Lección 3.7: El método de Perron.

O. Perron, Math. Z. 18 (1923)

Objetivo: resolver el problema de Dirichlet para la ec. de Laplace:

$$(1)\ \cdots \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo y con frontera $\partial\Omega$ "suficientemente regular". $g \in C(\partial\Omega)$ conocida.

<u>Paso 1</u>: ascenso de una función subarmónica.

$u \in C(\Omega)$ subarmónica en Ω. Sea $B_R(y) \subset \Omega$, con $R > 0$. u es continua en $\partial B_R(y)$, : consideremos el problema:

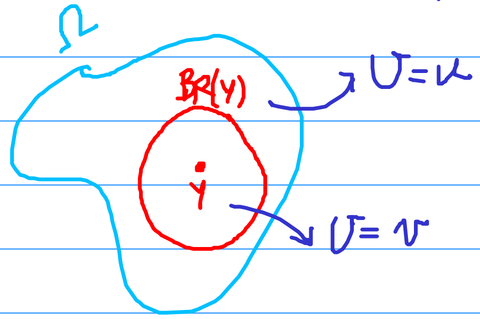
$$(2) \quad \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B_R(y) \\ v = u & \text{sobre } \partial B_R(y) \end{cases}$$

$y \in \Omega$, fijo. Usando la función de Green para la bola concluimos que $\exists$ $v \in C^\infty(B_R(y)) \cap C(\overline{B_R(y)})$ solución de (2) (fórmula de Poisson).

Definición Se denomina el <u>ascenso de u</u> en Ω a la función

$$(3) \cdots \qquad U(x) := \begin{cases} v(x), & x \in B_R(y) \\ u(x), & x \in \Omega \setminus \overline{B_R(y)} \end{cases}$$

para cada $y \in \Omega$, fijo, $B_R(y) \subset \Omega$.



De la def. observamos:

- $\Delta U = 0$ en $B_R(y)$
- $U = u$ en $\partial B_R(y)$

Lema 1 $u \leq U$ en Ω y U es subarmónica en Ω.

Dem. Si $x \in \Omega \setminus B_R(y)$ entonces por definición $u(x) \leq U(x)$.

Sea $x \in B_R(y) =: B$. Por la propiedad del promedio, $u - U$ es subarmónica en B: tomando $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset B$ entonces

$$\fint_{\partial B_r(x)} u(\xi) - U(\xi)\, dS_\xi \geq u(x) - U(x)$$

$\downarrow$ u subarmónica en $B \subset \Omega$
U armónica en B

Además, $u - U = 0$ en ∂B. Por el principio débil del máximo $u - U \leq 0$ en $\overline{B}$.

$\therefore$ $u \leq U$ en Ω.

u subarmónica en Ω $\Rightarrow$ V es subarmónica en $\Omega \setminus \bar{B}$

v armónica en B $\Rightarrow$ V es subarmónica en B

Falta ∂B : sea $x \in \partial B$, $|x-y| = R$. Entonces

$$V(x) = u(x) \leq \fint_{|z-x|=\rho} u(z)\, dS_z$$

$$\underset{\substack{u \leq V \\ \text{en } \Omega}}{\leq} \fint_{|z-x|=\rho} V(z)\, dS_z \,,$$

$B_\rho(x) \subset \Omega$.

$\therefore$ V es subarmónica en Ω $\square$

Paso 2 : Sea $g \in C(\partial\Omega)$. Definimos :

$$(4) \cdots \quad S_g := \{ u \in C(\bar{\Omega}) : u \text{ subarmónica en } \Omega,\ u \leq g \text{ en } \partial\Omega \}$$

Ω acotado $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ compacto.

$g \in C(\partial\Omega)$ $\Rightarrow$ $-\infty < m := \inf_{\partial\Omega} g \leq M := \sup_{\partial\Omega} g < \infty$

$u \equiv m \in S_g$ $\therefore$ S_g es no vacío.

Lema 2 Sea $\{u_1, \ldots, u_N\} \subset S_g$, conjunto finito de funciones en S_g, $N \in \mathbb{N}$. Entonces la función

$$v(x) := \max_{1 \leq j \leq N} \{ u_j(x) \}, \quad x \in \bar{\Omega} \quad \cdots (5)$$

es de clase $C(\bar{\Omega})$ y es subarmónica en Ω.

Dem. $v \in C(\bar{\Omega})$ (máx. de un conjunto finito de funciones continuas es continuo).

