to u_\infty$ existe si $|x| \to \infty$, entonces es única.

Dem Sean u_1, u_2 dos soluciones. Entonces $u = u_1 - u_2$ satisface $\Delta u = 0$ en Ω_{ext}, $u = 0$ sobre $\partial\Omega_{ext}$ y $\lim\limits_{|x|\to\infty} u = 0$.

Aplicando el teorema a u y $-u$ obtenemos $u \equiv 0$ en Ω_{ext}. $\Rightarrow$ unicidad $\square$

Observación Para $n=2$, sea u la diferencia de dos soluciones de (3), acotadas. Entonces, $\Delta u = 0$ en Ω_{ext} y es acotada. Tomando $0 < a < r$ tales que $B_a(0) \subset \Omega \subset B_r(0)$ definimos

$$u^{(r)} := M \left(\frac{\log|x| - \log a}{\log r - \log a} \right)$$

donde M es tal que $|u| \leq M$ en Ω_{ext}. Por el principio del máximo concluimos que

$$u \leq u^{(r)} \text{ en el anillo } \{a < |x| < r\}$$

Tomando $r \to \infty$ se deduce $u \leq 0$ en Ω_{ext}.

Análogamente (ejercicio) $u \geq 0$ en Ω_{ext}.

Para $n=2$ basta con pedir u acotada.

Estimaciones de las derivadas para $n \geq 3$

Lema Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado, abierto, conexo, $n \geq 3$, con $\partial\Omega \in C^1$. $\Omega_{ext} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Sea u armónica en Ω_{ext} tal que $u \to 0$ si $|x| \to \infty$. Entonces existe $r_0 > 0$ tal que si $|x| \geq r_0$

$$(4) \cdots \begin{cases} |u(x)| \leq \dfrac{M}{|x|^{n-2}} \\ |u_{x_j}(x)| \leq \dfrac{M}{|x|^{n-1}}, & 1 \leq j \leq n \\ |u_{x_j x_i}(x)| \leq \dfrac{M}{|x|^{n}} \end{cases}$$

para cierto $M > 0$, que depende de $r_0 > 0$.

Dem. Como $u \to 0$ si $|x| \to \infty$ entonces podemos escoger $R_0 > 0$ tal que $\Omega \subset B_{R_0}(0)$ y $|u(x)| \leq 1$ si $|x| \geq R_0$.

Sea $w(x) := u(x) - \dfrac{R_0}{|x|^{n-2}}$.

Nótese que:
- w es armónica en Ω_{ext}
- $w \leq 0$ en $|x| = R_0$
- $w \to 0$ si $|x| \to \infty$.

Por principio del máx. para dominios exteriores:

$$w \leq 0 \quad \forall \ x \in \Omega_{ext} \cap \{|x| > R_0\}$$

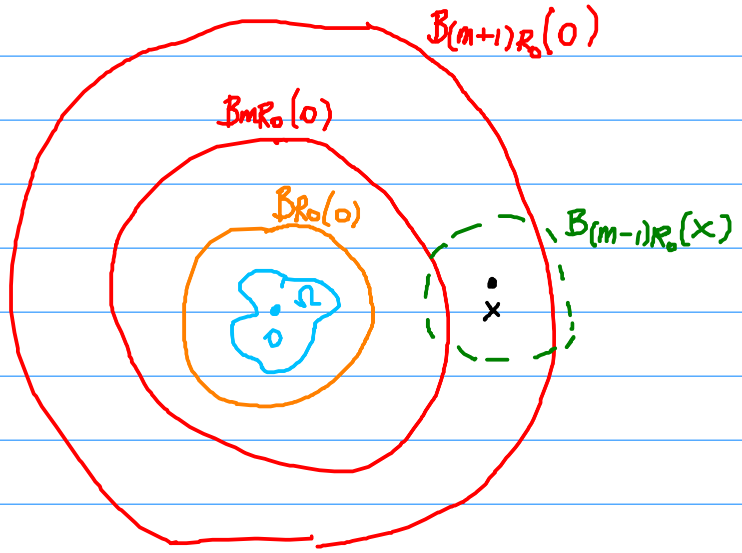
Análogamente, si $v(x) := \dfrac{R_0}{|x|^{n-2}} - u(x) = -w(x)$ entonces

$$v \geq 0 \quad \forall \ x \in \Omega_{ext} \cap \{|x| > R_0\}$$

Concluimos que $\quad |u(x)| \leq \dfrac{R_0}{|x|^{n-2}}$ en $\Omega_{ext} \cap \{|x| > R_0\}$