Sea $x \in \Omega$, $r > 0$ tales que $B_r(x) \subset \Omega$.
Entonces:

$$v(x) = \max_{1 \le j \le N} \{u_j(x)\} \underset{u_j \text{ subarmónica}}{\le} \max_{1 \le j \le N} \left\{ \fint_{|x-y|=r} u_j(\xi)\, dS_\xi \right\}$$

$$= \fint_{|x-y|=r} u_k(\xi)\, dS_\xi \qquad \text{para cierto } 1 \le k \le N$$

$$\le \fint_{|x-y|=r} \max_{1 \le j \le N} \{u_j(\xi)\}\, dS_\xi$$

$$= \fint_{|x-y|=r} v(\xi)\, dS_\xi$$

$\therefore$ v es subarmónica en Ω

$\square$

Paso 3: La función de Perron.

Definimos la <u>función de</u> Perron como:

$$u(x) := \sup_{w \in S_g} w(x), \qquad x \in \bar{\Omega} \quad \cdots (5)$$

$S_g \neq \phi$, por el principio del máximo aplicado a cada $w \in S_g$

$$u(x) = \sup_{w \in S_g} w(x) \le \sup_{\partial\Omega} g \le M < \infty$$

u está bien definida.

Teorema (Perron) La función definida en (S) es armónica en Ω.

Dem. Sea $y \in \Omega$, fijo. Por definición de u, existe una sucesión $\{u_n\} \subset S_g$ tal que $u_n(y) \to u(y)$ cuando $n \to \infty$.

Sea $v_n(x) := \max\{u_n(x), m\}$, $x \in \bar{\Omega}$

Esta sucesión es uniformemente acotada.
Por probar: $v_n(y) \to u(y)$ si $n \to \infty$.

Por lema 2: v_n es el máximo de un subconjunto finito de S_g y por lo tanto, $v_n \in C(\bar{\Omega})$ y subarmónica en Ω.

Además, por definición:
- $u_n \leq g$ en $\partial\Omega$
- $m \leq g$ en $\partial\Omega$

$\Rightarrow v_n \leq g$ en $\partial\Omega$

$\therefore v_n \in S_g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, es unif. acotada $m \leq v_n(x) \leq M$ $\forall x \in \bar{\Omega}$.

Claramente, $u \geq m$ en Ω, ya que $m \in S_g$.

Supongamos que $u(y) > m$. ($y \in \Omega$ fijo)
Dado que $u_n(y) \to u(y)$ si $n \to \infty$, para $n \gg 1$ suficientemente grande $u_n(y) > m$.
Así, $v_n(y) = \max\{u_n(y), m\} = u_n(y)$

$\therefore v_n(y) \to u(y)$ si $n \to \infty$

Supongamos que $u(y) = m$. Entonces,
$v_n(y) = \max\{u_n(y), m\} \to u(y) = m$ si $n \to \infty$.

Concluimos que $v_n(y) \to u(y)$ si $n \to \infty$.

Sea $R > 0$ tal que $B_R(y) \subset \Omega$. Definimos V_n como el ascenso de v_n en $B := B_R(y)$:

$$\begin{cases} V_n = v_n & \text{en } \Omega \setminus \overline{B} \\ \Delta V_n = 0 & \text{en } B \end{cases}$$

Por Lema 1: cada V_n es subarmónica en Ω y $v_n \leq V_n$ en Ω, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por el principio débil del máximo:

$$V_n\big|_{\partial\Omega} = v_n\big|_{\partial\Omega} \leq g$$

$$\therefore \quad \{V_n\} \subset S_g$$

Por definición de u:

$$V_n \leq u \quad \text{en } \overline{\Omega}$$

Así,
$$\underset{\substack{\downarrow \\ u(y) \text{ si } n \to \infty}}{v_n(y)} \leq V_n(y) \leq u(y)$$

$$\Rightarrow \quad V_n(y) \to u(y) \quad \text{si } n \to \infty.$$

$\{v_n\} \subset \mathcal{S}_g$ es una sucesión de funciones armónicas en B, con $v_n(y) \to u(y)$ si $n \to \infty$ y uniformemente acotada en $\bar{\Omega}$

$$-\infty < m \leq v_n \leq \bar{v}_n \leq u \leq M < \infty$$

Por la compacidad de sucesiones acotadas de funciones armónicas : $\exists\ \bar{v}_{n_j}$ subsucesión que converge uniformemente en cualquier bola $\overline{B_\rho(y)} \subset B$, $0 < \rho < R$, a una función armónica v en B.

Además, $\bar{v}_{n_j} \leq u$ en B, por lo tanto $v \leq u$ en B. Mas aún, $\bar{v}_{n_j}(y) \to v(y) = u(y)$ por unicidad del límite. Tenemos así un una función límite que satisface :

- v armónica en B
- $v(y) = u(y)$
- $v \leq u$ en B

Lema 3 $\quad v = u$ en B

Dem. Por contradicción : supongamos que $\exists\ z \in B$ tal que $v(z) < u(z)$. Por definición de u existe $\tilde{u} \in \mathcal{S}_g$ tal que

$$v(z) < \tilde{u}(z) \leq u(z)$$

Sea $w_{n_j} := \max\{v_{n_j}, \tilde{u}\}$ en $\bar{\Omega}$.

Por los argumentos anteriores, $w_{n_j} \in S_g$
y además $m \leq w_{n_j} \leq M$, $\forall\, n_j$.

Sea W_{n_j} el ascenso de w_{n_j} en B:

$$\begin{cases} W_{n_j} = w_{n_j} & \text{en } \Omega \setminus \bar{B} \\ \Delta W_{n_j} = 0 & \text{en } B \end{cases}$$

Análogamente, $W_{n_j} \in S_g$, sucesión unif. acotada, armónicas en B tales que

- $W_{n_j}(y) \to u(y)$ si $n_j \to \infty$
- $W_{n_j} \leq u$ en $\bar{\Omega}$

Por lema 1: $w_{n_j} \leq W_{n_j}$ en $\bar{\Omega}$.

Por compacidad $\exists\, W_\ell$ subsucesión que converge uniformemente a una función armónica W en B, en compactos de B.

$$\therefore \quad W_\ell(y) \to W(y) = u(y) = V(y) \quad \text{si } \ell \to \infty$$

Dado que:
$$V_\ell = V_\ell \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B}$$
$$w_\ell = W_\ell \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{B}$$
y
$$V_\ell \leq w_\ell \quad \text{en } \bar{\Omega} \quad (\text{por def.})$$

concluimos que $V_\ell - W_\ell \leq 0$ en $\partial B \subset \Omega \setminus B$

Pero $V_\ell - W_\ell$ es armónica en B
Por el principio del máximo $V_\ell \leq W_\ell$ en $\overline{B}$. Tomando el límite

$$V \leq W \quad \text{en } B$$

Pero $u(y) = V(y) = W(y)$ con $y \in B$.
Por el principio fuerte del máximo

$$V = W \quad \text{en } \overline{B}$$

$$\therefore \quad \underset{\substack{\downarrow \\ W(z) \text{ con } z \in B}}{W_\ell(z)} = \max\{\tilde{u}(z), V_\ell(z)\} > V(z) \qquad \ell \to \infty$$

¡contradicción!

$$\Rightarrow \quad V = u \quad \text{en } B.$$

$\square$

Hemos demostrado que $\forall\, y \in \Omega$ fijo pero arbitrario, y para cada bola $B_R(y) \subset \Omega$ u coincide con una función armónica en $B_R(y)$.

$$\Rightarrow \quad u \text{ es armónica en } \Omega$$

$\square$

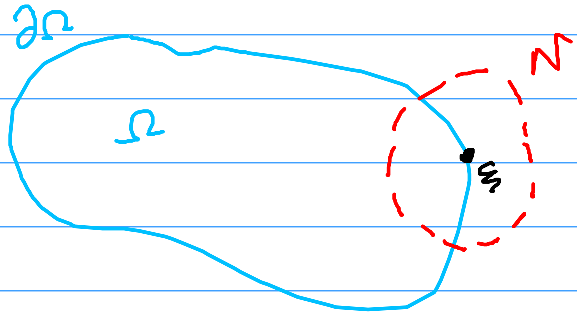
<u>Paso 4</u> : postulado de la barrera.

<u>Definición</u> Sea $\xi \in \partial\Omega$. Entonces una función $h \in C(\overline{\Omega})$ es una <u>función barrera en ξ relativa a Ω</u> si :

(a) h es subarmónica en Ω

(b) $h(\xi) = 0$ y $h(x) < 0$ $\forall\, x \in \partial\Omega,\ x \neq \xi$

Definición Una función $w \in C(\bar{\Omega})$ es una barrera local en $\xi \in \partial\Omega$ si existe una vecindad N de ξ tal que w es una función barrera en ξ relativa a $N \cap \Omega$ (Es decir, si w es subarmónica en $N \cap \Omega$, $w(\xi) = 0$, $w(x) < 0$ $\forall\, x \in \partial\Omega \cap N$, con $x \neq \xi$)



Definición Sea $\xi \in \partial\Omega$. ξ se denomina punto regular de $\partial\Omega$ con respecto al Laplaciano si existe una barrera en ξ relativa a Ω.