Escogemos $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$ tal que

$$m R_0 \leq |x| \leq (m+1) R_0$$



Así, se tiene que $\quad \partial B_{(m-1)R_0}(x) \subset \{|x| \geq R_0\}$

|

Si $y \in \partial B_{(m-1)R_0}(x)$ entonces $|x-y| = (m-1)R_0$

$\therefore$

$$(m-1)R_0 = |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$(\Rightarrow) \quad |y| \geq |x| - (m-1)R_0 \geq mR_0 - (m-1)R_0 = R_0.$$

Aplicando est. del gradiente para la bola $B_{(m-1)R_0}(x)$:

$$|u_{x_j}(x)| \leq \frac{n}{(m-1)R_0} \max_{\partial B_{(m-1)R_0}(x)} |u|$$

Pero $\partial B_{(m-1)R_0}(x) \subset \{|x| \geq R_0\}$, por lo tanto $|u| \leq \frac{R_0}{|x|^{n-2}}$. Más aún, $R_0 \geq \frac{|x|}{m+1}$.

Sustituyendo:

$$|u_{x_j}(x)| \leq \frac{n}{(m-1)R_0} \frac{R_0}{|x|^{n-2}} \leq \frac{n}{(m-1)} \frac{|x|}{|x|^{n-1}} \leq \frac{n(m+1)}{(m-1)} \frac{R_0}{|x|^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad |u_{x_j}(x)| \leq 2n \frac{R_0}{|x|^{n-1}} \qquad \left(\frac{m+1}{m-1} \leq 2 \right)$$

El radio necesario es $r_0 = mR_0$.

La demostración para $|u_{x_i x_j}|$ es análoga (ejercicio).

El radio se calcula tomando el máx. de R_0, mR_0 y el radio necesario para la estimación de las segundas derivadas.

$\square$

Corolario (fórmula de Green en Ω_{ext}) ($n \geq 3$)

Sean $u, v \in C^2(\Omega_{ext}) \cap C^1(\overline{\Omega_{ext}})$, tales que $u, v \longrightarrow 0$ si $|x| \to \infty$. Si u, v son armónicas en Ω_{ext} entonces

$$(5) \ldots \int_{\Omega_{ext}} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial \Omega_{ext}} v \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \, dS_x$$

Dem. $\tilde{\Omega}(r) = \Omega_{ext} \cap B_r(0)$ con $r \gg 1$ suf. grande tenemos

$$\int_{\tilde{\Omega}(r)} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial \tilde{\Omega}(r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \, dS_x$$

Por las estimaciones del gradiente (4) podemos tomar $r \to \infty$ para obtener (5)

$\square$

Aplicación: sea el problema exterior

$$(6) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega_{ext} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = g & \text{sobre } \partial\Omega_{ext} \\ u \to u_\infty & \text{si } |x| \to \infty \end{cases}$$

con $\alpha \geq 0$, $f \in C(\Omega_{ext})$, $g \in C(\partial\Omega_{ext})$,
$n \geq 3$. ($\alpha = 0$ problema de Neumann)

Si existe $u \in C^2(\Omega_{ext}) \cap C^1(\overline{\Omega_{ext}})$ de (6) entonces es única:

sea $u = u_1 - u_2$ $\quad u_j$, $j = 1,2$ dos soluciones de (6).

Entonces u es armónica en Ω_{ext}, y
$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u = 0$ sobre $\partial\Omega_{ext}$.
Como además $u \to 0$ si $|x| \to \infty$, por la fórmula de Green en Ω_{ext}:

$$0 \leq \int_{\Omega_{ext}} |\nabla u|^2 \, dx = \int_{\partial\Omega_{ext}} u \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \, dS_x$$

$$= -\alpha \int_{\partial\Omega_{ext}} u^2 \, dS_x \leq 0$$

$\alpha \geq 0$

$\Rightarrow |\nabla u|^2 = 0$ en Ω_{ext}
$\Rightarrow$ u es constante en Ω_{ext} (Ω_{ext} es conexo)
como $u \to 0$ en $|x| \to \infty$ $\therefore$ $u \equiv 0$ en Ω_{ext}

$\square$