Postulado de la barrera: todos los puntos $\xi \in \partial\Omega$ son regulares con respecto al Laplaciano.

Suponiendo $g \in C(\partial\Omega)$ entonces la función de Perron satisface $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ y $u = g$ en $\partial\Omega$ si todos los puntos de $\partial\Omega$ son regulares con respecto al laplaciano.

Teorema 2 (Perron) Sea u la sol. de Perron. Sea $g \in C(\partial\Omega)$. Si $\xi \in \partial\Omega$ es un punto regular entonces $u(x) \to g(\xi)$ si $x \to \xi$, $x \in \Omega$.

Dem. $\xi \in \partial\Omega$ punto regular $\Rightarrow \exists\, h \in C(\bar{\Omega})$ barrera en ξ relativa a Ω.

Sean $\epsilon, k > 0$ y
$$\begin{cases} v(x) := g(\xi) - \epsilon + k h(x), \\ w(x) := g(\xi) + \epsilon - k h(x) \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}$$

claramente, $v, w \in C(\bar{\Omega})$. h subarmónica en $\Omega \Rightarrow -w, v$ son subarmónicas en Ω.

h barrera $\Rightarrow h(\xi) = 0$.

$$\therefore \quad v(\xi) = g(\xi) - \epsilon$$
$$w(\xi) = g(\xi) + \epsilon$$

$h(x) < 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega,\ x \neq \xi$

$$\Rightarrow \quad v(x) \leq g(\xi) - \epsilon \qquad \forall\, x \in \partial\Omega,\ x \neq \xi$$
$$w(x) \geq g(\xi) + \epsilon$$

$g \in C(\partial\Omega)$, $\quad 0 < M = \sup_{\partial\Omega} |g| < \infty$

g uniformemente continua: para $\tilde{\epsilon} > 0$ dado existe $\delta(\tilde{\epsilon}) > 0$ tal que $|g(x) - g(\xi)| < \tilde{\epsilon}$ si $|x - \xi| < \delta$, $x \in \partial\Omega$.

Escogiendo $\tilde{\epsilon} = \epsilon$ obtenemos

$$w(x) \geq g(\xi) + \epsilon \geq g(x)$$
$$v(x) \leq g(\xi) - \epsilon \leq g(x)$$

si $|x-\xi| < \delta$

Para $|x-\xi| \geq \delta$, $x \in \partial\Omega$ sabemos que $h(x) < 0$.

<u>Lema 4</u> $\exists\ K(\epsilon) > 0$ tal que

$$-K(\epsilon)\, h(x) \geq 2M$$

$\forall\ x \in \partial\Omega$, $|x-\xi| \geq \delta$.

<u>Dem.</u> $h(x) < 0$. Entonces

$$-\sup_{\substack{x\in\partial\Omega \\ |x-\xi|\geq\delta(\epsilon)}} h(x) =: C(\epsilon) > 0$$

Así, $h(x) \leq -C(\epsilon) < 0$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{h(x)} \leq \frac{1}{C(\epsilon)} \quad \forall\ |x-\xi| \geq \delta(\epsilon)$$

$h \in C(\bar{\Omega})$ $\therefore$ $C(\epsilon)$ está acotado por arriba. Podemos escoger:

$$K(\epsilon) \geq \frac{2M}{C(\epsilon)}$$

tal que

$$-K(\epsilon)\,h(x) \geq \frac{2M}{C(\epsilon)}\left(-h(x)\right) \geq 2M$$

$$\forall\ x \in \partial\Omega,\quad |x-\xi| \geq \delta(\epsilon). \qquad \square$$

Escogemos $k = K(\epsilon)$. Por ende:

$$\begin{aligned} W(x) &= g(\xi) + \epsilon - K(\epsilon)\,h(x) \\ &\geq g(\xi) + \epsilon + 2M \\ &= \underbrace{\left(g(\xi) + \sup_{\partial\Omega}|g|\right)}_{\geq 0} + \underbrace{\epsilon + \sup_{\partial\Omega}|g|}_{\geq g(x)} \\ &\geq g(x). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} v(x) &= g(\xi) - \epsilon + K(\epsilon)\,h(x) \\ &\leq g(\xi) - \epsilon - 2M \\ &= \underbrace{\left(g(\xi) - \sup_{\partial\Omega}|g|\right)}_{\leq 0} - \underbrace{\left(\epsilon + \sup_{\partial\Omega}|g|\right)}_{\leq g(x)} \\ &\leq g(x) \end{aligned}$$

$$\forall\ x \in \partial\Omega,\quad |x-\xi| \geq \delta.$$

Para cada $\epsilon > 0$, escogiendo $k = K(\epsilon) > 0$ obtenemos

$$v(x) \leq g(x) \qquad \forall\ x \in \partial\Omega$$
$$W(x) \geq g(x)$$

$-w, v$ subarmónicas.

$$\Rightarrow \quad v \in S_g$$

$$w \in S_{-g}$$

Por def. de u: $\quad v \leq u$ en $\bar{\Omega}$.

Sea $q \in S_{-g}$: $\quad q$ subarmónica en Ω

$q \leq -g$ en $\partial\Omega$

u armónica en Ω y $u \leq g$ en $\partial\Omega$

$\therefore$ $u+q$ es subarmónica en Ω

$u+q \leq 0$ en $\partial\Omega$

Por principio del máx. $\quad u+q \leq 0$ en $\bar{\Omega}$

En particular $\quad w =: -q \quad \Rightarrow \quad u \leq w$ en $\bar{\Omega}$.

$\therefore \quad v \leq u \leq w$ en $\bar{\Omega}$

Sustituyendo:

$$g(\xi) - \epsilon + K(\epsilon) h(x) \leq u(x) \leq g(\xi) + \epsilon - K(\epsilon) h(x)$$

$$\forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow \quad |u(x) - g(\xi)| \leq \epsilon - K(\epsilon) h(x)$$

h continua, $\quad h(x) \to 0$ si $x \to \xi$, $x \in \Omega$.

$$\Rightarrow \quad u(x) \to g(\xi) \quad \text{si } x \to \xi, \; x \in \bar{\Omega}$$

$\square$

Teorema 3 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo, Entonces el problema de Dirichlet (1) tiene una única solución $u \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ para cada $g \in C(\partial\Omega)$ sí y sólo si todos los puntos $\xi \in \partial\Omega$ son regulares.

Dem. "$\Leftarrow$" Sea $g \in C(\partial\Omega)$ arbitraria y $\partial\Omega$ regular entonces la solución de Perron (Teos. 1 y 2) es la solución de (1).

"$\Rightarrow$" supongamos que (1) tiene una única solución para cada $g \in C(\partial\Omega)$.

Sea $\xi \in \partial\Omega$ arbitrario. Escogemos

$$g(x) = -|x-\xi| \in C(\partial\Omega)$$

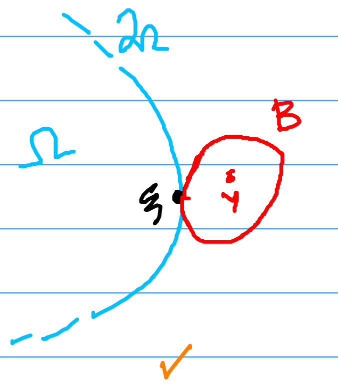
Por hipótesis $\exists$ $u^g \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ solución de (1). En particular, u es subarmónica en Ω y

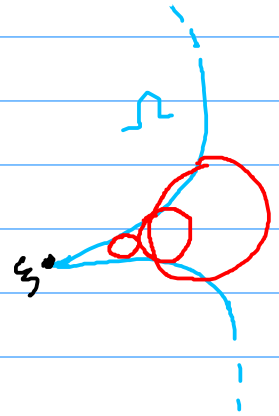
$$u^g(x) = -|x-\xi| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \xi \\ <0 & \text{si } x \neq \xi \end{cases} \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

u^g misma es una función barrera

$\therefore$ ξ es regular. $\square$

__Observación__ Se dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la propiedad de la bola exterior si $\forall\ \xi \in \partial\Omega$ existe una bola $B_R(y) = B$ tal que $B \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$.





No satisface.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisface la prop. de la bola ext. entonces es regular con respecto al Laplaciano:

$$h(x) = \begin{cases} R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & n \geq 3 \\ \log \dfrac{|x-y|}{R} & n = 2 \end{cases}$$

donde y es el centro de $B = B_R(y)$ para $\xi \in \partial\Omega$.

__Corolario__ Si $\partial\Omega$ es regular con respecto al Laplaciano podemos resolver

$$\begin{cases} \Delta_y \Gamma = 0 & y \in \Omega \\ \Gamma(x,y) = \Phi(x,y) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

$x \in \Omega$, fijo. $\therefore$ la función de Green existe.